

Leçon 223-Convergence des suites numériques

Exemples et Applications

Shoenberger Pauline & Lauvergnat Ronan

29 avril 2013

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Définitions et Généralités | 1 |
| 1.1 | Définitions et premières propriétés [1] | 1 |
| 1.2 | Suites adjacentes [1] | 5 |
| 1.3 | Valeurs d'adhérence [2] | 7 |
| 1.4 | Les suites de Cauchy [1] | 12 |
| 1.5 | La limite supérieure et la limite inférieure [2] | 14 |
| 2 | Applications aux fonctions continues | 17 |
| 2.1 | Caractérisation séquentielle [1] | 17 |
| 2.2 | Les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ [1] | 17 |
| 2.3 | Les suites équiréparties [4] | 24 |
| 3 | Comportements asymptotiques | 27 |
| 3.1 | Sommation des équivalents [1] | 27 |
| 3.2 | Formule de Stirling [1] | 31 |
| 3.3 | Moyenne de Cesàro [1] | 34 |
| 3.4 | Méthode d'accélération de Aitken [6] | 36 |
| 3.5 | Un théorème Taubérien [2] | 37 |

1 Définitions et Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés [1]

Définition 1. (Convergence)

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, converge s'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$

$$|u_n - l| \leq \epsilon$$

Dans ce cas l est unique et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, ou simplement $u_n \rightarrow l$.

Sinon on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Démonstration. Montrons que l est bien unique. Soient l et l' deux complexes vers lesquels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Supposons que $l \neq l'$, alors $\epsilon = |l - l'|/2 > 0$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0$

$$|u_n - l| \leq \epsilon/2$$

et $\forall n \geq n_1$

$$|u_n - l'| \leq \epsilon/2$$

Donc $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$

$$0 < |l - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq \epsilon = |l - l'|/2$$

Ce qui est absurde, donc $l = l'$ □

Définition 2. (Divergence vers $\pm\infty$)

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle, diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), si $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$

$$u_n \geq M \quad (\text{resp. } u_n \leq -M)$$

Pour une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on dit qu'elle diverge vers l'infini lorsque la suite réelle de ses modules $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, diverge vers $+\infty$.

Dans ces cas-là la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite divergente (au sens où elle ne converge pas) mais on note toujours $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$).

Définition 3. (Equivalent et négligeable)

• $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et l'on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ s'il existe $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = w_n v_n \quad \text{et} \quad w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

• $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et l'on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ s'il existe $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = w_n v_n \quad \text{et} \quad w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Proposition 4. Pour deux suites réelles, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$$

et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers v alors

$$u \leq v$$

Démonstration. Posons $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_n - u_n \geq 0$ et $w = v - u$
 Supposons que $w < 0$ alors $\epsilon = -w/2 > 0$. et donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \quad |w_n - w| &\leq -w/2 \\ w_n &\leq w/2 < 0 \end{aligned}$$

D'où la contradiction, donc $w \geq 0$. □

Proposition 5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est monotone et bornée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. Montrons-le pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Posons $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ qui existe car la suite est majorée. Soit $\epsilon > 0$, par définition de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$M - \epsilon \leq u_{n_0}$$

Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc

$$\forall n \geq n_0, \quad M - \epsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq M \leq M + \epsilon$$

Et donc,

$$\forall n \geq n_0 \quad |u_n - M| \leq \epsilon$$

□

Corollaire 6. (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers le même réel l et si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n,$$

alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est l .

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \quad & l - \epsilon \leq u_n \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_1 \quad & w_n \leq l + \epsilon \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall n \geq \max(n_1, n_0) \quad l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \epsilon$$

C'est-à-dire,

$$\forall n \geq \max(n_1, n_0), \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$

□

Exemple 7. [5]

$$u_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

Démonstration. Soit $n \geq 2$,

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \quad \binom{n}{k} \geq \binom{n}{1} = n$$

Donc

$$2 \leq 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 2 + \frac{n-1}{n}$$

Ceci nous permet juste d'affirmer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Or elle est également croissante donc par la proposition 5, cette série est convergente. Pour trouver sa limite il faut aller un peu plus loin :

$$\forall k \in \{2, \dots, n-2\} \quad \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \times 2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Donc

$$2 \leq 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

Donc par le théorème des gendarmes,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

□

Exemple 8. [5]

$$u_n := \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{e}$$

Démonstration. Posons

$$v_n = \ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Or

$$\begin{aligned} \forall u > 0 \quad u - \frac{u^2}{2} &\leq \ln(1+u) \leq u \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} &\leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \end{aligned}$$

On rappelle les deux résultats suivants,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n := \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq v_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} =: b_n$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1/2$$

Donc par le théorème des gendarmes, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/2$. Donc (par continuité de la fonction exponentielle),

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{1/2}$$

□

1.2 Suites adjacentes [1]

Définition 9. Deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* si

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
3. $u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Corollaire 10. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont toutes deux convergentes et convergent vers la même limite.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

d'après le troisième point de la définition, la croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la décroissance de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et bornées donc convergent d'après la propriété 5.

Supposons que les limites soient différentes, on note l la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l' celle de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose $\epsilon = \frac{|l-l'|}{4} > 0$ car les limites sont supposées différentes, alors il existe $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_1, \quad |u_n - l| \leq \epsilon,$$

$$\forall n \geq n_2, \quad |v_n - l'| \leq \epsilon,$$

$$\forall n \geq n_3, \quad |u_n - v_n| \leq \epsilon,$$

(car $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$). Alors pour tout $n \geq \max(n_1, n_2, n_3)$ les 3 inégalités sont vérifiées et on a donc

$$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - v_n| + |v_n - l'| \leq 3\epsilon = \frac{3}{4}|l - l'|$$

ce qui est absurde. Les deux suites convergent donc vers la même limite. □

Exemple 11. (Suites arithmético-géométriques)

Les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},$$

et $0 < v_0 < u_0$ sont adjacentes.

Démonstration. Par récurrence immédiate, toutes les valeurs des termes des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement positives.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n$. En effet, pour $n = 0$ c'est l'une des hypothèses. Pour $n \geq 1$,

$$u_n - v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} = \frac{1}{2}(u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} + v_{n-1}) = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2 \geq 0,$$

donc $u_n \geq v_n$.

De plus

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \geq 1 \quad \text{car} \quad u_n \geq v_n,$$

donc $(u_n)_n$ est décroissante et $(v_n)_n$ est croissante. Les deux suites sont *presque* adjacentes, dans le sens où il nous manque encore la propriété 4. Cependant en reprenant la démonstration du corollaire 10, les trois premières propriétés permettent déjà d'affirmer que les deux suites convergent (mais les limites ne sont pas a priori les mêmes), notons donc $l := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $l' = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Alors en passant à la limite sur,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

on obtient

$$l = \frac{l + l'}{2} \quad \iff \quad l = l'.$$

Et donc finalement les deux suites sont bien adjacentes. □

Application 12. (*Critère des séries alternées*)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n \quad \text{converge} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq u_{n+1} \quad \text{où} \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

Démonstration. Comme $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 0, cette suite est positive. On note

$$S_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k u_k$$

la somme partielle de la série étudiée. On a

- $S_{2n+1} = S_{2n} - u_{2n+1} \leq S_{2n}$ car la suite $(u_n)_n$ est positive,
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$ (car $(u_n)_n$ est décroissante) i.e. $(S_{2n+1})_n$ est croissante,
- $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ (car $(u_n)_n$ est décroissante) i.e. $(S_{2n})_n$ est décroissante,
- $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Donc les deux suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite que l'on note S , de plus $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geq N_1 \Rightarrow S_{2n} - S \leq \epsilon \quad \text{et} \quad n \geq N_2 \Rightarrow S - S_{2n+1} \leq \epsilon$$

Donc $\forall n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, $|S_n - S| \leq \epsilon$, i.e. $(S_n)_n$ converge vers S .

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}, \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |R_{2n-1}| = |S - S_{2n-1}| \leq S_{2n} - S_{2n-1} = u_{2n}.$$

On a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}.$$

□

1.3 Valeurs d'adhérence [2]

Définition 13. (Valeur d'adhérence)

Soit a un élément de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (pour les suites réelles, dans le cas de divergence en l'infini on peut préciser le signe, on considère $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). On dit que a est *une valeur d'adhérence* de la suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s'il existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$$

Proposition 14. [1] En posant $X_n = \{u_k, k \geq n\}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence peut alors s'écrire comme suit :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n}$$

Et est donc un fermé.

Démonstration. Soit a une valeur d'adhérence, c'est-à-dire

$$\exists \phi, \text{ tel que } \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad \left| u_{\phi(n)} - a \right| \leq \epsilon$$

Ce qui, traduit en terme de voisinage, donne :

$$\exists \phi, \text{ tel que } \forall V \text{ voisinage de } a, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad u_{\phi(n)} \in V.$$

$$\text{C'est-à-dire} \quad \forall V \text{ voisinage de } a, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad u_{\phi(n)} \in X_n \cap V, \neq \emptyset$$

car ϕ est strictement croissante, donc $u_{\phi(n)} \in X_n$. De plus, $\forall n \leq n_0, \emptyset \neq X_{n_0} \cap V \subset X_n \cap V$. Ce qui précède est donc encore équivalent à :

$$\begin{aligned} & \forall V \text{ voisinage de } a, \forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \cap V \neq \emptyset \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N} \quad a \in \overline{X_n} \\ \iff & a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n} \end{aligned}$$

□

Théorème 15. (Bolzano-Weierstrass) [1]

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge (id est toute suite bornée admet une valeur d'adhérence finie).

Démonstration. Nous allons proposer deux preuves. L'une topologique et l'autre plus pédestre mais plus dans l'ambiance de cette leçon.

Première démonstration

Une généralisation de Bolzano-Weierstrass s'énonce comme suit,

Dans un espace métrique (E, d) toute partie compacte est séquentiellement compacte.

C'est-à-dire, de toute suite à valeurs dans un compact K , on peut extraire une sous suite qui converge dans ce compact.

Lemme. *Soit K un compact. Toute intersection décroissante de fermés (pour la topologie induite sur K) non vides de K est non vide.*

Démonstration. Par l'absurde, soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de K telle que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$$

Par compacité de K ,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \bigcap_{0 \leq n \leq N} F_n = \emptyset.$$

Les F_n sont décroissants donc, $\bigcap_{0 \leq n \leq N} F_n = F_N$, d'où $F_N = \emptyset$ ce qui contredit l'hypothèse non vide des F_n . □

De ce lemme on déduit presque immédiatement le résultat. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans K alors avec la même notation $X_n = \{u_k, k \geq n\}$, la suite $(K \cap \overline{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite décroissante de fermés non vides de K . Donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n} \cap K \neq \emptyset$ donc par la proposition 14, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans K .

Enfin faisons le lien avec l'énoncé initial. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. Il existe $R > 0$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit à valeurs dans la boule fermée $\overline{B(0, R)}$ centrée en 0 de rayon R , qui est un compact de \mathbb{C} . Donc il existe une sous-suite qui tend vers un élément de $\overline{B(0, R)}$ qui sera donc fini. Cette

sous-suite converge donc.

Seconde démonstration

Démontrons d'abord le cas réel.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de \mathbb{R} . Soit a_0 et b_0 deux réels, $a_0 < b_0$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0 \leq u_n \leq b_0$$

Posons $\phi(0) = u_0 \in [a_0; b_0]$ et $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. L'intervalle $[a_0; b_0] = [a_0; c_0] \sqcup [c_0; b_0]$ contient une infinité de terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc deux cas distincts peuvent se présenter.

- Ou bien l'ensemble $[a_0; c_0]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans ce cas nous posons, $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.
- Ou bien l'ensemble $[a_0; c_0]$ contient un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc nécessairement l'ensemble $[c_0; b_0]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans ce cas nous posons $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.

Dans tous les cas,

$$\begin{aligned} a_0 &\leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \\ b_1 - a_1 &= \frac{b_0 - a_0}{2} \end{aligned}$$

et enfin $[a_1; b_1]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $\{u_n, n \geq \phi(0)\}$ est notamment non vide. Posons en conséquence $\phi(1) = \inf\{n \geq \phi(0), u_n \in [a_1; b_1]\}$.

En posant à nouveau $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, nous itérons alors le procédé et construisons par récurrence une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes,

1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
2. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
3. $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et
4. $b_n - a_n \leq \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ et donc par récurrence $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ces deux suites sont donc adjacentes et donc convergent vers un même réel $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n]$.

De plus

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n.$$

Donc par le théorème des gendarmes, la sous suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

NB : Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n]$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$ et donc $x = l$ ce qui correspond à démontrer le théorème des segments emboîtés dans un cas particulier, l'intersection d'une suite décroissante de segments non vides de \mathbb{R} dont le diamètre tend vers 0, est réduite à un point.

Concluons sur ce théorème en le démontrant dans le cas complexe. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de complexes. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \operatorname{Re}(u_n) \quad \text{et} \quad b_n = \operatorname{Im}(u_n).$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **réelle** bornée. Donc par ce qui précède, il existe ϕ telle que $(a_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Puis $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ étant toujours bornée, la suite $(b_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, donc il existe ψ telle que $(b_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. $(a_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite d'une suite convergente donc converge également. Et donc finalement, $(u_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite qui converge. \square

Proposition 16. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence a (toujours dans $\overline{\mathbb{C}}$) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

Démonstration. Premier cas $a < \infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. (Sinon, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists u_{\phi(p)}$ tel que $|u_{\phi(p)}| \geq p$ et donc $u_{\phi(p)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$, c'est-à-dire ∞ est aussi une valeur d'adhérence, contradiction).
Procédons par l'absurde, supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers a . Alors

$$\exists \epsilon > 0, \exists \phi \text{ une extractrice tels que } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{\phi(n)} - a| > \epsilon$$

La sous-suite, $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est). Donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe ψ une extractrice telle que $(u_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, notons b sa limite. Par unicité de la valeur d'adhérence, $a = b$. Donc $(u_{\phi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a ce qui est en contradiction avec $|u_{\phi \circ \psi(n)} - a| > \epsilon$.

Second cas, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle, $a = +\infty$ (le cas $a = -\infty$ se traite de même) alors par l'absurde à nouveau, supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. Dans ce cas il existe un réel M et une sous suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ majorée par M . De plus la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (sinon $-\infty$ est une valeur d'adhérence) et donc $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc converge vers un réel b . Donc b est donc une autre valeur d'adhérence distincte de $+\infty$ d'où la contradiction.

Enfin si la suite est complexe et $a = \infty$, considérons la suite réelle des modules $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. On a l'infini comme valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc $+\infty$ est une valeur d'adhérence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrons que $+\infty$ est même l'unique valeur d'adhérence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

A nouveau par l'absurde, soit b une autre valeur d'adhérence de la suite positive $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La valeur b est donc un réel positif et il existe ϕ une extractrice telle que $(v_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b . La suite extraite des modules est donc bornée et nécessairement il en est de même pour $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi toujours par Bolzano-Weierstrass $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence finie qui est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ce qui contredit l'hypothèse de départ. Finalement la suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme unique valeur d'adhérence et par ce qui précède diverge vers $+\infty$. Donc par définition $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$ \square

Exemple 17. (Valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n \in \mathbb{Z}}$)

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u_n = \sin(n)$$

est exactement le segment $[-1; 1]$.

Démonstration. Il nous faut montrer que l'ensemble

$$X := \{\sin(n), \quad n \in \mathbb{Z}\} \subset [-1; 1]$$

est dense dans $[-1; 1]$.

Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sin(x) \end{aligned}$$

Alors, $f^{-1}(X) = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. Or, admettons pour l'instant le lemme suivant,

Lemme. Soient a et b deux réels non nuls, alors

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad a/b \notin \mathbb{Q}.$$

Alors, 2π étant irrationnel, $f^{-1}(X)$ est dense dans \mathbb{R} .

Soient $a < b$ deux éléments de $[-1; 1]$. On a :

$$f^{-1}([a; b[\cap X) = f^{-1}([a; b[) \cap f^{-1}(X).$$

Or f est continue donc $f^{-1}([a; b[)$ est un ouvert de \mathbb{R} , de plus $]a; b[\subset [-1; 1] = \text{Im}(f)$. Donc $f^{-1}([a; b[)$ est non vide. Enfin $f^{-1}(X)$ est dense dans \mathbb{R} donc

$$\begin{aligned} &f^{-1}([a; b[) \cap f^{-1}(X) \neq \emptyset \\ \Rightarrow &]a; b[\cap X \neq \emptyset \\ \Rightarrow &X \text{ est dense dans } [-1; 1] \end{aligned}$$

□

Démontrons maintenant le lemme précédent. D'abord un rappel,

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors deux cas se présentent

- ou bien G est dense dans \mathbb{R}
- ou bien il existe $m > 0$ tel que $G = m\mathbb{Z}$.

Démontrons la négation du lemme,

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ n'est pas dense dans } \mathbb{R} \text{ (c'est-à-dire de la forme } m\mathbb{Z}) \quad \Longleftrightarrow \quad a/b \in \mathbb{Q}.$$

Démonstration. Si $G := a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans \mathbb{R} alors il existe $m > 0$ tel que $G = m\mathbb{Z}$. Les réels a et b sont deux éléments de G donc il existe k et k' deux éléments non nuls de \mathbb{Z} tel que

$$a = km \quad b = k'm.$$

Alors

$$a/b = k/k' \in \mathbb{Q}$$

Réciproquement, si $a/b \in \mathbb{Q}$, alors,

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b \left(\mathbb{Z} + \frac{a}{b}\mathbb{Z} \right) = b \left(\mathbb{Z} + \frac{p}{q}\mathbb{Z} \right)$$

avec p, q dans \mathbb{Z} , non nuls et premiers entre eux. Donc, par l'identité de Bezout, il existe u et v dans \mathbb{Z} tels que

$$qu + pv = 1$$

et donc

$$q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

D'où finalement

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{b}{q}(q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}) = \frac{b}{q}\mathbb{Z}$$

□

1.4 Les suites de Cauchy [1]

Définition 18. Une suite complexe $(u_n)_n$ est dite *de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall p \geq q \geq n_0, \quad |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

Exemple 19. L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} se construit grâce aux suites de Cauchy de \mathbb{Q} . On définit une relation d'équivalence, notée \sim , sur les suites de Cauchy de \mathbb{Q} par $(u_n)_n \sim (v_n)_n \Leftrightarrow u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Alors \mathbb{R} est égal au quotient de l'ensemble des suites de Cauchy de \mathbb{Q} par la relation d'équivalence \sim .

Proposition 20. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

i.e. \mathbb{R} est complet.

Démonstration. Le sens direct

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

est vrai dans tout espace métrique. Si $(u_n)_n$ converge vers a , pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - a| \leq \epsilon$. Donc

$$\forall n \geq m \geq n_0 \quad |u_n - u_m| \leq |u_n - a| + |a - u_m| \leq 2\epsilon$$

Démontrons maintenant la réciproque

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy.}$$

Cette réciproque définit les espaces complets. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, $|u_p - u_q| \leq \epsilon$. Donc en particulier $\forall p \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |u_p| &\leq |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \\ &\leq \epsilon + |u_{n_0}|. \end{aligned}$$

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \max(\max_{n < n_0} |u_n|, \epsilon + |u_{n_0}|),$$

i.e. $(u_n)_n$ est bornée et donc par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente, $u_{\phi(n)} \rightarrow a$. Donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_{\phi(n)} - a| \leq \epsilon$. On a donc, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$|u_n - a| \leq |u_n - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - a| \leq 2\epsilon \quad \text{car} \quad \phi(n) \geq n \geq \max(n_0, n_1).$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est convergente. □

Application 21. *Toute série réelle absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit $\sum_{n \leq 0} u_n$ une série réelle absolument convergente. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad \bar{S}_n = \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

Soit $\epsilon > 0$, comme $(\bar{S}_n)_n$ est convergente, elle est de Cauchy, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n \geq N$, $\bar{S}_m - \bar{S}_n \leq \epsilon$. Or

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |u_{n+1} + \dots + u_m| \\ &\leq |u_{n+1}| + \dots + |u_m| \\ &= \bar{S}_m - \bar{S}_n \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Donc $(S_n)_n$ est de Cauchy et donc converge. □

Proposition 22. \mathbb{C} est complet.

Démonstration. Si une suite complexe $(u_n)_n$ est de Cauchy, alors la suite des parties imaginaires $(\text{Im}(u_n))_n$ et la suite des parties réelles $(\text{Re}(u_n))_n$ sont deux suites réelles de Cauchy donc convergent, et donc $(u_n)_n$ converge dans \mathbb{C} , i.e. \mathbb{C} est complet. □

1.5 La limite supérieure et la limite inférieure [2]

Définition 23. (lim sup et lim inf)

Pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on définit et on note les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \overline{\lim} u_n &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} u_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u_k \\ \text{et} \quad \underline{\lim} u_n &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} u_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} u_k \end{aligned}$$

On note que la suite $(\sup_{k \geq n} u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement $(\inf_{k \geq n} u_k)_{n \in \mathbb{N}}$), à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, est décroissante (respectivement croissante) et donc converge vers un réel si elle est majorée dans \mathbb{R} (respectivement minorée) ou diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) sinon. Dans tous les cas la limite existe bien dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 24. La $\overline{\lim} u_n$ (respectivement la $\underline{\lim} u_n$) est la plus grande (respectivement petite) des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Démontrons la proposition pour la lim sup.

(i) La $\overline{\lim} u_n$ est une valeur d'adhérence.

Premier cas, la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Alors construisons l'extractrice ϕ par récurrence, $\phi(n+1)$ à partir de $\phi(n)$ de la manière suivante. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée donc

$$\sup_{k \geq \phi(n)+1} u_k < +\infty.$$

Ainsi par définition de la borne supérieure, pour $\epsilon = 1/n$ il existe $\phi(n+1) > \phi(n)$ tel que

$$\left| u_{\phi(n+1)} - \sup_{k \geq \phi(n)+1} u_k \right| < \frac{1}{n}.$$

C'est-à-dire,

$$\sup_{k \geq \phi(n)+1} u_k - \frac{1}{n} < u_{\phi(n+1)} < \sup_{k \geq \phi(n)+1} u_k + \frac{1}{n}.$$

Par passage à la limite, $u_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim} u_n$. Or la suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc converge vers une valeur d'adhérence. D'où le fait que la $\overline{\lim} u_n$ soit une valeur d'adhérence.

Second cas, la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée ce qui est équivalent à dire que $+\infty$ est une valeur d'adhérence. De l'autre côté nous avons bien $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{k \geq n} u_k = +\infty$.

(ii) Toutes les valeurs d'adhérence sont majorées par la $\overline{\lim} u_n$.

Soient a une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite tendant vers a .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{k \geq \phi(n)} u_k \geq u_{\phi(n)}.$$

Donc par passage à la limite,

$$\overline{\lim}u_n \geq a.$$

□

Par la proposition 16, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 25. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$\text{Si } \overline{\lim}u_n = \underline{\lim}u_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{alors } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

Application 26. (Les suites sous-additives)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$\text{Si } \forall n, m \geq 0 \quad u_{n+m} \leq u_n + u_m \quad \text{alors } \frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{u_n}{n} \right)$$

Démonstration. Avant tout notons a, L et l les trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ suivants

$$a := \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \quad L := \overline{\lim}u_n \quad l := \underline{\lim}u_n.$$

D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que

$$l \geq a \geq L. \tag{1}$$

La première inégalité est immédiate du fait de la définition de a :

$$\forall k \geq 1, \quad \inf_{n \geq k} u_n \geq \inf_{n \geq 1} u_n \geq \inf_{n \geq 1} \left(\frac{u_n}{n} \right) = a.$$

Donc quand $k \rightarrow +\infty$

$$l \geq a.$$

L'autre inégalité demande un peu plus de travail. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ la division euclidienne de n par m donne deux entiers $q(n)$ et $r(n)$ tels que

$$n = q(n)m + r(n) \quad \text{avec } 0 \leq r(n) < m.$$

De plus montrons que

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad u_{pq} \leq pu_q.$$

En fixant q , on effectue une récurrence sur p . Pour $p = 1$ l'inégalité est même une égalité. Supposons le résultat vrai pour p . Alors $u_{(p+1)q} \leq u_{pq} + u_q \leq pu_q + u_q = (p+1)u_q$.

Donc on en déduit

$$\begin{aligned} u_n &\leq u_{mq(n)} + u_{r(n)} \leq q(n)u_m + r(n)u_1 \leq q(n)u_m + mu_1 \\ \frac{u_n}{n} &\leq \frac{q(n)}{n}u_m + \frac{m}{n}u_1 \end{aligned}$$

Or $q(n) = \frac{n-r(n)}{m}$ donc $\frac{q(n)}{n} = \frac{1}{m} - \frac{r(n)}{nm} \leq \frac{1}{m}$ (en fait on a même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q(n)}{n} = \frac{1}{m}$). Donc

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{n} &\leq \frac{u_m}{m} + \frac{m}{n}u_1 && \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \inf_{n \geq k} \left(\frac{u_n}{n} \right) &\leq \frac{u_m}{m} + \frac{m}{k}u_1 && \forall k \in \mathbb{N}^* \\ L &\leq \frac{u_m}{m} && \forall m \in \mathbb{N}^* \\ L &\leq a \end{aligned}$$

Ainsi (1) est prouvé et par la proposition précédente,

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

□

Application 27. Si T est un opérateur borné dans un Banach alors la suite $(\|T^n\|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \|T^n\|$. Cette suite n'est pas une suite sous-additive mais sous-multiplicative. En effet

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad u_{n+m} = \|T^n T^m\| \leq \|T^n\| \|T^m\| = u_n u_m.$$

Nous nous replaçons dans le cadre précédent en passant au logarithme. En effet on peut supposer les termes de la suite strictement positifs. Sinon, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = 0$, alors T^{n_0} est l'opérateur nul et donc $\forall n \geq n_0, T^n = T^{n-n_0} \circ T^{n_0} = 0$ c'est-à-dire la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang n_0 et le résultat est immédiat. Ceci dit nous pouvons passer au logarithme et poser

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \ln(u_n).$$

Et cette fois la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien sous-additive. Donc

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{v_n}{n} \right) \\ \ln(u_n^{1/n}) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\ln(u_n^{1/n}) \right) \\ u_n^{1/n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\ln(u_n^{1/n}) \right) \right) \end{aligned}$$

par continuité de l'exponentielle.

$$u_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(u_n^{1/n} \right)$$

car l'exponentielle est strictement croissante et continue.

□

2 Applications aux fonctions continues

2.1 Caractérisation séquentielle [1]

Proposition 28. *La continuité de la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en $a \in \mathbb{C}$ est équivalente au fait que pour toute suite réelle $(u_n)_n$ convergeant vers a , la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. – Supposons que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ soit continue en a . Soit $\epsilon > 0$, par continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Soit $(u_n)_n$ une suite complexe convergeant vers a , alors il existe n_0 tel que pour tout $n \leq n_0$ $|u_n - a| < \delta$. Donc pour tout $n \leq n_0$, $|f(u_n) - f(a)| < \epsilon$ id est $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$.
– Supposons que pour toute suite complexe $(u_n)_n$ tendant vers a , on ait $f(u_n) \rightarrow f(a)$ quand $n \rightarrow \infty$. Supposons par l'absurde que f ne soit pas continue en a . Alors

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in \mathbb{C}, \quad |x - a| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

En particulier si on choisit $\delta = \frac{1}{n}$, on construit ainsi une suite $(x_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon.$$

La première condition donne que $x_n \rightarrow a$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc par hypothèse $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ce qui est en contradiction avec la deuxième condition. Donc f est continue en a . □

Exemple 29.

$$\text{Si } u_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \text{ alors } \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = (-1)^n.$$

Et donc la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0, car sinon comme $(u_n)_n$ converge vers 0, la suite $(\sin\left(\frac{1}{u_n}\right))_n$ devrait être convergente, ce qui est faux.

2.2 Les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ [1]

Dans cette section, nous considérons un fermé K de \mathbb{C} , une application $f : K \rightarrow K$ et une suite complexe définie par récurrence par la donnée de u_0 dans K et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans K . Par récurrence, on suppose que la suite est bien définie et à valeurs dans K jusqu'au rang n . Alors $f(u_n)$ existe, u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \in f(K) \subset K$.

Proposition 30. *Supposons f continue alors*

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \quad \Rightarrow \quad f(l) = l.$$

Démonstration. L'ensemble K étant fermé, l appartient à K . Donc en passant simplement à la limite sur la relation de récurrence, $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(l)$ car f est continue. \square

Remarque 31. Le fait qu'une fonction continue f admette un point fixe n'implique pas a priori qu'une suite définie par récurrence à partir de f converge.

Exemples : La fonction carrée sur \mathbb{R}_+^* ,

$$f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\\ x \mapsto x^2$$

admet un unique point fixe en $x = 1$. Pourtant, pour toute suite définie par

$$u_0 > 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2,$$

la suite diverge

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Mieux (l'infini peut être vu comme un point fixe particulier), la fonction donnant l'opposé sur \mathbb{R} ,

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x$$

admet pour unique point fixe $x = 0$. Et pourtant, pour toute suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad u_{n+1} = -u_n,$$

la suite diverge ayant deux valeurs d'adhérence distinctes, u_0 et $-u_0$.

Théorème 32. (*Banach-Picard*)

Supposons f contractante, alors $\forall u_0 \in K$, la suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f .

Démonstration. 1) Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Soit $j \geq 1$, du fait que f soit contractante,

$$|u_{j+1} - u_j| = |f(u_j) - f(u_{j-1})| \leq k |u_j - u_{j-1}| \leq \dots \leq k^j |u_1 - u_0|.$$

Donc pour $p > q$, deux entiers strictement positifs,

$$|u_p - u_q| \leq \sum_{j=q}^{p-1} |u_{j+1} - u_j| \leq \sum_{j=q}^{p-1} k^j |u_1 - u_0| = k^q |u_1 - u_0| \sum_{j=0}^{p-q-1} k^j \leq k^q |u_1 - u_0| \sum_{j=0}^{+\infty} k^j = \frac{k^q}{1-k} |u_1 - u_0|$$

car $0 < k < 1$. Or $\lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{k^q}{1-k} |u_1 - u_0| \right) = 0$. Donc $\forall \epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0| < \epsilon$. Et donc $\forall p \geq q \geq n_0$,

$$|u_p - u_q| < \epsilon.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy complexe donc converge dans \mathbb{C} . Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans K qui est un fermé de \mathbb{C} donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans K , il existe $a \in K$ tel que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a.$$

2) Sa limite a est un point fixe de f .

En effet f est contractante et donc continue sur K . D'où par la proposition 30, $f(a) = a$ id est a est un point fixe de f .

3) Le point fixe a est unique.

Soit b un autre point fixe de f , alors

$$|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq k |a - b|.$$

Et le fait que $k < 1$ implique immédiatement que $a = b$.

Remarque : On a également une majoration de la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers a indépendante du point a . Nous avons $\forall p > q$,

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k} |u_1 - u_0|.$$

Donc quand $p \rightarrow +\infty$,

$$|u_q - a| \leq \frac{k^q}{1-k} |u_1 - u_0|.$$

□

Proposition 33. Dans \mathbb{R} , (K un fermé de \mathbb{R}) si la fonction f est croissante alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (à valeurs dans K donc réelle) est monotone plus précisément croissante si $u_1 \geq u_0$ et décroissante si $u_1 \leq u_0$.

Démonstration. Si $u_1 \geq u_0$, par récurrence montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Le rang $n = 1$ est vérifié par hypothèse. Supposons $u_n \geq u_{n-1}$ alors par croissance de f , $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n-1}) = u_n$. Le cas $u_1 \leq u_0$ se traite aussi facilement. □

Exemple 34. Sur \mathbb{R}^+ , la fonction

$$f : \quad [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[\\ x \quad \rightarrow \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

est croissante (car la racine carrée et $g : x \rightarrow \frac{x}{1+x}$ le sont, $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$) et bornée (minorée par 0 et majorée par 1). Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et bornée donc converge.

Définition 35. (Les suites homographiques)

Soient a, b, c et d quatre complexes tels que $ad - bc \neq 0$. On définit alors (lorsque c'est possible, id est $u_n \neq -d/c, \forall n \in \mathbb{N}$) la suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

Une telle suite est appelée suite homographique.

Proposition 36. Posons

$$(E) \quad cx^2 - (a - d)x - b = 0.$$

• Si (E) a deux racines distinctes α et β , alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{où } k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$

• Si (E) a une racine double α alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \quad \text{où } k = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

Démonstration. Un peu de calculs... Notons pour commencer que α est une solution de (E) si et seulement si α est un point fixe,

$$\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}.$$

• Si (E) a deux racines distinctes α et β , alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} &= \frac{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\beta + b}{c\beta + d}} \\ &= \frac{(a\alpha + ad - a\alpha - bc)u_n + b\alpha + bd - ad\alpha - bd}{(cu_n + d)(c\alpha + d)} \\ &\quad \times \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{(ac\beta + ad - ac\beta - bc)u_n + bc\beta + bd - ad\beta - bd} \\ &= \frac{[(ad - bc)u_n - (ad - bc)\alpha](c\beta + d)}{[(ad - bc)u_n - (ad - bc)\beta](c\alpha + d)} \\ &= \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \times \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \dots = k^{n+1} \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \end{aligned}$$

• Le second point est un peu plus délicat. Si (E) a une racine double α , alors d'une part nous avons,

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(a\alpha + ad - a\alpha - bc)u_n + b\alpha + bd - ad\alpha - bd} = \frac{cu_n + d}{u_n - \alpha} \times \frac{c\alpha + d}{ad - bc}.$$

Or ici α est racine double de $cx^2 - (a - d)x - b = 0$. On peut donc l'exprimer ainsi,

$$\alpha = \frac{a - d}{2c}.$$

Donc

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{cu_n + d}{u_n - \alpha} \times \frac{a - d + 2d}{2(ad - bc)} = \frac{cu_n + d}{u_n - \alpha} \times \frac{a + d}{2(ad - bc)}. \quad (2)$$

D'autre part,

$$\frac{1}{u_n - \alpha} + k = \frac{1}{u_n - \alpha} + \frac{c}{a - c\alpha} = \frac{a - c\alpha + cu_n - c\alpha}{(u_n - \alpha)(a - c\alpha)} = \frac{cu_n - 2c\alpha + a}{(u_n - \alpha)(a - c\alpha)}.$$

En prenant la valeur de α ,

$$\frac{1}{u_n - \alpha} + k = \frac{cu_n - a + d + a}{(u_n - \alpha)(2a - a + d)} \times 2 = \frac{cu_n - d}{u_n - \alpha} \times \frac{2}{a + d}. \quad (3)$$

Or la racine étant double, son discriminant est nul,

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{a + d}{2(ad - bc)} - \frac{2}{a + d} &= \frac{2}{(a + d)(ad - bc)} \left[\left(\frac{a + d}{2} \right)^2 - ad + bc \right] \\ &= \frac{2}{(a + d)(ad - bc)} \times \frac{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc}{4} \\ &= \frac{2}{(a + d)(ad - bc)} \times \frac{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc}{4} = \frac{2}{(a + d)(ad - bc)} \times \frac{\Delta}{4} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{a + d}{2(ad - bc)} = \frac{2}{a + d}.$$

En multipliant de chaque côté par $\frac{cu_n - d}{u_n - \alpha}$ nous obtenons finalement par (2) et (3),

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{u_n - \alpha} + k = \dots = \frac{1}{u_0 - \alpha} + k(n + 1).$$

□

Théorème 37. (Méthode de Newton)[Développement n°1] [3]

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , on suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite récurrente,

$$\forall n \geq 0 \quad x_{n+1} = F(x_n), \quad \text{avec} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Alors en notant a l'unique valeur d'annulation de la fonction f , on a :

(i)

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2.$$

(convergence d'ordre 2) pour x_0 suffisamment proche de a .

(ii) Si de plus $\forall x \in [c, d]$ $f''(x) > 0$, alors

$$x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \quad \text{pour } x_0 > a.$$

Démonstration. (i) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[c, d]$ (car $f' > 0$). De plus $f(c) < 0 < f(d)$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule en un unique point $a \in]c, d[$. Ainsi pour ce point $F(a) = a$ et $F'(a) = 1 - \frac{f'(a)^2 - f(a)f''(a)}{f'(a)^2} = 0$.

Soit $x \in [c, d]$,

$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} && \text{car } f(a) = 0 \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

Or par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2,

$$\exists z_x \in]x, a[\text{ ou }]a, x[\text{ tel que} \quad f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{(a - x)^2}{2} f''(z_x).$$

Et on obtient donc,

$$F(x) - a = \frac{(a - x)^2}{2} \frac{f''(z_x)}{f'(x)}. \quad (4)$$

On pose

$$C = \frac{\max_{[c,d]} |f''|}{2 \min_{[c,d]} |f'|}$$

qui existe bien grâce aux hypothèses, et donc,

$$\forall x \in [c, d], \quad |F(x) - a| \leq C |x - a|^2.$$

Soit $0 < \alpha < 1/C$ tel que l'intervalle $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit contenu dans $[c, d]$, alors,

$$\text{si } x \in I \quad |F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha.$$

Donc $F(x) \in I$ id est I est stable par F . Ainsi, si $x_0 \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$ et

$$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2.$$

Ce qui démontre (i). On en déduit directement que

$$C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } C\alpha > 1.$$

Et la convergence de x_n vers a est dite d'ordre 2.

(ii) On suppose désormais que $f'' > 0$ sur $[c, d]$ (f strictement convexe sur $[c, d]$).

Montrons que l'intervalle $[a, d]$ est stable par F . Soit $a < x \leq d$. Par hypothèse $f'(x) > 0$ et par croissance de f , $f(x) > f(a) = 0$. D'où,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x \leq d. \quad (5)$$

De plus par (4),

$$F(x) - a = \frac{(a-x)^2 f''(z_x)}{2f'(x)} > 0.$$

Donc $[a, d]$ est bien stable par F et donc pour $a < x_0 \leq d$, $x_n \in]a, d]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De plus par (5) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. (On notera que si $x_0 = a$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à a .)

Donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, nécessairement sa limite l est un point fixe de F (cf proposition 30) id est $F(l) = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$ et donc $f(l) = 0$, $l = a$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a , $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $x_n \in I$ (voir (i)). On a donc une convergence quadratique,

$$0 < x_n - a \leq C(x_n - a)^2.$$

Enfin par (4) :

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}$$

où z_n désigne le terme z_{x_n} provenant de la formule de Taylor à l'ordre 2 en a et x_n . On a

$$a < z_n < x_n \quad \text{donc par le théorème des gendarmes} \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a.$$

Donc,

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}.$$

Ainsi

$$x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2.$$

□

Exemple 38. On peut approcher le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en considérant la fonction $f(x) = x^2 - x - 1$ sur $[1, 2]$.

Démonstration. f vérifie les hypothèses du théorème 37 :

f est \mathcal{C}^2 , $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 1$, $\forall x \in [1, 2], f'(x) = 2x - 1 \geq 1$. De plus, $\forall x \in [1, 2],$

$f''(x) = 2$. Et donc $C = \frac{\max_{[c,d]} |f''|}{2 \min_{[c,d]} |f'|} = 1$. Ainsi il suffit de prendre $0 < \alpha < 1$ et de considérer l'intervalle

$I =]1, 2[$. Alors pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique zéro de f sur $[1, 2]$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ avec une vitesse quadratique. \square

2.3 Les suites équiréparties [4]

Définition 39. Une suite $(u_n)_n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ est équirépartie si pour tout a, b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\frac{X_n(a, b)}{n} \rightarrow b - a \quad \text{où} \quad X_n(a, b) = \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\}, u_k \in [a, b]\}$$

Théorème 40. Critère de Weyl [Développement 2]

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeur dans $[0, 1]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(u_n)_n$ est équirépartie,
2. pour toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty,$$

3. pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty$$

Démonstration. 1. Montrons dans un premier temps que **1 implique 2** :

on peut remarquer que pour tout couple (a, b) , $X_n(a, b) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(u_k)$. Ainsi le 2 est vrai pour les indicatrices de segment par définition d'une suite équirépartie.

On en déduit par linéarité que cette propriété est vraie pour toute fonction en escalier.

Montrons maintenant qu'elle est vraie pour toute fonction continue. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Par densité uniforme des fonctions en escalier dans les fonctions continues de $[0, 1]$, il existe une suite de fonctions en escalier $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\|f - f_p\|_{\infty} \rightarrow 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) - \int_0^1 f(t) dt \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(u_k) - f_p(u_k)| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_p(u_k) - \int_0^1 f_p(t) dt \right| + \int_0^1 |f_p(t) - f(t)| dt \\ &\leq \|f - f_p\|_{\infty} + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_p(u_k) - \int_0^1 f_p(t) dt \right| + \|f - f_p\|_{\infty}. \end{aligned}$$

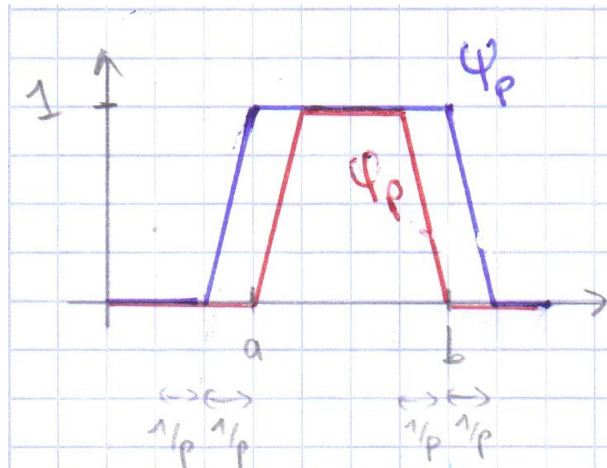
Or comme f_p est en escalier, $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_p(u_k) - \int_0^1 f_p(t) dt \right| \rightarrow 0$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq 2 \|f - f_p\|_\infty \rightarrow 0,$$

i.e. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$. On a donc fini de montrer la première implication.

2. Montrons maintenant que **2 implique 1** :

une fonction caractéristique χ_I , d'un segment $I \neq [0, 1]$ présente au moins une discontinuité donc ne peut pas être obtenue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. En fait on n'a pas besoin d'une approximation uniforme, il va suffire d'encadrer χ_I par deux suites de fonctions continues affines par morceaux qui convergent vers χ_I au sens de la norme intégrale. Prenons pour commencer un segment $I = [a, b]$ avec $0 < a < b < 1$. On considère les suites de fonctions continues $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\Psi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définies pour p suffisamment grand par les figures suivantes :



Ainsi φ_k est nulle sur les segment $[0, a]$ et $[b, 1]$ et vaut 1 sur le segment $[a + \frac{1}{p}, b - \frac{1}{p}]$ et est affine sur les 2 segments qui restent. On observe que pour tout p assez grand

$$\varphi_p \leq \chi_I \leq \Psi_p.$$

Il en résulte que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_p(u_k) \leq \frac{X_n(a, b)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_p(u_k).$$

Or par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_p(u_k) = \int_0^1 \varphi_p = b - a - \frac{1}{p}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_p(u_k) = \int_0^1 \Psi_p = b - a + \frac{1}{p}$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(a, b)}{n} = b - a.$$

On peut adapter cette méthode dans le cas où $a = 0$ ou $b = 1$.

3. Montrons que **2 implique 3** :

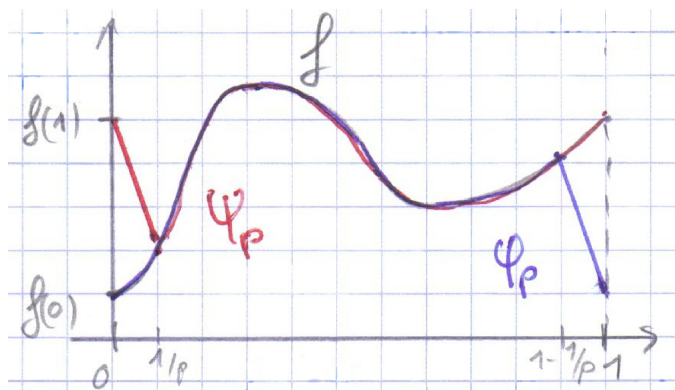
cette implication se démontre facilement car la fonction $f_p : x \mapsto e^{2i\pi px}$ est continue pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et donc d'après 2, on a

$$\int_0^1 f_p = \left[\frac{e^{2i\pi px}}{2i\pi p} \right]_0^1 = 0.$$

4. Montrons pour finir que **3 implique 2** :

on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e^{2i\pi px} = \cos(2\pi px) + i \sin(2\pi px)$. Par linéarité, on a la propriété 2 pour tout polynôme trigonométrique du type $x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(2k\pi x)$. D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, toute fonction continue $f = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques de ce type. On en déduit donc que 2 est vérifiée pour de telles fonctions continues.

Si maintenant f est continue mais ne vérifie pas la condition $f(0) = f(1)$, on encadre f par deux fonctions comme sur le dessin ci-dessous



Comme $\Psi_p(0) = \Psi_p(1) = f(1)$ et $\varphi_p(0) = \varphi_p(1) = f(0)$, on sait que 2 est vérifié pour ces fonctions, i.e. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_p(u_k) \rightarrow \int_0^1 \Psi_p(t) dt$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_p(u_k) \rightarrow \int_0^1 \varphi_p(t) dt$ quand $n \rightarrow \infty$. Or pour p assez grand,

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

De plus

$$\int_0^1 \varphi_p(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \Psi_p(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

On obtient donc bien

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt,$$

et la propriété est donc vérifiée.

□

Exemple 41. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

alors la suite $(x_0 + n\theta - [x_0 + n\theta])_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie (avec $[.]$ la partie entière).

NB : on dit aussi que la suite $(x_0 + n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1.

Démonstration. Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x_0 + n\theta - [x_0 + n\theta])_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'assertion 3 du critère de Weyl. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n e^{2i\pi p u_k} = \frac{e^{2i\pi p u_0}}{n} \sum_{k=0}^n \left(e^{2i\pi p \theta} \right)^k$$

car $e^{2i\pi p [x_0 + n\theta]} = 1$. De plus $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donc $e^{2i\pi p \theta} \neq 1$ et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n e^{2i\pi p u_k} = \frac{e^{2i\pi p u_0}}{n} \frac{1 - e^{2i\pi p \theta (n+1)}}{1 - e^{2i\pi p \theta}}.$$

D'où

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n e^{2i\pi p u_k} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{2}{|1 - e^{2i\pi p \theta}|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et par le critère de Weyl la suite est équirépartie. □

3 Comportements asymptotiques

3.1 Sommation des équivalents [1]

Théorème 42. Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries dont les termes généraux sont positifs et vérifient,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

Alors

$$(i) \quad \sum_n u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_n v_n \text{ converge.}$$

$$\text{Et même, } \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

$$(ii) \quad \sum_n u_n \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_n v_n \text{ diverge.}$$

$$\text{Et même, } \sum_{k=0}^n v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Démonstration. • (i) Supposons que $\sum_n u_n$ converge. L'équivalence $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ se traduit en terme d'épsilons de la sorte,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - v_n| \leq \epsilon |u_n| = \epsilon u_n.$$

C'est-à-dire,

$$(1 - \epsilon)u_n \leq v_n \leq (1 + \epsilon)u_n. \quad (6)$$

Notamment pour $\epsilon = 1$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$,

$$v_n \leq 2u_n.$$

En sommant cette inégalité,

$$\forall n \geq n_1, \quad \sum_{k=n_0}^n v_k \leq 2 \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \underbrace{2 \sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{< +\infty \text{ et indépendant de } n}.$$

La suite $(\sum_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante (la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive) est aussi majorée et donc converge. Et même, en sommant (6) entre $n + 1$ et p ,

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq n + 1 \quad (1 - \epsilon) \sum_{k=n+1}^p u_k \leq \sum_{k=n+1}^p v_k \leq (1 + \epsilon) \sum_{k=n+1}^p u_k.$$

Puis lorsque $p \rightarrow +\infty$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad (1 - \epsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq (1 + \epsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

C'est-à-dire,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

• (ii) Supposons que $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ diverge. Sinon, en appliquant (i) à $\sum_n v_n$, on obtient que $\sum_n u_n$ converge. Les deux séries étant croissantes (les termes sont positifs) elles divergent donc vers $+\infty$. L'équivalence entre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nous apporte toujours que, pour $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n - v_n| &\leq \epsilon |u_n| = \epsilon u_n \\ \sum_{k=n_0}^n |u_k - v_k| &\leq \epsilon \sum_{k=n_0}^n u_k. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k \right| &\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - v_k| + \sum_{k=n_0}^n |u_k - v_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - v_k| + \epsilon \sum_{k=n_0}^n |u_k|. \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=n_0}^n |u_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_1, \quad \sum_{k=n_0}^n |u_k| \geq \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - v_k|}{\epsilon}.$$

Et donc,

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1), \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k \right| \leq 2\epsilon \sum_{k=n_0}^n |u_k| \leq 2\epsilon \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

D'où finalement,

$$\sum_{k=0}^n v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n u_k.$$

□

Application 43. On note, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ la série harmonique. On peut en donner son développement asymptotique,

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

avec γ une constante appelée constante d'Euler.

Démonstration. L'équivalent

Posons,

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc par le théorème précédent, de sommation des équivalents, $\sum_n u_n$ et H_n ont même nature. Or

$$\sum_{k=1}^n u_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\sum_n u_n$ et H_n divergent, et même,

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = H_n.$$

D'où,

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

L'ordre 1

En conséquence, considérons désormais la suite $\forall n \geq 1$, $v_n = H_n - \ln(n)$, et pour simplifier un peu la suite, prenons $v_0 = 0$. Alors $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} < 0 \quad \text{de signe constant et sommable.} \end{aligned}$$

Donc à nouveau par le théorème de sommation des équivalents (appliqué à $-(v_{n+1} - v_n)$ pour se ramener à des termes positifs), la série $\sum_n (v_{n+1} - v_n)$ converge. Notons γ sa limite et donc,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma.$$

Et même,

$$\begin{aligned} \gamma - v_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) - \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}. \end{aligned}$$

(Ce résultat se démontre classiquement par comparaison série-intégrale.)

$$\begin{aligned} \gamma - H_n + \ln(n) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n} \\ \Rightarrow H_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

L'ordre 2

Pour obtenir l'ordre suivant, il suffit de recommencer le procédé en posant $\forall n \geq 1$, $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}$, et $w_0 = 0$. Alors, on reprend le calcul d'équivalent du terme général en allant à

l'ordre suivant $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3} > 0 \quad \text{de signe constant et sommable.}
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) = \lim_{p \rightarrow +\infty} w_{p+1} - w_n = -w_n$$

car,

$$w_p = H_p - \ln(p) - \gamma - \frac{1}{2p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{p}\right).$$

Donc par le théorème de sommation des équivalents,

$$-w_n = -\left(H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

D'où finalement,

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

3.2 Formule de Stirling [1]

Lemme. *Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1.

$$\sum_n (u_{n+1} - u_n) \text{ converge,}$$

2.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Démonstration. En effet, si $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge, alors $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ converge. Et inversement, si $(u_n)_n$ converge, alors $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ converge. □

Lemme (Formule de Wallis).

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right)^2 = \pi$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$$

1. Expression explicite de I_n :

Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \sin(x) dx \\ &= \left[-\sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx \quad \text{et} \quad \left[-\sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

donc

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Or $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. On obtient donc par itération, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \\ I_{2p+1} &= \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1}. \end{aligned}$$

2. Conclusion :

Comme pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x) \leq 1.$$

En intégrant cette expression, on obtient alors : pour tout

$$p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1} \leq 1$$

et donc

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p} \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad p \rightarrow \infty.$$

On a donc

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1,$$

et donc également

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1.$$

$$\text{Or } \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right)^2 \times \frac{2}{\pi(2p+1)} \quad \text{et} \quad \frac{2}{2p+1} \sim \frac{1}{p},$$

et on obtient donc bien le résultat voulu. □

Proposition 44 (Formule de Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Démonstration. On va montrer dans un premier temps que

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

et on déterminera ensuite la constante k à l'aide de la formule de Wallis.

1. On introduit la suite définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et on pose

$$v_n = \log \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{aligned} v_n &= \log \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1} \right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}.$$

Donc d'après le théorème de sommation des équivalents la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Or, $\sum_n v_n = \sum_n (\log(u_{n+1}) - \log(u_n))$ converge est équivalent à ce que la suite $(\log(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge d'après le lemme précédent, on note λ sa limite. On a donc $(u_n)_n$ qui converge vers e^λ , et ainsi

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{avec } k = e^{-\lambda}.$$

2. On va maintenant calculer la constante k à l'aide de la formule de Wallis.

On a,

$$\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \times \frac{2p(2p-2)\dots 2}{2p(2p-2)\dots 2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right)^2 &= \frac{2^{4p}}{p} \frac{(p!)^4}{((2p)!)^2} \\ &\sim \frac{2^{4p}}{p} \times \frac{k^4 p^{4p+2} e^{-4p}}{k^2 (2p)^{4p+1} e^{-4p}} = \frac{k^2}{2}. \end{aligned}$$

On obtient donc, d'après la formule de Wallis $\pi = \frac{k^2}{2}$, i.e. $k = \sqrt{2\pi}$. On a donc bien $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

□

3.3 Moyenne de Cesàro [1]

Proposition 45. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$, alors sa moyenne de Cesàro $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

converge également vers l .

Démonstration. On traduit la convergence en terme d'épsilons,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \epsilon/2.$$

Alors, pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |S_n - l| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^n (u_k - l)}{n} \right| \leq \frac{|\sum_{k=1}^{n_0} (u_k - l)|}{n} + \frac{|\sum_{k=n_0+1}^n (u_k - l)|}{n} \\ &\leq \frac{n_0 S_{n_0}}{n} + \frac{\sum_{k=n_0+1}^n |u_k - l|}{n} \leq \frac{n_0 S_{n_0}}{n} + \frac{\epsilon(n - n_0 - 1)}{2n} \\ &\leq \frac{n_0 S_{n_0}}{n} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

L'entier n_0 étant fixé, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $\frac{n_0 S_{n_0}}{n} < \epsilon/2$. Finalement,

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1) \quad |S_n - l| < \epsilon.$$

□

Remarque 46. La réciproque est fautive :

$$\text{pour } u_n = (-1)^n, \quad S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Donc

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{alors que } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas.}$$

Application 47. Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que en 0^+ ,

$$f(x) = x - ax^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}), \quad a > 0, \alpha > 0.$$

Alors pour u_0 assez petit et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$,

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et même} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n\alpha a)^{1/\alpha}}.$$

Démonstration. D'après le développement de f en 0^+ , $\exists x_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, x_0[\quad f(x) < x.$$

Alors pour $u_0 \in [0, x_0[$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et à valeurs dans $[0, x_0[$ car $u_n \geq u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc converge notons l sa limite. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence à partir d'une fonction continue, donc l vérifie

$$f(l) = l.$$

Or $l \in [0, x_0[$ et f vérifie

$$\forall x \in]0, x_0[\quad f(x) < x.$$

Donc $l = 0$ est l'unique solution, id est $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Pour trouver l'équivalent, l'astuce est de s'intéresser à u_{n+1}^β , $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\beta &= (f(u_n))^\beta = \left(u_n - au_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1})\right)^\beta \\ &= u_n^\beta \left(1 - au_n^\alpha + o(u_n^\alpha)\right)^\beta \\ &= u_n^\beta \left(1 - a\beta u_n^\alpha + o(u_n^\alpha)\right) \\ &= u_n^\beta - a\beta u_n^{\alpha+\beta} + o(u_n^{\alpha+\beta}). \end{aligned}$$

Prenons

$$\beta = -\alpha \quad \text{et posons} \quad v_{n+1} = u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}.$$

Par ce qui précède,

$$v_{n+1} = -a\beta + o(1) \quad \text{id est} \quad v_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -a\beta = a\alpha.$$

Donc la moyenne de Cesàro de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers $a\alpha$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a\alpha.$$

Donc

$$\frac{1}{n} \left(u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a\alpha.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{-\alpha}}{n} &= a\alpha + o(1) \\ u_n &= (na\alpha + o(1))^{-1/\alpha} \\ &= \frac{1}{(na\alpha)^{1/\alpha}} (1 + o(1)) \\ u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(na\alpha)^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

□

3.4 Méthode d'accélération de Aitken [6]

Proposition 48. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle telle que

- $x_n \rightarrow \xi \in \mathbb{R}$;
- il existe $k \in \mathbb{R}$, avec $|k| < 1$, et $(\epsilon_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite réelle telle que $\epsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et

$$x_{n+1} - \xi = (k + \epsilon_n)(x_n - \xi);$$

– pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \xi$.

Alors il est possible de construire une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)}.$$

On a alors, $y_n \rightarrow \xi \in \mathbb{R}$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\frac{y_n - \xi}{x_n - \xi} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow 0$; i.e. y_n converge plus vite que x_n vers ξ .

Démonstration. On calcule le dénominateur,

$$\begin{aligned} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n &= (x_{n+2} - \xi) - 2(x_{n+1} - \xi) + (x_n - \xi) \\ &= ((k + \epsilon_n)(k + \epsilon_{n+1}) - 2(k + \epsilon_n) + 1)(x_n - \xi) \\ &= ((k^2 - 2k + 1) + k(\epsilon_n + \epsilon_{n+1}) + \epsilon_n \epsilon_{n+1} - 2\epsilon_n)(x_n - \xi) \\ &= ((k - 1)^2 + \eta_n)(x_n - \xi) \quad \text{où} \quad \eta_n = k(\epsilon_n + \epsilon_{n+1}) + \epsilon_n \epsilon_{n+1} - 2\epsilon_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme $k \neq 1$ et $x_n \neq \xi$, le dénominateur est non nul pour n assez grand; donc y_n est bien défini pour n assez grand.

De plus, on a

$$\begin{aligned} y_n - \xi &= x_n - \xi - \frac{((x_{n+1} - \xi) - (x_n - \xi))^2}{((k - 1)^2 + \eta_n)(x_n - \xi)} \\ &= (x_n - \xi) - \frac{(k - 1 + \epsilon_n)^2}{((k - 1)^2 + \eta_n)}(x_n - \xi) \\ &= (x_n - \xi) \left(\frac{(k - 1)^2 + \eta_n - (k - 1)^2 - 2\epsilon_n(k - 1) - \epsilon_n^2}{(k - 1)^2 + \eta_n} \right) \\ &= (x_n - \xi) \left(\frac{\eta_n - 2\epsilon_n(k - 1) - \epsilon_n^2}{(k - 1)^2 + \eta_n} \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{y_n - \xi}{x_n - \xi} = \frac{\eta_n - 2\epsilon_n(k - 1) - \epsilon_n^2}{(k - 1)^2 + \eta_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et on a démontré la propriété voulue. □

3.5 Un théorème Taubérien [2]

Théorème 49. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, positive et décroissante.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^{-\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

avec $\alpha \in]0, 1[$ et $C > 0$.

Démonstration. Le sens direct est classique, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, par le théorème de sommation des équivalents, la série $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a même équivalent que $\sum_n Cn^{-\alpha}$. Or par comparaison série intégrale, $\sum_n Cn^{-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. D'où l'implication

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Démontrons la réciproque qui est le sens «dur». Supposons

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Raisonnons sur les lim inf et lim sup et montrons que

$$l := \underline{\lim} n^\alpha u_n \geq C \geq \overline{\lim} n^\alpha u_n =: L.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 1$ et $m = [\delta n]$ la partie entière de δn . Par décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$S_m - S_n = u_{n+1} + \dots + u_m \leq (m - n)u_n \leq n(\delta - 1)u_n.$$

Donc

$$n^\alpha u_n \geq \frac{n^{\alpha-1}}{\delta - 1} (S_m - S_n) = \frac{1}{\delta - 1} \left(\left(\frac{m}{n} \right)^{1-\alpha} \frac{S_m}{m^{1-\alpha}} - \frac{S_n}{n^{1-\alpha}} \right).$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $m \rightarrow +\infty$ et $m/n \rightarrow \delta$, donc

$$l \geq \frac{C}{1-\alpha} \frac{\delta^{1-\alpha} - 1}{\delta - 1}.$$

Puis quand $\delta \rightarrow 1$, $\delta > 1$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \frac{\delta^{1-\alpha} - 1}{\delta - 1} = \left. \frac{dx^{1-\alpha}}{dx} \right|_{x=1} = 1 - \alpha.$$

Ainsi,

$$l \geq C.$$

De la même façon, en prenant cette fois $\delta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} S_n - S_m &= u_{m+1} + \dots + u_n \geq (n - m)u_m \geq n(1 - \delta)u_n \\ n^\alpha u_n &\leq \frac{n^{\alpha-1}}{1 - \delta} (S_n - S_m) = \frac{1}{1 - \delta} \left(\frac{S_n}{n^{1-\alpha}} - \left(\frac{m}{n} \right)^{1-\alpha} \frac{S_m}{m^{1-\alpha}} \right) \\ L &\leq \frac{C}{1-\alpha} \frac{1 - \delta^{1-\alpha}}{1 - \delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 1} C. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que

$$n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C \quad \text{id est} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^{-\alpha}.$$

□

Références

- [1] GOURDON, *Les maths en tête, Analyse*, 2e édition.
- [2] ZUILY, QUEFFÉLEC, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*.
- [3] ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel*.
- [4] FRANCINO, GIANELLA, NICOLAS, *Oraux X-ENS, Analyse 2*.
- [5] MERLIN, *MéthodiX*.
- [6] CHAMBERT-LOIR, FERMIGIER, *Analyse 2*.