Formes Linéaires et Hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

Stéphane RIVAUD

7 novembre 2012

On notera $\mathbb{K}$ un corps, et E un espace vectoriel de dimension finie n.

1 Définitions et première propriétés

Définition 1.1. *Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On appelle dual de E l'ensemble des formes linéaires sur E, que l'on note E^*.*

Exemple :
- Dans $L^1(0,1)$, l'application $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire.
- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en a, alors df_a est une forme linéaire.

Notation : Pour $x \in E$, et $\varphi \in E^*$, on note $\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x)$. On appelle $\langle ., . \rangle$ le crochet de dualité.

Définition 1.2. *Un hyperplan H de E est sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.*

Proposition 1.1.
1. *Soit $\varphi \in E^*$ non nulle, alors $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.*
2. *Soit H un hyperplan de E, alors il existe $\varphi \in E^*$ telle que $H = \ker(\varphi)$. De plus pour tout $\psi \in E^*$:*

$$Ker(\psi) = H \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},\ \psi = \lambda\varphi$$

Corollaire 1.1 (Equation d'un hyperplan)**.**

1. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, alors l'ensemble des x appartenant à E vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \quad (*)$$

relativement à la base $\mathcal{B}$ est un hyperplan.

2. *Tout hyperplan de E admet une équation de la forme $(*)$ qui est unique à constante multiplicative non nulle près.*

2 Dualité

Définition 2.1 (Base duale)**.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On définie la famille de forme linéaire $\mathcal{B}^*(e_1^*, ..., e_n^*)$ par :*

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

La famille $\mathcal{B}^*$ forme une base de E appelée base duale de $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}$ est la base antéduale de $\mathcal{B}^*$.

Remarque : Soit $(e_1^*, ..., e_n^*)$ une base de E^*, alors il y a bien une unique base antéduale. En effet, si $(e_1, ..., e_n)$ et $(e_1', ..., e_n')$ sont deux bases antéduale, on a $\langle e_i^*, e_j - e_j' \rangle = 0$ pour tout i, j. Donc par linéarité, pour tout j, $e_j - e_j'$ annule toute forme linéaire sur E : c'est donc le vecteur nul. Ce qui permet d'écrire la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Le choix d'une base $\mathcal{B}$ permet de définir un isomorphisme entre E et E^* :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i^*$$

Remarque : Dans le cas euclidien, on retrouve cet isomorphisme avec le théorème de représentation de Riesz.

Définition 2.2 (Bidual)**.** *On appelle bidual de E l'ensemble des formes linéaires sur E^*, que l'on note E^{**}.*

Remarque : Soit $x \in E$, alors l'application $\varphi \mapsto \varphi(x)$ est une forme linéaire sur E^*.

Théorème 2.1. *L'application*

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & (\varphi \mapsto \varphi(x)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Remarque :
- J ne dépend pas du choix d'une base. E s'identifie donc canoniquement avec E^*.
- En dimension infinie, J est toujours injectif.

3 Orthogonalité

3.1 Par dualité

Définition 3.1. *un vecteur $x \in E$ et une forme linéaire $\varphi \in E^*$ sont dit orthogonaux si : $\langle \varphi, x \rangle = 0$*

Définition 3.2. *Soit $F \subset E$ une partie de E. On appelle orthogonal de F l'ensemble $F^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F,\ \varphi(x) = 0\}$*

Remarque : Attention, $\underline{\underline{F^\perp \subset E^*}}$

Proposition 3.1. *1.* $A_1 \subset A_2 \subset E \Longrightarrow A_2^\perp \subset A_1^\perp \subset E^*$

2. $F^\perp = (Vect(F))^\perp$ *et* $F^\perp$ *est un sev de* E*.*

3. Si F est un sev de E, alors $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ *de plus,* $(F^\perp)^\perp$

Remarque : Cette dernière égalité se fait via l'isomorphisme J.

Corollaire 3.1. *1. Soit $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de E^* de rang r, alors*

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$$

est un sev de dimension $n-r$.

2. Réciproquement, si F et un sev de E de dimension q, alors il existe $n-q$ hyperplans $H_i = \ker(\varphi_i)$ tels que :
- *$(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille libre.*
- *$F = \bigcap_{i=1}^{n-q} Ker(\varphi_i)$*

Interprétation : le sev F peut être vu comme l'ensemble des solutions d'un système de $n-q$ équations à n inconnues, ou comme l'intersection de $n-q$ hyperplans.

Application : Interpolation de Lagrange
Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$ distincts. On définit $(\varphi_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \langle \varphi, P\rangle = P(a_i)$$

La famille $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de E^* dont la base antéduale est formée des polynomes de Lagrange :

$$L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$

On a donc pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i(X)$$

3.2 Le cas euclidien

On munie E du produit scalaire usuel que l'on note $\langle ., .\rangle$.

Théorème 3.1 (de représentation de Riesz)**.** *Soit $\varphi \in E^*$, alors il existe un unique $x \in E$ tel que :*

$$\forall y \in E,\ \varphi(y) = \langle x, y\rangle$$

Remarque : Grâce à ce théorème on peut faire coïncider la notion d'orthogonalité euclidienne et celle introduite précédemment via le dual. On dit que x et y sont orthogonaux si y est orthogonal à la forme linéaire $\langle x, . \rangle$. De plus on comprend d'où vient la notation du crochet de dualité.

Définition 3.3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\sigma_{|F} = \mathrm{Id}$ et $\sigma_{|F^\perp} = -\mathrm{Id}$.*

- *si $\dim(F) = n-1$ alors on dit que σ est une réflexion par rapport à F.*
- *si $\dim(F) = n-2$ alors on dit que σ est une réflexion par rapport à F.*
- *dans le cas général, on dit que σ est une symétrie orthogonale par rapport à F.*

Théorème 3.2 (Cartan-Dieudonné)**.**

1. *Les réflexions engendrent $O(E)$: si $\dim(E) \geqslant 2$, toute application de $O(E)$, s'écrit comme un produit de moins de n réflexions.*
2. *Les retournements engendrent $SO(E)$: si $\dim(E) \geqslant 3$, toute application de $SO(E)$ s'écrit comme un produit de moins de n retournement.*

Démonstration. Développement.

□

4 Transposée d'une application

Définition 4.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit ${}^t f \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$ par :*

$$\forall \varphi \in F^*,\ {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Proposition 4.1. *Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, alors :*

$$\forall x \in E,\ \forall \varphi \in F^*, \quad \langle {}^t f(\varphi), x \rangle = \langle \varphi, f(x) \rangle$$

Remarque : Soit $(e_1, ..., e_q)$ une base de E, $(e_1^*, ..., e_q^*)$ sa base duale, $(f_1, ..., f_p)$ une base de F et $(f_1^*, ..., f_p^*)$ sa base duale. Si on applique cette proposition en prenant $x = e_j$ et $\varphi = f_i^*$, on obtient que la matrice de l'application ${}^t f$ dans les bases $(f_1^*, ..., f_p^*)$ et $(e_1^*, ..., e_p^*)$ est la transposée de la matrice de f dans les bases $(e_1, ..., e_q)$ et $(f_1, ..., f_p)$.

Corollaire 4.1. *1. L'application qui à f associe ${}^tf$ est linéaire.*

2. On a ${}^t({}^tf) = f$.

3. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ alors ${}^t(v \circ f) = {}^tf \circ^t v$.

Proposition 4.2. *On a $\mathrm{Im}({}^tu) = \ker(u)^\perp$ et $\ker({}^tu) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.*

Proposition 4.3. *Un sev F est stable pas u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^tu$.*

Corollaire 4.2. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si F est un sev de E u-cyclique, i.e. $\exists x \in F,\ F = \{P(u)(x); P \in \mathcal{K}_n[X]\}$*
alors F possède un supplémentaire stable par u.

Application : existence des invariants de similitudes d'un endomorphisme

5 Convexité et hyperplan

5.1 Résultats de séparation

Définition 5.1. *Soit A une partie de E. On dit que A est convexe si :*

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in]0,1[,\ tx + (1-t)y \in A$$

Théorème 5.1 (Hahn-Banach)**.** *Soit A un ouvert convexe non vide et F un sev de E tel que $A \cap F = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan H contenant F vérifiant $A \cap H = \emptyset$.*

Remarque : Les hyperplans sont les seuls sous-espaces permettant de séparer un espace vectoriel en deux composantes connexes C_1 et C_2. On appelle ces deux composantes connexes les demi-espaces délimités par H. Les demi-espaces ouverts (resp. fermés) sont $C_1 \setminus \{H\}$ et $C_2 \setminus \{H\}$ (resp $C_1 \cup \{H\}$ et $C_2 \cup \{H\}$.

Définition 5.2. *Soient A, B des parties de E et H un hyperplan.*

1. *On dit que H sépare A et B si A est contenu dans l'un et B dans l'autre des demi-espaces fermés délimités par H.*
2. *On dit que H sépare A et B strictement si A est contenu dans l'un et B dans l'autre des demi-espaces ouverts délimités par H.*

Théorème 5.2. *Soient A, B des ouverts convexes non vides disjoints.*
- *Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan H qui sépare A et B.*
- *Si A et B sont ouverts, alors il existe un hyperplan H qui sépare A et B strictement.*
- *Si A est compact et B est fermé, alors il existe un hyperplan H qui sépare A et B strictement.*
- *Si A et B sont fermés, alors il existe un hyperplan H qui sépare A et B strictement.*

5.2 Hyperplan d'appui

Dans cette partie, nous mettons en lumière quelques résultats sur les convexes, et en particulier leur frontière, grâce à la notion d'hyperplan d'appui.

Définition 5.3. *Soit $A \subset E$ et $M \in A$. On appelle hyperplan d'appui de A en M un hyperplan qui sépare A et M.*

Proposition 5.1. *Si A est un convexe fermé, tout point de sa frontière appartient à au moins un hyperplan d'appui.*

Théorème 5.3. *Soit A un fermé d'intérieur non vide. Si A possède un hyperplan d'appui en tout point de sa frontière, alors A est convexe.*

Définition 5.4. *Soit A un convexe. Un point $M \in A$ est dit extrémal si :*

$$\forall P, Q \in A,\ \forall t \in]0,1[, \quad A = tP + (1-t)Q \Rightarrow A = P \text{ ou } A = Q$$

On note $\mathcal{E}(A)$ l'ensemble des points extrémaux de A.

Théorème 5.4 (Krein-Milmann)**.** *Soit A un convexe compact non vide, alors A est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux :*

$$A = \text{conv}(\mathcal{E}(A))$$

Bibliographie :

– Jacques Celier : Algèbre linéraire, des bases aux applications
– Henry Roudier : Algèbre Linéaire (explique bien, pas mal d'exos pouvant servir de développement)
– Rémi Goblot : Algèbre Linéaire (quelques exemples, mais c'est tout...)
– MER : Le livre jaune pour le théorème de Cartan-Dieudonné