

Le Théorème de Jordan

Vincent LE GRUIEC & Sacha QUAYLE

28 avril 2021

Table des matières

1	Introduction	2
2	Chemins, lacets, courbes	3
3	Théorème de Tietze-Urysohn	5
4	Homotopie	7
4.1	Pour mieux comprendre	7
4.2	Définition de l'homotopie	8
4.2.1	Homotopie entre deux chemins	8
4.2.2	Définition générale de l'homotopie	10
4.3	Résultats sur l'homotopie	10
5	Indice d'un lacet par rapport à un point	11
5.1	Calcul de l'indice	12
5.2	Résultats sur l'indice	13
6	Le théorème de Jordan	14
6.1	Résultats préliminaires	14
6.2	Preuve du théorème de Jordan	19

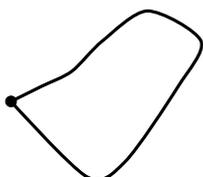
1 Introduction

En mathématiques, le théorème de Jordan est un théorème de topologie plane. Il est célèbre par le caractère apparemment intuitif de son énoncé et la difficulté de sa démonstration.

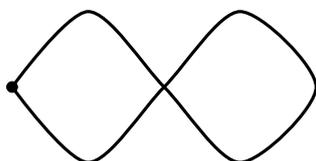
Pour en comprendre l'énoncé, on peut l'expliquer de la manière suivante :

Si, à l'aide d'un crayon, on dessine une ligne continue (on ne lève pas le crayon) qui ne se croise pas et qui termine là où elle commence, la zone de la feuille non dessinée se décompose en deux parties, l'intérieur de la figure, qui est borné, et l'extérieur, qui ne le serait pas si la feuille ne l'était pas. Pour s'en rendre compte, il suffit de découper la feuille à l'emplacement de la ligne, on obtient bien deux morceaux.

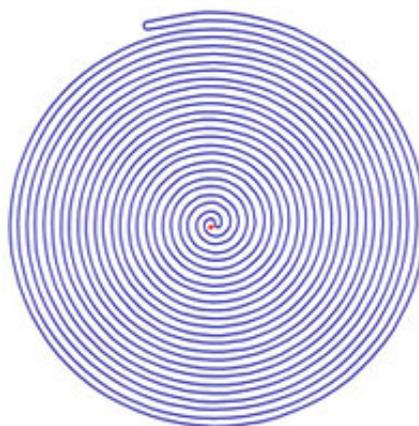
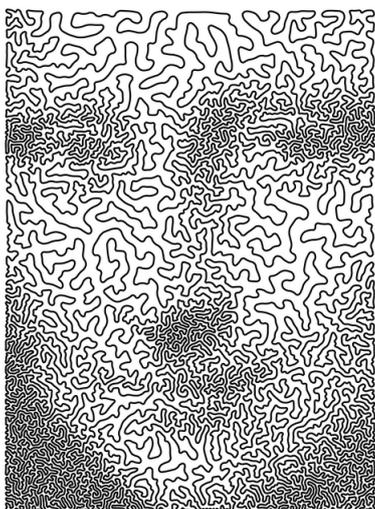
Cet énoncé semble très intuitif, on pense très souvent au premier abord à des figures semblables à un cercle (modulo quelques bosses), comme par exemple la figure suivante :



Le caractère "qui ne se croise pas" n'est pas anodin, sans cette hypothèse il vint immédiatement des contre-exemples, en voici un :



Si avec un ciseau on décide de couper le long du tracé, on obtiendra trois morceaux. Cependant ce théorème est beaucoup moins évident si l'on considère des courbes beaucoup plus complexes



Il n'est ici pas toujours intuitivement évident de savoir si un point se situe dans la zone intérieure ou extérieure.

Au cours de ce document, nous allons formaliser les objets que nous avons ici introduit, pour obtenir et démontrer le résultat suivant :

Théorème de Jordan :

Le complémentaire d'une courbe de Jordan Γ dans le plan complexe est formé d'exactly deux composantes connexes distinctes, l'une bornée et l'autre non.

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes :

1. On montre que Γ est homéomorphe au cercle unité, que l'on notera toujours \mathcal{C} dans la suite.
2. On montre que si K_1 et K_2 sont deux compacts de \mathbb{C} homéomorphes, alors $\mathbb{C} \setminus K_1$ et $\mathbb{C} \setminus K_2$ ont le même nombre de composantes connexes.
3. On montre que $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ possède exactement deux composantes connexes, l'une bornée et l'autre non.

2 Chemins, lacets, courbes

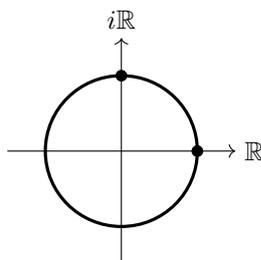
Définition 1 (chemin)

On appelle *chemin* dans X toute application continue $\gamma : J \rightarrow X$ où $J = [a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} non réduit à un point.

Exemple

Le cercle unité dans le plan complexe :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$



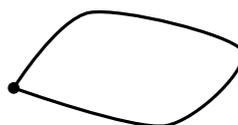
Définition 2 (lacet)

On dit qu'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ est un *lacet* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemple



chemin qui n'est pas un lacet



un lacet

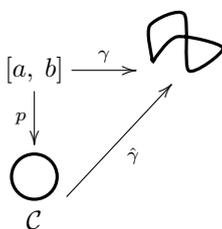
Lemme 1 (application quotient)

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un lacet dans X . On considère la "surjection canonique"

$$p : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi \frac{t-a}{b-a}} \end{array}$$

Alors il existe une unique application continue $\hat{\gamma} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Im}(\gamma)$ telle que $\gamma = \hat{\gamma} \circ p$. On appellera $\hat{\gamma}$ l'*application quotient* associée au lacet γ .

On peut résumer cela par le diagramme suivant :



Démonstration

Il s'agit tout d'abord de remarquer que $p|_{[a,b]}$ est une bijection et que $p(a) = p(b)$. On doit donc poser $\hat{\gamma}(\omega) = \gamma(t)$ si ω est différent de $p(a)$ et $p(b)$, où t est l'unique antécédent de ω par p , et $\hat{\gamma}(\omega) = \gamma(a) = \gamma(b)$ si $\omega = p(a)$. Ceci prouve l'existence et l'unicité.

Pour la continuité : soit F un fermé de X . p est surjective, donc $\hat{\gamma}^{-1}(F) = p(\gamma^{-1}(F))$. Par définition d'un lacet, γ est continue, donc γ^{-1} est un fermé de $[a, b]$, compact, donc est compact : $p(\gamma^{-1}(F))$ est compact, donc fermé. D'où $\hat{\gamma}$ est continue.

Définition 3 (chemin de Jordan)

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin.

On dit que γ est un *chemin de Jordan* si γ est injectif.

On dit que γ est un *lacet de Jordan* si γ est un lacet et si $\gamma|_{[a,b]}$ est injective.

Une *courbe de Jordan* est l'image d'un lacet de Jordan.

Une *courbe simple* est l'image d'un chemin de Jordan.

Dans le plan complexe, cela correspond à une courbe continue qui ne se coupe pas elle-même. Un chemin de Jordan est bien-sûr un lacet de Jordan.

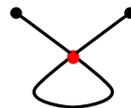
Exemple



Courbe simple



Courbe de Jordan



PAS une courbe de Jordan

Lemme 2

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin d'image Γ .

a. Si γ est un chemin de Jordan, alors γ est un homéomorphisme de $[a, b]$ sur Γ .

b. Si γ est un lacet de Jordan, alors l'application quotient $\hat{\gamma} : \mathcal{C} \rightarrow \Gamma$ est un homéomorphisme de \mathcal{C} sur Γ .

Démonstration

a. On rappelle un résultat classique de topologie :

Soient K un espace topologique compact, E un espace topologique séparé, et $f : K \rightarrow E$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme.

Le résultat est alors immédiat.

b. Puisque $\gamma|_{[a,b]} \rightarrow \Gamma$ est bijective par définition, on obtient la bijectivité de $\hat{\gamma}$. De plus on sait que $\hat{\gamma}$ est continue. On conclut donc par le théorème rappelé dans **a.**

Corollaire 1

a. Une courbe simple est homéomorphe à $[0, 1]$.

b. Une courbe de Jordan est homéomorphe à \mathcal{C} .

Démonstration

a. Le résultat découle du **a.** du lemme et du fait que $[a, b]$ est homéomorphe à $[0, 1]$ par $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$.

b. Une courbe de Jordan est par définition l'image d'un lacet de Jordan. Il s'agit du résultat **b.** du lemme.

3 Théorème de Tietze-Urysohn

Définition 4 (espace topologique normal)

Soit X un espace topologique. On dit que X est *normal* s'il est séparé et s'il vérifie de plus l'axiome de séparation (T4) :

Pour tous fermés disjoints F et G , il existe deux ouverts disjoints U et V tels que F soit inclus dans U et G dans V .

Exemple

\mathbb{R}^n , muni de sa topologie usuelle, est normal.

Lemme 3 (pour le besoin de la démonstration)

Soit X un espace topologique.

Soit D une partie dense de $[0, 1]$ et $(U_s)_{s \in D}$ une famille d'ouverts de X indexée par D telle que

$$s_1 < s_2 \Rightarrow \overline{U_{s_1}} \subset U_{s_2}$$

Soit $f : X \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \inf A_x := \inf\{s \in D \mid x \in U_s\} & \text{si } x \in \bigcup_{s \in D} U_s \\ 1 & \text{si } x \notin \bigcup_{s \in D} U_s \end{cases}$$

Alors f est une fonction continue.

Démonstration

Démontrons le lemme.

Soit $t \in [0, 1]$. Montrons que

$$\{x \mid f(x) < t\} = \bigcup_{s < t} U_s \quad (1) \quad \text{et} \quad \{x \mid f(x) \leq t\} = \bigcap_{s > t} \overline{U_s} \quad (2)$$

Avec la convention $\bigcup_{\emptyset} = \emptyset$ et $\bigcap_{\emptyset} = X$.

En effet, si $f(x) < t \leq 1$, il existe $s < t$ tel que $s \in A_x$, autrement dit tel que $x \in U_s$. Réciproquement, si $x \in U_s$ avec $s < t$, $f(x) \leq s < t$. cela prouve (1).

Si $f(x) \leq t$, on voit que

$$s > t \Rightarrow s > f(x) \Rightarrow \exists a \in]f(x), s[, a \in A_x \Rightarrow x \in U_a \subset \overline{U_s}$$

Supposons réciproquement que x appartient au membre de droite dans (2). Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de D , on peut trouver s_1 et s_2 éléments de D avec $t < s_1 < s_2 \leq t + \varepsilon$. Or $x \in \overline{U_{s_1}} \subset U_{s_2}$, donc $f(x) \leq s_2 \leq t + \varepsilon$. ε étant arbitraire, on a $f(x) \leq t$ ce qui prouve (2).

Il résulte de (1) et (2) que :

$$\{x \mid f(x) < t\} \text{ est ouvert pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (\hat{1})$$

En effet, cela résulte de (1) si $0 \leq t \leq 1$, alors que si $t < 0$ on obtient que le membre de droite dans (1) vaut \emptyset et X si $t > 1$.

$$\{x \mid f(x) \leq t\} \text{ est fermé pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (\hat{2})$$

En effet, cela résulte de (2) si $0 \leq t \leq 1$, alors que si $t < 0$ on obtient que le membre de droite dans (2) vaut \emptyset et X si $t > 1$.

(1) et (2) entraîne la continuité de f . En effet $f^{-1}([a, b]) = \{f < b\} \setminus \{f \leq a\} = f < b \cap \{f \leq a\}^c$ est ouvert dans X comme intersection de deux ouverts. Donc pour tout ω ouvert de \mathbb{R} , $f^{-1}(\omega)$ est un ouvert, puisque les intervalles de la forme $[a, b]$ engendrent les ouverts de \mathbb{R} .

Théorème 1 (théorème d'Urysohn)

Soit A, B deux fermés disjoints d'un espace normal X . Alors il existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continue telle que

$$f|_A = 0 \quad \text{et} \quad f|_B = 1$$

Démonstration

Prenons $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$, où

$$D_m = \left\{ \frac{k}{2^m} ; k = 0, \dots, 2^m \right\}$$

On va construire par récurrence sur m les U_s vérifiant

$$s_1 < s_2 \Rightarrow \overline{U_{s_1}} \subset U_{s_2} \quad (*)$$

et aussi $U_1 = B^c$ et $A \subset U_s$ pour tout s .

Pour $m = 0$, on prend $U_1 = B^c$ et puisque $A \subset B^c$, la normalité de X permet de trouver un ouvert U_0 tel que $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset B^c = U_1$. Ayant défini U_s vérifiant (*) pour $s \in D_{m-1}$, définissons le pour $s = k/2^m \in D_m$, où k est un entier impair (sinon $s \in D_{m-1}$).

D'après l'hypothèse de récurrence, $\overline{U_{(k-1)/2^m}} \subset U \subset \overline{U} \subset U_{(k+1)/2^m}$. Il n'y a plus qu'à poser $U_s = U$. En effet, soit $s_1 = k/2^m$ et $s_2 = l/2^m \in D_m$ avec $k < l$. Si $k = 2k' + 1$ est impair et $l = 2l'$ est pair, on a $k' + 1 \leq l'$, donc par construction :

$$\overline{U_{s_1}} \subset U_{(k+1)/2^m} = U_{(k+1)/2^{m-1}} \subset U_{l'/2^{m-1}} = U_{l/2^m} = U_{s_2}$$

d'après l'hypothèse de récurrence au rang $m - 1$. Les autres cas se traitent de même.

Soit alors f comme dans le lemme. f est continue à valeurs dans $[0, 1]$. $A \subset U_0$. Donc $f|_A = 0$. Puisque $U_1 = B^c$, si $x \in B$, x n'appartient à aucun des U_s et $f(x) = 1$. f répond donc à la question.

Remarque

Une *fraction dyadique* ou *rationnel dyadique* est un nombre rationnel qui peut s'écrire sous forme de fraction avec pour dénominateur une puissance de 2. On peut noter l'ensemble des nombres dyadiques formellement par

$$D = \left\{ \frac{a}{2^b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}.$$

L'ensemble de toutes les fractions dyadiques est dense dans l'ensemble des nombres réels. En particulier, l'ensemble D définie dans la preuve ci-dessus est bien une partie dense de $[0, 1]$.

Théorème 2 (théorème de Tietze)

Soient A un fermé d'un espace normal X , et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f se prolonge en une fonction $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Lemme 4

Si X est un espace normal alors, pour toute application continue f sur un fermé A de X et à valeurs dans $[-M, M]$, il existe une fonction continue g de X dans $[-M/3, M/3]$ telle que

$$\forall x \in A \quad |f(x) - g(x)| \leq \frac{2M}{3}$$

Démonstration

Soient A_- et A_+ les images réciproques par f de $[-M, -M/3]$ et $[M/3, M]$. Puisque f est continue et que ce sont des fermés disjoints de $[-M, M]$, ce sont des fermés disjoints de X . Ainsi, d'après le théorème d'Urysohn, il existe une application continue g_1 de X dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur A_- et 1 sur A_+ . On pose alors $g(x) = (2M/3)g_1(x) - M/3$: g est continue de X dans $[-M/3, M/3]$, vaut $-M/3$ sur A_- et $M/3$ sur A_+ , et par définition de A_- et A_+ , on a bien la propriété souhaitée.

Lemme 5

Soit X un espace normal.

Pour tout fermé A de X et toute application continue f de A dans un segment réel $[-M, M]$, il existe une application continue de X dans $[-M, M]$ qui prolonge f .

Démonstration

En effet, on déduit du lemme précédent l'existence d'une suite d'applications g_k continues sur X telles que :

$$(1) \quad \forall x \in A \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^n g_k(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$$

$$(2) \quad \forall x \in X \quad |g_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k M/2$$

D'après la majoration (2), la série des g_k est normalement convergente donc uniformément convergente. Sa somme g est donc une application continue sur X car son terme général l'est. De plus, $|g| \leq M$. D'après la majoration (1), la restriction de g à A coïncide avec f .

Démonstration (théorème de Tietze)

On peut remplacer \mathbb{R} par n'importe quel espace homéomorphe, par exemple un segment ouvert $] - M, M[$. Soit ainsi f une application continue de A dans $] - M, M[$. D'après le lemme précédent, f de A dans $] - M, M[$ possède un prolongement continu g de X dans $[-M, M]$. On pose $B = g^{-1}(\{M\}) \cup g^{-1}(\{-M\})$. A et B sont des disjoints de X , donc d'après le théorème d'Urysohn, il existe une fonction g_1 de X dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur A et 1 sur B . Ainsi, en multipliant g par g_1 , on obtient un prolongement continu de f , définie sur X et à valeurs dans $] - M, M[$.

Corollaire 2

Soit A un fermé d'un espace normal X et soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors f se prolonge en une fonction $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

Démonstration

On applique le théorème de Tietze aux parties réelles et imaginaires de f .

4 Homotopie

4.1 Pour mieux comprendre

La définition d'homotopie formalise la notion intuitive de déformation continue d'un objet vers un autre. Par exemple, on peut déformer continument (sans donner de coups de ciseaux) un cercle en une ellipse ou en un carré, ou même le rétrécir en un seul point. On dit que le cercle, le carré, l'ellipse sont homotopes et sont homotopes à un point.

Cette notion topologique permet de définir des invariants algébriques utilisés pour classifier les applications continues entre espaces topologiques, dans le cadre de la topologie algébrique.

Voici quelques exemples pour se sentir plus à l'aise avec cette notion :

Exemple

On se place dans \mathbb{C} .

Alors \mathcal{C} est homotope à un point :

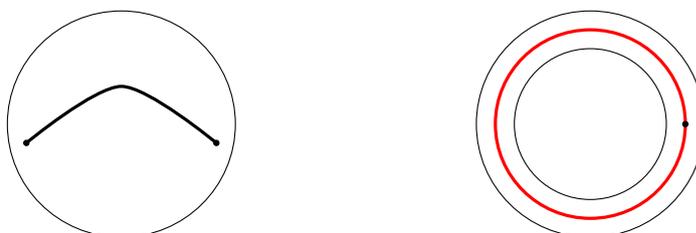


Une bonne idée à avoir en tête est de considérer notre courbe comme un élastique que l'on peut déformer continument comme l'on veut.

Plus généralement, comme toute courbe de Jordan est homéomorphe à \mathcal{C} , on peut montrer que toute courbe de Jordan est homotope à un point.

L'homotopie fournit des informations sur la nature topologique d'un espace.

Une bande circulaire d'un plan ne peut être équivalente, au sens de l'homéomorphisme, à un disque. Dans un disque, tout lacet est homotope à un point. Dans une bande circulaire, ce n'est pas le cas.



Dans le deuxième cas, on ne peut pas réduire continuellement le lacet rouge en un point. Il est nécessaire de le "couper". Tout ça est bien-sûr "avec les mains", mais ça nous permet d'introduire la notion d'homotopie.

4.2 Définition de l'homotopie

4.2.1 Homotopie entre deux chemins

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

Définition 5 (lacets homotopes)

On dit que deux lacets $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ sont **homotopes dans** Ω s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$ vérifiant les propriétés suivantes :

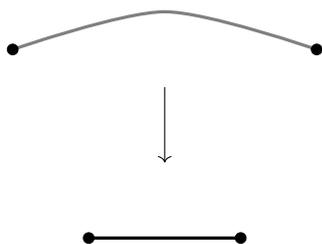
1. Pour tout $s \in [0, 1]$, le chemin Γ_s défini par $\Gamma_s(t) = H(s, t)$ est un lacet.
2. $\Gamma_0 = \gamma_0$ et $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Si p et q sont deux points de Ω , on dit que deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ de p vers q sont **homotopes dans** Ω **avec extrémités fixes** s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$ vérifiant :

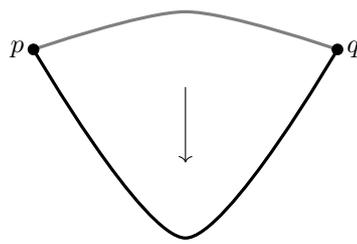
1. pour tout $s \in [0, 1]$, le chemin Γ_s a pour point initial p et pour point terminal q .
2. $\Gamma_0 = \gamma_0$ et $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Dans les deux cas, on dit que l'application H est une **homotopie** entre γ_0 et γ_1 .

Exemple



lacets homotopes



lacets homotopes avec extrémités fixes

Lemme 6

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .
Tout chemin dans Ω est homotope dans Ω avec extrémités fixes à un chemin de classe \mathcal{C}^1 par morceaux

Lemme 7

Soit $R \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle fermé.
Si $H : R \rightarrow \Omega$ est une application continue, alors pour toute application continue sur Ω on a :

$$\int_{\partial H} f = 0$$

Théoreme 3

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , $\gamma_0, \gamma_1 : J \rightarrow \Omega$ deux chemins homotopes dans ω avec extrémités fixes ou deux lacets homotopes dans Ω , ainsi que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe alors

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Démonstration

Fixons f, γ_0, γ_1 , et soit $H : [0, 1] \times J \rightarrow \Omega$ une homotopie entre les deux chemins. D'après le lemme précédent,

$$\int_{\partial H} f = 0 \quad (1)$$

Si on note α_a et α_b les chemins définis sur $[0, 1]$ respectivement par $\alpha_a(t) = H(t, a)$ et $\alpha_b(t) = H(t, b)$, on a alors

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f = \int_{\alpha_b} f - \int_{\alpha_a} f$$

car on peut écrire ∂H comme $\gamma_1 - \alpha_b - \gamma_0 + \alpha_a$ puis en utilisant (1) on retrouve bien l'égalité écrite ci-dessus. Si H est une homotopie de lacets, alors les chemins α_a et α_b sont égaux et si H est une homotopie extrémité fixes, ils sont tous les deux constants. Dans tous les cas le second membre de l'égalité vaut 0 et donc

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_0} f$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant

Corollaire 3

Si γ est un lacet homotope dans Ω à un lacet constant, alors pour toute fonction holomorphe dans Ω on a :

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

4.2.2 Définition générale de l'homotopie

Définition 6 (applications homotopes)

Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit que deux applications continues $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : [0; 1] \times X \rightarrow Y$ telle que $H(0, \cdot) = f_0$ et $H(1, \cdot) = f_1$

Remarque

Lorsque Y est une partie de \mathbb{C} , on dira que deux applications $f_0, f_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ sont homotopes dans Y si elles sont à valeurs dans Y et homotopes en tant qu'applications de X dans Y . Avec cette terminologie, deux lacets sont homotopes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ si et seulement si les applications quotients associées, qui sont définies sur le cercle \mathcal{C} , sont homotopes dans Ω .

Remarque

La relation "être homotope à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions continues de $X \rightarrow Y$.

4.3 Résultats sur l'homotopie

Proposition 1

Soit K un compact de \mathbb{R}^n . Alors $f, g : K \rightarrow \mathbb{C}^*$ sont homotopes dans \mathbb{C}^* si et seulement si $\frac{f}{g}$ est homotope à $\tilde{1}$.

Démonstration

Si F est une homotopie entre f et g , l'application $(t, x) \mapsto \frac{F(t, x)}{g(x)}$ est une homotopie entre $\frac{f}{g}$ et $\tilde{1}$, et inversement si F est une homotopie entre $\frac{f}{g}$ et $\tilde{1}$, alors l'application $(t, x) \mapsto F(t, x)g(x)$ est une homotopie entre f et g .

Définition 7 (admettre un logarithme continu)

Soit X un espace topologique, et $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ continue. On dit que f admet un logarithme continu s'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $e^g = f$.

Proposition 2

On peut toujours trouver des déterminations continues du logarithme le long d'un chemin donné $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$. Si l est une telle détermination, alors

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = l(b) - l(a)$$

Théorème 4 (théorème de Borsuk)

Soit K un compact de \mathbb{R}^n et $f : K \rightarrow \mathbb{C}^*$ continue. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) f admet un logarithme continu.
- (ii) f est homotope à la fonction $\tilde{1}$.
- (iii) f possède une extension continue $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Démonstration

(i) \Rightarrow (iii) : soit $g : K \rightarrow \mathbb{C}$ un logarithme continu de f . K est compact, donc fermé : d'après le théorème de Tietze-Urysohn, il existe une extension continue $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de g . Ainsi, $\tilde{f} := e^{\tilde{g}}$ est une extension continue de f .

(iii) \Rightarrow (ii) : soit \tilde{f} une extension continue de f sur \mathbb{R}^n . On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et on pose $F : [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $F(t, x) = \tilde{f}((1-t)x + tx_0)$. Alors F est continue sur $[0, 1] \times K$, $F(0, \cdot) = f$ et $F(1, \cdot) = \tilde{f}(x_0)$. D'où f est homotope à $\tilde{f}(x_0)$. Or \mathbb{C}^* est connexe par arcs, donc f est homotope à $\tilde{1}$.

(ii) \Rightarrow (i) : Soit F une homotopie entre f et $\tilde{1}$. $L := [0, 1] \times K$ est compact, donc $\varepsilon := \inf_L |F|$ est strictement positif. \mathbb{R}^2 est de dimension finie, donc toutes les normes y sont équivalentes. Munissons-nous de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. F est continue sur L , compact, donc est uniformément continue d'après le théorème de Heine : $\exists \eta > 0, \forall(x, y) \in L^2, \|x - y\|_\infty \leq \eta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$. On pose $n := \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor + 1$. Alors : $\forall x \in K, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \|(\frac{k}{n}, x) - (\frac{k+1}{n}, x)\|_\infty \leq \eta$, donc $|F(\frac{k}{n}, x) - F(\frac{k+1}{n}, x)| \leq \varepsilon \leq |F(\frac{k+1}{n}, x)|$ (par définition de ε). On pose $F_k(x) = F(\frac{k}{n}, x)$. Alors : F_k est continue sur K et : $\forall x \in K, |\frac{F_k(x)}{F_{k+1}(x)} - 1| < 1$. La fonction \log est continue sur le disque ouvert $D(1, 1)$

, donc les fonctions $\log(\frac{F_k}{F_{k+1}})$ sont continues sur K . On pose $g := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{F_{k+1}}$. Alors g est continue sur K et

$e^g = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{F_{k+1}} = \frac{F_0}{F_n} = f$. D'où f admet un log continu.

Corollaire 4

Si K est un compact convexe de \mathbb{R}^n , alors toute application continue de K dans \mathbb{C}^* admet un logarithme continu.

Démonstration

Découle du théorème de Borsuk et le théorème de Tietze-Urysohn.

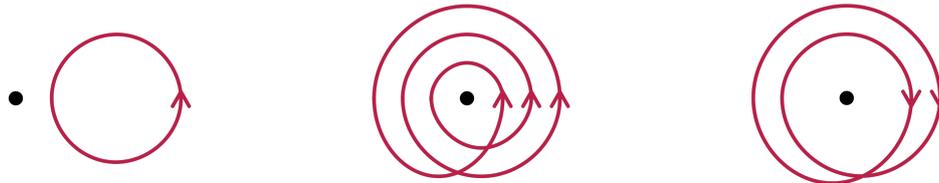
5 Indice d'un lacet par rapport à un point

Définition 8

Soit $p \in \mathbb{C}$. Si γ est un lacet dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, l'indice de γ par rapport au point p est le nombre $I(\gamma, p)$ défini par

$$I(\gamma, p) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-p}$$

Intuitivement, l'indice d'un point par rapport à un lacet est le nombre de tours (dans le sens trigonométrique) que fait un objet qui se promène le long du lacet. Si l'objet réalise un tour dans le sens trigonométrique on ajoute 1. Sinon, on retranche 1. Une courbe qui ne tourne pas autour du point a un indice de 0. Voici des exemples de points et lacets :



L'indice autour du point fixé vaut respectivement 0, 3 et -2.

Lemme 8

Si K est un compact de \mathbb{C} , alors $\mathbb{C} \setminus K$ possède exactement une composante connexe non bornée.

Démonstration

Puisque K est compact, il est borné et on peut donc l'inclure dans un disque D . $A = \mathbb{C} \setminus D$ est connexe et est donc contenu dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, clairement non bornée. Quant aux autres composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$, elles sont contenues dans $\mathbb{C} \setminus A = D$, et sont donc bornées.

Théorème 5

L'indice possède les propriétés suivantes :

1. $I(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$.
2. La fonction $p \mapsto I(p, \gamma)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ et constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.
3. $I(p, \gamma)$ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.

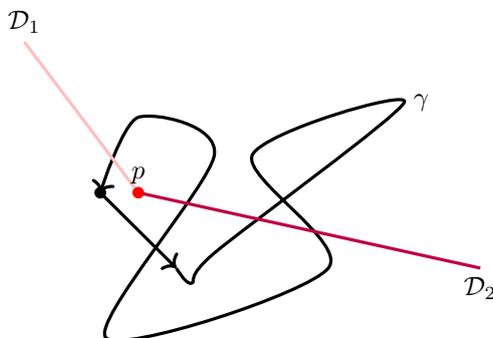
5.1 Calcul de l'indice

Pour calculer l'indice, on peut se ramener à la définition, mais cela peut mener à des calculs fastidieux. La proposition qui suit donne un moyen empirique pour le calculer.

Proposition 3

Soit $p \in \mathbb{C}$ et soit γ un chemin dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. On suppose qu'il existe une demi-droite \mathcal{D} d'origine p telle que $E = \gamma^{-1}(\mathcal{D})$ est fini et que γ traverse \mathcal{D} en tout point de E . Notons n^+ le nombre de points de E où γ traverse positivement \mathcal{D} , et n^- le nombre de points où γ traverse négativement \mathcal{D} . Alors $I(\gamma, p) = n^+ - n^-$.

Exemple



On considère le chemin tracé en noir ci-dessus, et les deux droites partant de p . \mathcal{D}_1 rencontre une fois γ et γ traverse positivement \mathcal{D}_1 . On conclut que $I(\gamma, p) = 1$.

De même avec \mathcal{D}_2 . \mathcal{D}_2 rencontre γ 3 fois. Chronologiquement, γ traverse \mathcal{D}_2 positivement, puis négativement, puis positivement. Ainsi $I(\gamma, p) = 1 - 1 + 1 = 1$. On retrouve, heureusement, le même résultat. L'exemple avec \mathcal{D}_2 n'a vocation qu'à illustrer la proposition.

5.2 Résultats sur l'indice

Proposition 4

Soient $p \in \mathbb{C}$ et γ_0, γ_1 deux lacets $[a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$. Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ alors

$$I(\gamma_0, p) = I(\gamma_1, p)$$

Ce résultat découle de l'invariance de l'intégrale sur un chemin par homotopie.

Proposition 5

L'application $\gamma \mapsto I(\gamma, 0)$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*)$ sur \mathbb{Z} , dont le noyau est exactement l'ensemble des lacets homotopes à un lacet constant.

Démonstration

Notons

$$\begin{aligned} I_0 : \mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \gamma &\longmapsto I(\gamma, 0) \end{aligned}$$

En désignant par $\tilde{1}$ le lacet constant ($t \mapsto 1$), il est immédiat que $I_0(\tilde{1}) = 0$. D'autre part, si γ_1 et γ_2 sont deux lacets dans \mathbb{C}^* paramétrés par $J = [a, b]$ et si l_i (par la proposition 2) est une détermination du logarithme continue le long de γ_i ($i = 1, 2$), alors $l_1 + l_2$ est une détermination continue du logarithme le long de $\gamma_1 \gamma_2$ (Il suffit d'appliquer la définition et la propriété de morphisme de $\exp(\cdot)$). On a donc

$$I_0(\gamma_1 \gamma_2) = (l_1 + l_2)(b) - (l_1 + l_2)(a) = (l_1(b) - l_1(a)) + (l_2(b) - l_2(a)) = I_0(\gamma_1) + I_0(\gamma_2)$$

Ainsi I_0 est un homomorphisme de groupe. Cet homomorphisme est surjectif, car pour γ définie par

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{2i\pi t/(b-a)} \end{aligned}$$

(c'est à dire que γ est le cercle unité), on a $I_0 = 1$ qui engendre \mathbb{Z} .

D'après la proposition précédente et le début de la démonstration, les lacets homotopes à des lacets constants sont dans le noyau de I_0 . Réciproquement, si $\gamma \in \text{Ker}(I_0)$ et si l est une détermination continue du logarithme le long de γ , alors $0 = I_0 = l(b) - l(a)$ et donc $l(a) = l(b)$. En posant

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (s, t) &\longmapsto e^{sl(a) + (1-s)l(t)} \end{aligned}$$

on obtient une homotopie dans \mathbb{C}^* entre γ et le lacet constant $t \mapsto \gamma(a)$.

On peut alors obtenir une réciproque de la proposition 4.

Proposition 6

Soit $p \in \mathbb{C}$ et γ_0, γ_1 deux lacets dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ tel que $I(\gamma_0, p) = I(\gamma_1, p)$, alors γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$

Démonstration

Si $I(\gamma_0, p) = I(\gamma_1, p)$, alors, d'après la proposition 5, le lacet $\gamma = \frac{\gamma_0 - p}{\gamma_1 - p}$ est homotope dans \mathbb{C}^* à un lacet constant, donc homotope au lacet constant $\tilde{1}$ car \mathbb{C}^* est connexe par arcs. Si H est une homotopie dans \mathbb{C}^* entre γ et le lacet $\tilde{1}$, alors l'application $(s, t) \mapsto p + (\gamma_1(t) - p)H(s, t)$ est une homotopie dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ entre γ_0 et γ_1 .

Proposition 7

Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Pour une application continue $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$, il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. f admet un logarithme continu.
2. Pour tout lacet γ dans X , $I(f \circ \gamma, 0) = 0$.

6 Le théorème de Jordan

Dans cette section, la lettre K désignera toujours un compact de \mathbb{C} .

6.1 Résultats préliminaires

Proposition 8

Si \mathcal{O} est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, alors $\partial\mathcal{O} \subset K$

Démonstration

Soit \mathcal{O} une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. On sait que si A est une partie de $\mathbb{C} \setminus K$ tel que $\mathcal{O} \subset A \subset \bar{\mathcal{O}}$, alors A est connexe. Supposons par l'absurde que $\partial\mathcal{O}$ n'est pas inclus dans K : il existe $w \in \partial\mathcal{O}$ tel que $w \notin K$. On pose $A = \mathcal{O} \cup \{w\}$. Alors $\mathcal{O} \subset A \subset \bar{\mathcal{O}}$, donc A est connexe, or A contient strictement \mathcal{O} et \mathcal{O} est une composante connexe. D'où la contradiction.

Notations

- On note $\mathcal{G}(K)$ le groupe multiplicatif des fonctions continues $f : K \rightarrow \mathbb{C}^*$
- On note $\mathcal{E}(K)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}(K)$ constitué par les fonctions admettant un *logarithme continu*.
- On note $\mathbf{G}(K)$ le groupe quotient $\mathcal{G}(K)/\mathcal{E}(K)$

Remarque

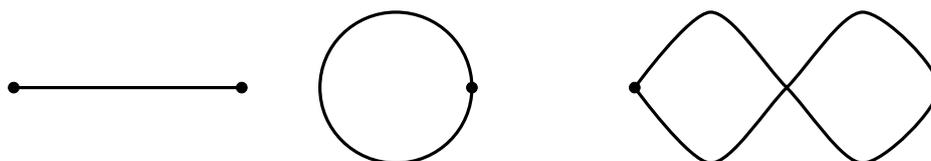
Notons que si K_1 et K_2 sont deux compacts homéomorphes, alors les groupes $\mathbf{G}(K_1)$ et $\mathbf{G}(K_2)$ sont isomorphes : en effet, si θ est un homéomorphisme de K_2 sur K_1 , alors l'application $f \mapsto f \circ \theta$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}(K_1)$ sur $\mathcal{G}(K_2)$ qui envoie $\mathcal{E}(K_1)$ sur $\mathcal{E}(K_2)$, et définit donc un isomorphisme de $\mathbf{G}(K_1)$ sur $\mathbf{G}(K_2)$ par passage au quotient.

Objectif

On va montrer que le groupe $\mathbf{G}(K)$ est entièrement déterminé par le nombre de composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ et inversement.

Par la remarque ci-dessus, si K_1 et K_2 sont deux compacts de \mathbb{C} homéomorphes, alors $\mathbb{C} \setminus K_1$ et $\mathbb{C} \setminus K_2$ ont le même nombre de composantes connexes.

La structure topologique "interne" d'un compact $K \subset \mathbb{C}$ influe donc sur celle de son complémentaire. C'est ce qu'on peut sentir en dessinant différentes figures dans le plan complexe :



On "sent" que respectivement, le complémentaire de notre tracé possède 1, 2 et 3 composantes connexes. Cela est dû à la nature différente des compacts tracés : le premier est un chemin simple non fermé, le deuxième une courbe de Jordan, et le troisième un lacet non injectif.

On va s'intéresser au cas particulier où K est une **courbe de Jordan**, autrement dit lorsque K est homéomorphe à un cercle. On va montrer que lorsque c'est le cas, $\mathbb{C} \setminus K$ a exactement deux composantes connexes. Ce résultat constitue le **théorème de Jordan**.

Définition 9

Pour $p \in \mathbb{C} \setminus K$, on notera f_p la fonction de $\mathcal{G}(K)$ définie par $f_p(z) = z - p$

Les f_p sont bien des éléments de $\mathcal{G}(K)$, puisque que définies telle qu'elles, elles s'annulent qu'en $p \notin K$ par définition. Autrement dit f_p ne s'annule pas sur K .

Lemme 9

Soit $\gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de Jordan paramétrée par un lacet γ . Pour $f \in \mathcal{G}(\Gamma)$, posons $I_\gamma = I(f \circ \gamma, 0)$. Alors $I_\gamma : \mathcal{G}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme surjectif, de noyau $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Démonstration

Notons J l'intervalle de définition de γ , et $\mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*)$ le groupe multiplicatif constitué par les lacets de J dans \mathbb{C}^* . On a déjà vu que l'application quotient $\hat{\gamma}$ associée à γ est un homéomorphisme de \mathcal{C} sur γ . (donc inversible, d'inverse continue).

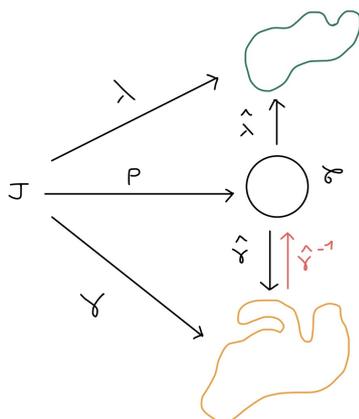
l'application

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{G}(K) &\longrightarrow \mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*) \\ f &\longmapsto f \circ \gamma \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{G}(\Gamma)$ sur $\mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*)$. C'est clairement un morphisme. Montrons que ξ est bijective. On peut expliciter son inverse :

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{L}(J, \mathbb{C}^*) &\longrightarrow \mathcal{G}(K) \\ \lambda &\longmapsto \hat{\lambda} \circ \hat{\gamma}^{-1} \end{aligned}$$

où $\hat{\gamma}$ est l'application quotient associée à γ . On peut vérifier en composant que elle sont bien inverse l'une de l'autre. Θ n'est pas sortie du chapeau, on la retrouve en dessinant le diagramme suivant :



Pour appliquer λ , on peut passer par le chemin du bas puis remonter.

De plus deux fonctions $f_0, f_1 \in \mathcal{G}(\Gamma)$ sont homotopes dans \mathbb{C}^* si et seulement si les lacets $f_0 \circ \gamma$ et $f_1 \circ \gamma$ le sont. D'après la proposition 5, on en déduit que I_γ est un homomorphisme surjectif, et que $\text{Ker}(I_\gamma)$ est l'ensemble des fonctions f homotopes dans \mathbb{C}^* à la fonction $\mathbf{1}$, c'est-à-dire précisément $\mathcal{E}(\Gamma)$ d'après le théorème de Borsuk.

Corollaire 5

Si Γ est une courbe de Jordan, alors $\mathbf{G}(\Gamma)$ est isomorphe à \mathbb{Z} .

Démonstration

Il s'agit d'une application directe d'un théorème d'isomorphisme :

Premier théorème d'isomorphisme – Soient G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Alors f induit un isomorphisme de $G/\text{Ker } f$ vers $f(G)$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & & \uparrow \\ G/\text{Ker } f & \xrightarrow{\tilde{f}} & f(G) \end{array}$$

Corollaire 6

Si V est un disque ou un rectangle de centre p , alors $\mathcal{G}(\partial V)$ est engendré par $\mathcal{E}(\partial V)$ et la fonction f_p

Démonstration

On a $\mathbf{I}_{\partial V}(f_p) = \mathbf{I}(\partial V, p) = 1$, donc $\mathbf{I}_{\partial V}(f_p)$ engendre $\text{Im}(\mathbf{I}_{\partial V}) = \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\mathcal{G}(\partial V)$ est engendré par f_p et $\text{Ker}(\mathbf{I}_{\partial V}) = \mathcal{E}(\partial V)$.

Proposition 9

Si p et q sont deux points d'une même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, alors $f_p/f_q \in \mathcal{E}(K)$.
Si p est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, alors $f_p \in \mathcal{E}(K)$.

Démonstration

Soient p et q deux points d'une même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$: il existe un chemin continu γ reliant p et q dans $\mathbb{C} \setminus K$. L'application

$$H : [0, 1] \times K \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (t, z) \longmapsto f_{\gamma(t)}(z)$$

est continue, $F(0, \cdot) = f_p$ et $F(1, \cdot) = f_q$, donc f_p et f_q sont homotopes dans \mathbb{C}^* . Ainsi, d'après la proposition 1, $\frac{f_p}{f_q}$ est homotope à $\tilde{1}$. Ainsi, d'après le théorème de Borsuk, $\frac{f_p}{f_q} \in \mathcal{E}(K)$.

On suppose maintenant que p est dans la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. K est compact, donc fermé borné : on peut inclure K dans un disque ouvert centré en 0, disons D . Soit $p_0 \notin \bar{D}$: p_0 appartient à la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, donc d'après ce qui précède, $\frac{f_p}{f_{p_0}} \in \mathcal{E}(K)$.

Montrons à présent que $f_{p_0} \in \mathcal{E}(K)$. On considère

$$F : [0, 1] \times K \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (t, z) \longmapsto tz - p_0$$

F est bien à valeurs dans \mathbb{C}^* (puisque $t \in [0, 1]$, $tz \in D$ pour tout z dans K , et comme $p_0 \notin \bar{D}$, $tz - p_0$ ne s'annule jamais), continue, $F(0, \cdot) = -p_0$ et $F(1, \cdot) = f_{p_0}$. Ainsi, la fonction f_{p_0} est homotope dans \mathbb{C}^* à la fonction constante égale à $-p_0$, elle-même homotope à $\tilde{1}$. Ainsi, par transitivité de la relation d'homotopie, f_{p_0} est homotope à $\tilde{1}$, donc est dans $\mathcal{E}(K)$ d'après Borsuk. Ainsi, on a : $f_p = f_{p_0} \times \frac{f_p}{f_{p_0}} \in \mathcal{E}(K)$.

Lemme 10

Soient O_1, \dots, O_k des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$ deux à deux distinctes, et choisissons pour chaque i un point $p_i \in O_i$.

Si n_1, \dots, n_k sont des entiers non tous nuls, alors $f = \prod f_{p_i}^{n_i} \notin \mathcal{E}(K)$

Démonstration

Supposons par l'absurde que $f \in \mathcal{E}(K)$: d'après le théorème de Borsuk, f possède une extension continue $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Montrons : $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, n_i = 0$. Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. O_i est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, donc sa frontière, ∂O_i , est contenue dans K (voir proposition). Pour tout $j \neq i$, on a donc $p_j \notin \partial O_i$, et $p_j \notin O_i$, donc $p_j \notin \overline{O_i}$. La fonction

$$G_i : \overline{O_i} \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \prod_{j \neq i} (z - p_j)^{n_j}$$

est donc bien définie et ne s'annule pas sur $\overline{O_i}$. Posons :

$$F_i : \overline{O_i} \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \frac{\tilde{f}}{G_i(z)}$$

F_i est une fonction continue sur $\overline{O_i}$, et : $\forall z \in \partial O_i, F_i(z) = \frac{\tilde{f}}{G_i(z)} = \frac{f(z)}{G_i(z)} = f_{p_i}^{n_i}(z)$, puisque $\tilde{f} = f$ sur $K \supset \partial O_i$ puis par simplification de terme.

Soit maintenant D un disque ouvert de \mathbb{C} contenant $\overline{O_i}$. Soit

$$H_i : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \begin{cases} F_i(z) & \text{si } z \in \overline{O_i} \\ (z - p_i)^{n_i} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors H_i est une fonction continue (raccord par continuité sur ∂O_i) sur \overline{D} . Or \overline{D} est un convexe, par le corollaire 4, H_i admet un logarithme continu. Ainsi, d'après la proposition 7, pour tout lacet γ dans \overline{D} , $I(H_i \circ \gamma, 0) = 0$. En particulier, ∂D étant un lacet dans \overline{D} , on obtient $I(H_i \circ \partial D, 0) = 0$.

D'une autre part, soit γ un chemin de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} paramétrant ∂D . Alors $H_i \circ \gamma$ est un chemin paramétrant $H_i \circ \partial D$. Ainsi

$$\begin{aligned} I(H_i \circ \partial D, 0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{H_i \circ \partial D} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{[0,1]} \frac{1}{H_i(\gamma(t))} (H_i \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{[0,1]} \frac{1}{(\gamma(t) - p_i)^{n_i}} n_i \gamma'(t) (\gamma(t) - p_i)^{n_i - 1} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{[0,1]} \frac{1}{\gamma(t) - p_i} n_i \gamma'(t) dt = \int_{\partial D} \frac{1}{z - p_i} dz \\ &= n_i \underbrace{I(\partial D, p_i)}_{=1 \text{ car } p_i \in D} = n_i. \end{aligned}$$

Ainsi, $n_i = 0$, d'où la contradiction.

Lemme 11

Notons $(O_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$, et choisissons pour chaque i un point $p_i \in O_i$. Alors $\mathcal{G}(K)$ est engendré par $\mathcal{E}(K)$ et les fonctions f_{p_i} .

Démonstration

D'après la proposition 7, il suffit de montrer que $\mathcal{G}(K)$ est engendré par $\mathcal{E}(K)$ et les f_q pour $q \in \mathbb{C} \setminus K$. En effet :

- Si q appartient à la composante connexe non bornée, alors $f_q \in \mathcal{E}(K)$
- Sinon q appartient à une certaine composante connexe bornée O_i associée au point p_i et $f_{p_i}/f_q \in \mathcal{E}(K)$. De fait $f_q = f_{p_i} \times \underbrace{f_q/f_{p_i}}_{\in \mathcal{E}(K)}$

Donc les f_q sont engendrés par les f_{p_i} et les $\mathcal{E}(K)$.

Ainsi il s'agit de montrer que pour tout $f \in \mathcal{G}(K)$ il existe $g \in \mathcal{E}(K)$ et $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{C} \setminus K$ et des entiers m_1, \dots, m_l tel que :

$$f = g \prod f_{q_i}^{m_i}$$

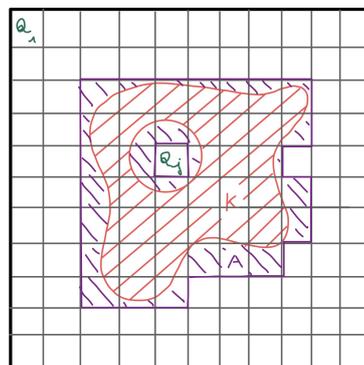
ou encore

$$\frac{f}{\prod f_{q_i}^{m_i}} \in \mathcal{E}(K)$$

Comme K est compact, il est borné et donc contenu dans un certain carré Q . Sans perte de généralité, on peut supposer $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace les droites $\{x = k/n\}$ et $\{y = k/n\}$ de sorte à subdiviser Q en n^2 sous carré fermé de côté $1/n$.

On dénote par Q_1, \dots, Q_l les carrés qui ne rencontrent pas K . On note A la réunion des autres. On a donc $K \subset A$ et $d(z, K) \leq \sqrt{2}/n \quad \forall z \in A$ (majoration par longueur de la diagonale d'un carré de côté $1/n$).



Fixons maintenant : $f : K \rightarrow \mathbb{C}^*$ continue. D'après Tietze, f admet un prolongement continu $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid F(z) \neq 0\}$ est ouvert (complémentaire du noyau qui lui est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue). De plus cet ensemble contient K car f est non nulle sur K par définition. On choisit alors n assez grand pour que F ne s'annule pas sur A . C'est en effet possible puisque F est continue et non nulle sur un ouvert contenant K , ainsi il existe un voisinage de K tel que F ne s'annule pas dessus, pour n assez grand (donc en diminuant la taille des carrés) on peut inclure A dans ce voisinage.

Ainsi f admet une extension continue $F_0 : A \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Par définition de A et des Q_j , $Q_1 \cap A$ est réunion (éventuellement vide) d'un certain nombre de côtés de Q_1 . Puisque \mathbb{C}^* est connexe par arcs, il existe $g_1 : \partial Q_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ continue qui coïncide avec F_0 sur $Q_1 \cap A$ (en mettant F_0 sur $Q_1 \cap A$ et en raccordant les autres coins du carré par connexité par exemple).

Si on note q_1 le centre de Q_1 , alors par le corollaire 5 appliqué à $V = Q_1$ et par le Théorème de Borsuk, il existe un entier m_1 tel que :

$$\xi : \partial Q_1 \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \frac{g_1(z)}{(z - q_1)^{m_1}}$$

admette un prolongement continu $G_1 : Q_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$.

On définit alors une application continue

$$F_1 : Q_1 \cup A \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \begin{cases} G_1(z) & \text{si } z \in Q_1 \\ \frac{F_0(z)}{(z - q_1)^{m_1}} & \text{si } z \in A \end{cases}$$

F_1 est bien continue par raccord par continuité sur la frontière de Q_1 . On a donc trouvé q_1 et m_1 tels que $f/f_{q_1}^{m_1}$ admette un prolongement continu $F_1 : A \cup Q_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$.

À partir de là on réitère le processus (récurrence), avec $f/f_{q_1}^{m_1}$ à la place de f et $A \cup Q_1$ à la place de A .

À la fin, on obtient $((((A \cup Q_1) \cup Q_2) \dots)) \cup Q_l = Q$ et

$$F_l : Q \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \frac{f(z)}{\prod f_{q_j}^{m_j}}$$

continue. Comme Q est convexe (conséquence du théorème de Borsuk) : $F_l \in \mathcal{E}(K)$

Théorème 6

Le groupe $\mathbf{G}(K) = \mathcal{G}(K)/\mathcal{E}(K)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^N , où N est le nombre (fini ou infini) de composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$.

Démonstration

Comme \mathbb{C} est à base dénombrable d'ouverts (prendre par exemple l'ensemble $\{B(z, r), \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}_+\}$), la famille des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ est au plus dénombrable. Notons $(O_i)_{0 \leq i < N}$ la famille des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$, et choisissons pour tout i un point $p_i \in O_i$. Notons π le morphisme canonique de $\mathcal{G}(K)$ sur $\mathbf{G}(K)$. Posons :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^N & \longrightarrow & \mathbf{G}(K) \\ n = (n_i)_{0 \leq i < N} & \mapsto & \prod_i \pi(f_{p_i})^{n_i} \end{array}$$

- ϕ est un homomorphisme de \mathbb{Z}^N dans $\mathbf{G}(K)$ (clair).
- ϕ est injectif : Soit $n = (n_i)_{0 \leq i < N}$. d'après le lemme 10, si au moins un des n_i est non nul $f = \prod f_{p_i}^{n_i} \notin \mathcal{E}(K)$ et donc $\phi(n) = \pi(f) \neq 0_{\mathbf{G}(K)}$. Ainsi $\operatorname{Ker}(\phi) = \{0\}$, d'où l'injectivité.
- ϕ est surjectif : soit $F \in \mathbf{G}(K)$. L'application π étant surjective, il existe $f \in \mathcal{G}(K)$ tel que $\pi(f) = F$. D'après le lemme 6.4.8, $\mathcal{G}(K)$ est engendré par $\mathcal{E}(K)$ et les fonctions f_{p_i} : il existe $g \in \mathcal{E}(K)$ et $n = (n_i)_{0 \leq i < N} \in \mathbb{Z}^N$ tel que $f = g \prod_i f_{p_i}^{n_i}$. Ainsi : $F = \pi(f) = \pi(g) \pi(\prod_i f_{p_i}^{n_i}) = \prod_i \pi(f_{p_i})^{n_i} = \phi(n)$.

On en déduit ainsi que $\mathbf{G}(K)$ et \mathbb{Z}^N sont isomorphes.

Corollaire 7

Si K_1 et K_2 sont deux compacts de \mathbb{C} homéomorphes, alors $\mathbb{C} \setminus K_1$ et $\mathbb{C} \setminus K_2$ ont le même nombre de composantes connexes.

Démonstration

Si K_1 et K_2 sont homéomorphes, alors les groupes $\mathbf{G}(K_1)$ et $\mathbf{G}(K_2)$ sont isomorphes. Il suffit donc de montrer que \mathbb{Z}^{N_1} et \mathbb{Z}^{N_2} ne sont isomorphes que si $N_1 = N_2$. Appelons *pseudo-dimension* d'un groupe abélien G le cardinal maximum (fini ou infini) d'une famille \mathbb{Z} -indépendante d'éléments de G . Pour tout $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la pseudo-dimension du groupe \mathbb{Z}^N est égale à N . En effet, une famille d'éléments de \mathbb{Z}^N est \mathbb{Z} -indépendante si et seulement si elle est libre dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Q}^N . La pseudo-dimension de \mathbb{Z}^N est donc au plus égale à $\dim(\mathbb{Q}^N) = N$, et elle est d'autre part au moins égale à N car \mathbb{Z}^N contient la « base canonique » de \mathbb{Q}^N . Comme deux groupes isomorphes ont évidemment la même pseudo-dimension, on en déduit que \mathbb{Z}^{N_1} et \mathbb{Z}^{N_2} ne sont pas isomorphes si $N_1 \neq N_2$.

6.2 Preuve du théorème de Jordan

Lemme 12

L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ possède exactement deux composantes connexes.

Théorème 7 (théorème de Jordan)

Soit Γ une courbe de Jordan fermée dans \mathbb{C} . Alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée et l'autre non.

Démonstration

D'après le **corollaire 1**, Γ est homéomorphe à \mathcal{C} . Ainsi, d'après le **corollaire 7**, $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ ont le même nombre de composantes connexes. Or, d'après le **lemme 12**, $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ possède exactement deux composantes connexes. D'où $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ possède également deux composantes connexes. D'après le **lemme 8**, il y a exactement une composante connexe non bornée, la seconde est donc bornée.

Références

- [1] Éric Amar, Étienne Matheron. *Analyse Complexe*. Édition Cassini, 2004
- [2] Hervé Queffélec. *Topologie*. 6^e édition DUNOD, 2020