Leçon n° 246
Séries de Fourier. Exemples et applications.

Florian Bouguet
Basile Pillet

Préparation à l'agrégation de l'université de Rennes 1
Année 2011-2012

Table des matières

1 Plan

Cadre : On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, que l'on confondra avec les fonctions sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

1.1 Les coefficients de Fourier

1.1.1 Définitions [Gou08]

Définition 1

On définit les coefficients de Fourier *d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ par :*

$$\text{pour } n \in \mathbb{N} \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N} \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t$$

Définition 2

On notera pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : t \mapsto e^{int}$. $\quad e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Définition 3

On définit la série de Fourier *de $f \in L^1(\mathbb{T})$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$$

Proposition 1

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a la propriété suivante :

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

De plus, on peut alors exprimer la série de Fourier *:*

$$S_n(f)(t) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)$$

Remarque 1

Si f est paire (resp. impaire) alors les b_n sont nuls (resp. les a_n sont nuls).

1.1.2 Propriétés des coefficients de Fourier [QZ07]

Proposition 2 (*Formulaire*)

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$, $n, n_0 \in \mathbb{Z}$. On a les propriétés suivantes :

- $c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g)$ (linéarité)
- Si on note $\tilde{f} = f \circ (-id)$, alors $c_n(\tilde{f}) = -c_n(f)$
- $c_n(\bar{f}) = \overline{c_n(f)}$
- Si on note $\tau_s f : t \mapsto f(t+s)$, alors $c_n(\tau_s f) = e^{ins} c_n(f)$
- $c_n(e_{n_0} f) = c_{n-n_0}(f)$
- Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{T}$, alors $c_n(f') = inc_n(f)$

Lemme 1 (Riemann-Lebesgue)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors $\lim\limits_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$.

Proposition 3

Si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et la série de terme général $c_k e_k$ converge uniformément vers $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors :
- $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = c_n(f)$.

1.2 Convergence de la série de Fourier

1.2.1 Les noyaux de sommations [QZ07]

Définition 4 (*Noyau de* Dirichlet)

On appelle noyau de Dirichlet *d'ordre n :*

$$D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$$

Remarque 2

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $S_n(f) = f * D_n$ (produit de convolution)

Proposition 4

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Cette proposition sera démontrée dans le développement A portant sur le théorème de Banach-Steinhaus et ses applications.

Définition 5 (*Noyau de* Fejér)

On appelle noyau de Fejér *d'ordre n :*

$$K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

Remarque 3

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $\sigma_n(f) = f * K_n$. $\sigma_n(f)$ est la moyenne de Césaro *des $S_k(f)$ pour $0 \leq k < n$.*

Proposition 5 (***Le noyau de* Fejér *est une approximation de l'unité***)

(a) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$K_m(x) = \begin{cases} m & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{1-\cos(mx)}{m(1-\cos(x))} & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K_m(x) \geq 0$.*

(c) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K_m(-x) = K_m(x)$.*

(d) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

(e) *Pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$,*

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(f) *Pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$,*

$$\int_{|x|>\varepsilon} K_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque 4

Une suite dans $L^1(\mathbb{T})$ vérifiant les propriétés $(b), (d), (f)$ est appelée approximation de l'unité *(elle converge au sens des distributions vers l'élément unité pour la convolution : la mesure de dirac en 0).*

Ces résultats sont démontrés dans le deuxième développement (B).

1.2.2 Premiers problèmes... [Gou08]

Les deux résultats suivant sont proposés en tant que premier développement (A), et la preuve se base sur celle de [Gou08].

Théorème 1 (Banach-Steinhaus)

Si E et F sont deux evn, E est un Banach et $H \subset \mathcal{L}(E, F)$. Si

$$\forall x \in E, \quad \sup_{f\in H} |f(x)|_F < \infty$$

Alors

$$\sup_{f\in H} \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

Corollaire 1

Il existe une fonction 2π-périodique et continue dont la série de Fourier *diverge en 0.*

1.2.3 Convergence en norme L^p, convergence simple [QZ07, Gou08]

Le théorème suivant a une place très importante dans cette leçon, il est donc naturel de le proposer en deuxième développement (cf B). La preuve se base sur celle de [QZ07], est également proposée en exercice chez [HL97].

Théorème 2 (Fejér)

Soit f une fonction 2π-périodique.

- *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, alors*
  1. *$(\sigma_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.*
  2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*
- *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, pour $p \in [1, \infty[$, alors*
  1. *$(\sigma_n(f))_n$ converge en norme p vers f sur $\mathbb{T}$.*
  2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$.*

Corollaire 2 (*Théorème de* Weierstrass)

Toute fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Théorème 3 (Jordan-Dirichlet)

Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Si $f(t_0^-)$ et $f(t_0^+)$ existent et si

$$h \mapsto \frac{1}{h}\left(f(t_0+h) - f(t_0^+) + f(t_0-h) - f(t_0^-)\right)$$

est borné au voisinage de 0. Alors :

$$S_n(f)(t_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f(t_0^+) + f(t_0^-))$$

Théorème 4

Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{T}$, alors $(S_n(f))_n$ converge normalement vers f sur $\mathbb{T}$.

1.2.4 Convergence en norme L^2 [Gou08, QZ07]

On peut munir l'espace $L^2(\mathbb{T})$ d'une structure pré-hilbertienne grâce au produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

Proposition 6

La famille $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Proposition 7

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors :

- *$S_n(f)$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_k, -n \leq k \leq n)$.*

- $S_n(f) \to f$ en norme L^2.
- $\|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$.

Proposition 8

On a l'équivalence : $f \in L^2(\mathbb{T})$ ***ssi*** $(c_n(f))_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$

On a en fait un résultat important qui complète cette propriété :

Théorème 5 (Parseval)

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$*, alors*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

En regroupant, on peut voir l'application qui donne les coefficients de Fourier comme une isométrie entre $L^2(\mathbb{T})$ et $\ell^2(\mathbb{T})$.

Exemple 1

[MVT92] Les coefficients de Fourier de la fonction 2π*-périodique* g *définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{si} \quad x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{sinon} \quad (x = 0) \end{cases}$$

et l'étude de leurs convergence permettent de calculer les séries usuelles :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

1.2.5 Régularité et décroissance [QZ07]

La transformée de Fourier échange régularité et décroissance, les deux propriétés suivantes énoncent ce résultat de façon rigoureuse :

Proposition 9

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$*, alors :*
- $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T}) \Longrightarrow (|n|^k c_n(f) \longrightarrow 0$ *quand* $|n| \to \infty)$.
- $c_n(f) \in O(|n|^{k+2}) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$

Proposition 10

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ *alors on a équivalence entre :*

(i) $(c_n(f))_n$ *est à décroissante rapide (* $\forall k, c_n(f) \in o(|n|^k)$ *)*

(ii) $f \in \mathcal{C}^\infty$.

Enfin la formule de Poisson, sous des hypothèses symétriques en terme de régularité et décroissance permet de faire un lien entre la série des coefficients de Fourier et f. La version donnée est celle de [QZ07] ; on peut également se référer à celle de [Gou08].

On définit la transformée de Fourier de $F \in L^1(\mathbb{R})$ par :

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t$$

Théorème 6 (***Formule sommatoire de*** **Poisson**)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose :

- *$\exists M > 0$, $\exists \alpha > 1$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha}$.*
- *$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < \infty$*

Alors on a la relation (formule de Poisson*) :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n)$$

Applications :

- Pour $a > 0$, on a : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$.
- La fonction Thêta de Jacobi : $\Theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t)$ vérifie la relation $\Theta(1/t) = \sqrt{t}\Theta(t)$ pour $t > 0$.

1.3 Applications des séries de Fourier

1.3.1 Inégalité isopérimétrique [Mad97, QZ07]

Théorème 7 (***Inégalité isopérimétrique [QZ07]***)

Soient $a < b$ et soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan *(continue simple fermée) de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de longueur L, délimitant une surface S. Alors :*

$$L^2 \geq 4\pi S$$

Et on a l'égalité ***ssi*** *γ est un cercle parcouru une seule fois.*

Corollaire 3

Le cercle est la courbe qui à périmètre fixé maximise la surface qu'il délimite ou de manière duale qui à surface fixée minimise le périmètre.

1.3.2 Résolution d'équations différentielles [MVT92]

Les séries de Fourier peuvent permettre de résoudre des équations différentielles ordinaires telles que :

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = |\sin(t)|$$

En effet les propriétés énoncés dans la proposition 2 permette de transformer les dérivations en multiplications des coefficients de Fourier par des polynômes, plus précisément : pour $|n| > 2$, l'équation devient :

$$n^4 c_n - 5n^2 c_n + 4c_n = c_n(t \mapsto |\sin(t)|) = \frac{1}{\pi(1-n^2)}$$

Et donc comme y est suffisamment régulière pour être égale à sa série de Fourier, on a :

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\cos(t) + \pi\sin(t) - \frac{2}{3}\cos(2t) + \sum_{|n|>2} \frac{e^{int}}{(1-n)^2(1+n)^2(2-n)(2+n)}\right)$$

1.3.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles [MVT92]

À l'origine, les séries de FOURIER ont été introduites pour résoudre des équations aux dérivées partielles du type "équation de la chaleur dans une tige" (parabolique) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

1.3.4 Transformée de FOURIER rapide (FFT) [Knu81]

Définition 6

On appelle transformée de FOURIER *discrète l'application* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *définie par* $\mathcal{F}(x) = \left(\sum_{t=1}^{n} x_t \omega_n^{st}\right)_{1 \leq s \leq n}$ *où* $\omega_n = \exp\left(-\frac{2i\pi}{n}\right)$.

Lien avec les coefficients de FOURIER :

$$\mathcal{F}(x)_p = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-2i\pi \frac{pk}{n}} = \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \exp\left(-ip\frac{2\pi k}{n}\right)$$

On peut donc écrire la transformée de FOURIER discrète de x comme somme de RIEMANN qui converge quand $n \to +\infty$ vers les coefficients de FOURIER d'une fonction f définie sur le tore valant $2n\pi x_k$ au point $\frac{2k\pi}{n}$.

Proposition 11

- $\mathcal{F}$ *est linéaire.*
- $\mathcal{F}(x * y)_k = \mathcal{F}(x)_k \mathcal{F}(y)_k$.

Soit maintenant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on note $\tilde{P} = (a_0, \cdots, a_n)^T$.
Alors $\tilde{PQ} = \tilde{P} * \tilde{Q}$ (produit de CAUCHY pour les polynômes)

Remarque 5

Le calcul direct d'un produit de convolution de 2 *vecteurs de taille* n *est en* $\Theta(n^2)$.

Corollaire 4

$\mathcal{F}(\tilde{PQ}) = \mathcal{F}(\tilde{P})\mathcal{F}(\tilde{Q})$

En conséquence $\tilde{PQ} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{P})\mathcal{F}(\tilde{Q}))$. Ainsi si on peut calculer $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ en $O(n \log n)$ alors on peut calculer le produit de polynômes en $O(n \log n)$.

C'est possible grâce à l'algorithme de la Transformée de FOURIER Rapide (ou FFT pour Fast Fourier Transform) qui utilise le principe de diviser pour régner : chaque problème est divisé en problèmes de taille plus petite que l'on résout récursivement.

A Banach-Steinhaus et son corollaire : existence de séries de Fourier divergentes

On notera $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ munit de la mesure $\lambda_{\mathbb{T}}$ (mesure quotient de la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0, 2\pi]$) et on confondra abusivement les fonctions (continues) 2π-périodiques et les fonctions (continues) sur $\mathbb{T}$.

Contexte : On va démontrer le théorème de Banach-Steinhaus en admettant le lemme de Baire, puis, dans une seconde partie appliquer le résultat à la divergence de la série de Fourier.

On rappelle le lemme de Baire :

Lemme 2

Soit (X, d, τ) un espace métrique complet. Alors il est de Baire, *c'est-à-dire :*

$$\forall (\Omega_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}},\ \big(\forall n \in N,\ \overline{\Omega_n} = X\big) \Longrightarrow \left(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n} = X\right)$$

Théorème 8 (Banach-Steinhaus)

Soit E un espace de Banach et F un evn. Soit $A \subset \mathcal{L}_c(E, F)$. Si

$$\forall x \in E, \qquad \sup_{T\in A} \|Tx\| < \infty$$

Alors

$$\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$$

Démonstration : Soit $\Omega_n = \{x \in E \mid \exists T \in A,\ \|Tx\| > n\} = \cup_{T\in A} \{x \in E \mid \|Tx\| > n\}$ est un ouvert de E et de plus, par hypothèse :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \{x \in E \mid \forall n,\ \exists T\ , \|Tx\| > n\} = \left\{x \in E \,\middle|\, \sup_{T\in A} \|Tx\| = \infty\right\} = \emptyset$$

Ainsi par contraposée du lemme de Baire dans E complet, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que Ω_n ne soit pas dense dans E. Considérons un tel N, et soit $x \in E$, $r > 0$ tel que $B_E(x, r) \cap \Omega_n = \emptyset$.

Soit $y \in S_E(0, 1)$, posons $y' = x + ry$. Alors $y' \in B_E(x, r)$ donc $y' \notin \Omega_N$ et par définition de Ω_N : $\forall T \in A$, $\|Ty'\| \leq N$.

$$\|rTy\| - \|Tx\| \leq \|T(x + ry)\| \leq N$$

Et donc $\|Ty\| \leq \frac{N+\|Tx\|}{r} \leq \frac{2N}{r}$. Ceci étant vrai quelque soit $y \in E$ avec $\|y\| = 1$ et quelque soit $T \in A$, on a donc :

$$\forall T \in A, \|T\| \leq \frac{2N}{r}$$

d'où le résultat.

Application à la divergence des séries de Fourier. Posons $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, $D_n : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

Notons alors

$$\ell_n : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & (D_n * f)(0) \end{array} \right) \qquad \ell_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}}(t)$$

C'est une application linéaire. De plus comme $\mathbb{T}$ est un compact, $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach (sous-espace fermé des applications bornées de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ munit de la norme uniforme).

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, ℓ_n est continue. En effet :

$$|\ell_n(f)| \leq \left| \int_{\mathbb{T}} D_n(-t) f(t) \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}} \right| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}} \leq \|D_n\|_1 \|f\|_\infty$$

(D_n est continue sur $\mathbb{T}$ donc bornée et donc L^1 car $\mathbb{T}$ est de mesure finie)

On a donc $\| \ell_n \| \leq \|D_n\|_1$, on va montrer qu'on a égalité.

Lemme 3 (*Calcul de D_n*)

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Preuve du lemme :

$$\begin{aligned} D_n(t) &= e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} \\ &= e^{-int} \frac{1 - e^{2int} e^{it}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{-int} e^{-i\frac{1}{2}t} - e^{int} e^{i\frac{1}{2}t}}{e^{-i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \end{aligned}$$

Posons alors $f_p = \dfrac{D_n}{|D_n| + \frac{1}{p}}$, on a de manière évidente les résultats suivants :

- $f_p \in \mathcal{C}$
- $\|f_p\|_\infty \leq 1$
- En fait $|f_p| \leq 1$

$$\ell_n(f_p) = \int_{\mathbb{T}} \frac{D_n(t) D_n(-t)}{|D_n(t)| + \frac{1}{p}} \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} \frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + \frac{1}{p}} \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}}$$

D'après la remarque ci-dessus, la fonction sous l'intégrale est dominée par $|D_n|$, et donc par théorème de convergence dominée, on peut passer à la limite :

$$\ell_n(f_p) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \|D_n\|_1$$

Et donc $\| \ell_n \| = \|D_n\|_1$

Lemme 4 ($\|D_n\|_1$)

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{2}{\pi^2} H_{2n+1} \sim \frac{2}{\pi^2}\ln(n)$$

Preuve du lemme

$$\int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{|\sin(\frac{1}{2}\,t)|}\,\mathrm{d}t$$

Or $|\sin(x)| \leq |x|$ et donc :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{|t|}\,\mathrm{d}t$$

Posons le changement de variable $u = \frac{(n+\frac{1}{2})t}{\pi}$, on obtient :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2n+1} \frac{|\sin(\pi u)|}{|u|}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_k^{k+1} \frac{|\sin(\pi u)|}{|u|}\,\mathrm{d}u$$

Et sur l'intervalle $[k, k+1[$, on a $|u| \leq k+1$ et $|\sin(\pi u)| = (-1)^k \sin(\pi u)$ d'où la minoration :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k+1}\int_k^{k+1}\sin(\pi u)\,\mathrm{d}u$$

On peut alors calculer l'intégrale :

$$\int_k^{k+1}\sin(\pi u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(\pi u)\right]_k^{k+1} = \frac{2}{\pi}(-1)^k$$

Finalement, en regroupant :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} = \frac{2}{\pi^2}H_{2n+1}$$

D'où le lemme

Conclusion. En regroupant les différents résultats, on en déduit que $(\|\!| \,\ell_n \,|\!\|)_n$ n'est pas bornée, et donc par contraposée du théorème de BANACH-STEINHAUS, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que $(|\ell_n(f)|)_n$ ne soit pas bornée. C'est bien dire que la série de FOURIER de f en 0 diverge.

Résultat plus fort. On peut montrer un résultat plus général quand au "nombre" de fonction de $\mathcal{C}$ dont la série de FOURIER diverge.

Définition 7 (*Partie Grasse*)

On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est grasse si c'est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Théorème 9 (Banach-Steinhaus *fort*)

Soit E un espace de Banach et F un evn. Soit $A \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Si

$$\sup_{T\in A} \|T\| = \infty$$

Alors

$$\left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{T\in A} \|Tx\| = \infty \right\} \text{ est une partie grasse de } E.$$

Alors

Démonstration :

$$\left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{T\in A} \|Tx\| = \infty \right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{T\in A} \{x \in E \mid \|Tx\| > n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

Or en reprenant la démonstration du premier théorème, si il existe un Ω_n qui ne soit pas dense alors on peut majorer uniformément la norme subordonnée des éléments de A. Comme par hypothèse cela est impossible, tous les Ω_n sont des ouverts denses, et donc l'ensemble considéré est une intersection dénombrable d'ouverts denses, i.e. une partie grasse.

Application. L'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques dont la série de Fourier diverge en 0 (ou de manière équivalente en tout point préalablement fixé de $\mathbb{R}$) est une partie grasse de $\mathcal{C}$.

Recasements :

- 208 - Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.
- 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

B Théorème de Fejér

Le texte qui suit est trop long pour faire un développement, il comporte :
- Preuves des propriétés du noyau de Fejér.
- Démonstration du théorème dans le cas $\mathcal{C}^0$.
- Démonstration du théorème dans le cas L^p.

Deux quelconques des trois points suffiraient pour durer environ 15 minutes.

Contexte : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$, et 2π-périodique. Soient D_n et K_n les fonctions définies par :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \qquad K_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} D_n(x)$$

Si $h, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, on note ici

$$(h * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

Théorème 10 (*de* Fejér)

Toute fonction continue, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Ce qui s'énonce aussi : $(x \mapsto e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille totale de $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème 11 (*Cas* L^p)

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique. Alors $\sigma_n(f) \to f$ dans L^p où $\sigma_n(f) = K_n * f$ est une suite de polynômes trigonométriques.

(1) – Le noyau de Fejér.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$K_m(x) = \begin{cases} m & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{1-\cos(mx)}{m(1-\cos(x))} & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K_m(x) \geq 0$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K_m(-x) = K_m(x)$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

(e) Pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(f) Pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$,

$$\int_{[-\pi,-\varepsilon[\cup]\varepsilon,\pi]} K_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(a) : On remarque que, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$K_m(2k\pi) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{p=-n}^{n} e^{2ikp\pi} = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} 2n+1 = \frac{m^2}{m} = m$$

et de plus pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \left(e^{-inx} \sum_{p=0}^{2n} e^{ipx} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \left(e^{-inx} \frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \frac{e^{-inx}}{1-e^{ix}} - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \frac{e^{-inx}}{1-e^{ix}} - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{e^{inx}}{e^{-ix}-1} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1-e^{-imx}}{1-e^{-ix}} \frac{1}{1-e^{ix}} - \frac{1-e^{imx}}{1-e^{ix}} \frac{1}{e^{-ix}-1} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1-e^{-imx}}{2-2\cos(x)} - \frac{1-e^{imx}}{2\cos(x)-2} \right) \\
&= \frac{1-\cos(mx)}{m(1-\cos(x))}
\end{aligned}$$

(b) et **(c)** se déduisent directement de **(a)**.

(d) : De plus on vérifie que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \, \mathrm{d}x = \delta_{0,k}$, ainsi par linéarité $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) \, \mathrm{d}x = 1$ et finalement $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

(e) : Enfin pour $x \in]\varepsilon, \pi[$, $|1-\cos(x)| \geq |1-\cos(\varepsilon)|$ et donc :

$$|K_n(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{|1-\cos(nx)|}{|1-\cos(x)|} \leq \frac{1}{n} \frac{2}{|1-\cos(\varepsilon)|}$$

Donc comme K_n et cette constante sont intégrables sur le compact $[\varepsilon, \pi]$, par théorème de convergence dominée,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(x) \, \mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

.

(f) se déduit immédiatement de **(e)** et **(b)**.

(2) – Produit de convolution :

$$(K_n * f)(x) - f(x) = (f * K_n)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y - \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x) \, \mathrm{d}y \right)$$

Ainsi, $|(K_n * f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) |f(x-y) - f(y)|$. On veut montrer que cette quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$ et ce indépendamment de x. Soit donc $\varepsilon > 0$.

f est continue sur le compact $[-2\pi, 2\pi]$ donc uniformément continue : $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x, z \in [-2\pi, 2\pi]$, $|x-z| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(z)| < \varepsilon/2$. En particulier pour $z = x-y \in [-2\pi, 2\pi]$, on peut considérer un tel η.

On peut découper l'intégrale de la manière suivante :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y = \int_{-\eta}^{\eta} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y + \int_{[-\pi,-\eta[\cup]\eta,\pi]} K_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y$$

D'où

$$(2\pi)|(K_n * f)(x) - f(x)| \leq \int_{-\eta}^{\eta} K_n(y)\varepsilon/2\,\mathrm{d}y + \int_{[-\pi,-\eta[\cup]\eta,\pi]} K_n(y)2\|f\|_\infty\,\mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2}\int K_n + 2\|f\|_\infty \int_{[-\pi,-\eta[\cup]\eta,\pi]} K_n$$

Or d'après le point **(f)**, la deuxième intégrale tends vers 0 donc il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, cette intégrale soit majorée par $\varepsilon/(4\|f\|_\infty)$, et d'après **(d)**, $\int K_n = 1$, d'où :

$$(2\pi)|(K_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2\|f\|_\infty \varepsilon}{4\|f\|_\infty} \leq \varepsilon$$

D'où le résultat.

(3) – Cas L^p, $1 \leq p < \infty$ On reprend la démonstration ci-dessus, sauf que l'on nécessite un résultat préalable :

Lemme 5

Soit $f \in L^p$ et soit $y \in \mathbb{R}$. On note $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$. Alors $\tau_y f \in L^p$ et $\|\tau_y f - f\|_p \longrightarrow 0$ quand $y \to 0$

Démonstration : On montre le résultat pour les fonctions continues à support compact (par convergence dominée) puis on l'étend par densité pour les fonctions de L^p. ■

On veut majorer $\|\sigma_n(f) - f\|_p^p =$

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\int_{\mathbb{T}} (f(x-y)-f(x))K_n(y)\,\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)-f(x)|K_n(y)\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x$$

Or en appliquant l'inégalité de Hölder avec pour mesure $K_n(y)\,\mathrm{d}y$ à l'intégrale "intérieure" ci-dessus, on peut la majorer par :

$$\left(\int_{\mathbb{T}} |1|^{p'} K_n(y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)-f(x)|^p K_n(y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{T}} |(\tau_y f - f)(x)|^p K_n(y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

En regroupant, on a alors :

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |(\tau_y f - f)(x)|^p K_n(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli car les fonctions considérés sont positives et obtenir ainsi : $\|\sigma_n(f) - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{T}} \|\tau_y f - f\|_p^p K_n(y)\,\mathrm{d}y$

Le découpage réalisé à la question précédente, plus l'utilisation du lemme, permet à nouveau de conclure que cette quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$.

(4) – Polynômes trigonométriques On note pour f fixé, $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e^{ikx}$. Or

$$(D_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} f(y)\,\mathrm{d}y \right) e^{ikx} = S_n(x)$$

Et donc par linéarité :

$$(K_m * f)(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_n(x)$$

C'est donc une suite de polynômes trigonométriques, qui converge dans la norme voulue vers f, ce qui démontre les théorèmes.

Recasements :

– 240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.
– 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

Remarques

Ce qui aurait pu être ajouté

– Séries de FOURIER sur des groupes (finis, abéliens localement compacts …)

Remerciements

Nous remercions monsieur Bachir BEKKA pour son aide à l'élaboration du plan.

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Analyse : Mathématiques pour MP*.* Ellipses Marketing, 2008.

[HL97] F. Hirsch and G. Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices.* Enseignement des mathématiques. Masson, 1997.

[Knu81] D.E. Knuth. *The art of computer programming. Volume 2, seminumerical algorithms.* Addidon-Wesley, 1981.

[Mad97] K. Madère. *PREPARATION A L'ORAL DE L'AGREGATION. Développement d'analyse.* CAPES-agrég mathématiques. Ellipses, 1997.

[MVT92] J. Moisan, A. Vernotte, and N. Tosel. *Analyse : suites et séries de fonctions.* Ellipses, 1992.

[QZ07] H. Queffélec and C. Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Sciences sup. Dunod, 2007.