239

Fonctions définies par une intégrale à paramètre, exemples & applications

Cadre : E est un espace mesuré et X un espace métrique. Pour $f : E\times X \to \mathbb{K}$ on s'intéresse à l'existence et aux propriétés de $F : x \mapsto \int_E f(t,x)\,dt$.

I Théorèmes de régularité et étude générale

Théorème 1 préliminaire (TCVD) (admis)
Soit (f_n) suite de fonctions intégrables $E \to \mathbb{K}$ qui converge presque partout vers $f : E \to \mathbb{K}$ mesurable.
S'il existe $\varphi \in L^1(E)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ p.p., alors f est intégrable et $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

I.1) Continuité

Théorème 2 Supposons les hypothèses suivantes vérifiées :
(i) $f(t,\cdot)$ continue pour presque tout $t \in E$
(ii) $f(\cdot,x)$ mesurable pour tout $x \in X$.
(iii) $\exists \varphi \in L^1(E)$, $(\forall x \in X, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ pp en $t)$
Alors, F est définie et continue sur X.

Exemple 3 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{itx}\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple 4 $x \mapsto \int_0^\infty x e^{-xt}$ n'est pas continue en 0.

Remarque 5 Sans affaiblir la conclusion, on peut remplacer l'hypothèse (iii) de domination par :
(iii') $\forall K \subseteq X$ compact, $\exists \varphi_K \in L^1(E)$, $(\forall x \in K,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$ p.p. en $t)$.

Exemple 6 La fonction Γ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, où $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$

Remarque 7 Si E est un compact, (iii') est immédiatement vérifiée par des constantes quand f est continue.

I.2) Dérivation

Ici, $X = I$, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 8 Supposons les hypothèses suivantes vérifiées :
(i) $f(t,\cdot)$ est dérivable pour presque tout $t \in E$
(ii) $f(\cdot,x)$ est intégrable pour tout $x \in X$.
(iii) $\exists \varphi \in L^1(E)$, $(\forall x \in X, |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leqslant \varphi(t)$ p.p. en $t)$
Alors F est dérivable sur X et $F'(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$

Exemple 9 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-t^2}\,dt$ est dérivable.

Contre-exemple 10 $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|t}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en zéro, alors que $x \mapsto x^2 e^{-|x|t}$ l'est.

Remarque 11 Comme précédemment, on peut, sans affaiblir la conclusion, remplacer l'hypothèse (iii) par :
(iii) $\forall K \subseteq X$ compact, $\exists \varphi_K \in L^1(E)$, $(\forall x \in K,\ |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leqslant \varphi_K(t))$ pp en t.

Exemple 12 Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et
$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln(t)\,dt$.

Application 13 Calcul explicite de $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt \quad (0 < a < b)$ par dérivation en la variable a.

Application 14 On peut maintenant calculer explicitement des intégrales en se ramenant à la résolution d'une EDO connue.

Exemple 15 Calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-t^2/2}\,dt$.

Corollaire 16 $k \in \mathbb{N}$. Supposons les hypothèses suivantes vraies :
(i) $f(t,\cdot)$ est $\mathcal{C}^k$ pour presque tout $t \in E$.

(ii) $f(\cdot, x)$ est intégrable pour tout $x \in X$.

(iii) $\forall 0 \leq j \leq k, \exists \varphi_j \in L^1(E), \left(\forall x \in X, \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t,x)\right| \leq \varphi(t)\right.$ p.p. en $\left.t\right)$

Alors, F est $\mathcal{C}^k$ sur X et $F^{(k)}(x) = \int_E \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t,x)\,dt$

Exemple 17. Γ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^k \,dt$

Corollaire 18 Ici, X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Supposons $k \in \mathbb{N}$ et les hypothèses suivantes vérifiées:

(i) $f(t,\cdot)$ est $\mathcal{C}^k$ pour presque tout $t \in E$

(ii) $f(\cdot, x)$ est intégrable pour tout $x \in X$

(iii) $\forall |\alpha| \leq k, \exists \varphi_\alpha \in L^1(E), (\forall x \in X, |\partial^\alpha f(x,t)| \leq \varphi_\alpha(t))$ pp en t.

Alors, F est $\mathcal{C}^k$ et pour tout $|\alpha| \leq k, \partial^\alpha F(x) = \int_E \partial^\alpha f(t,x)\,dt$

I. 3) Holomorphie

Ici, $X = \Omega$ ouvert de $\mathbb{C}$

Théorème 19 Supposons les hypothèses suivantes vérifiées:

(i) $f(t,\cdot)$ est holomorphe pour presque tout $t \in E$

(ii) $f(\cdot, z)$ est intégrable pour tout $z \in \Omega$.

(iii) $\exists \varphi \in L^1(E), (\forall z \in \Omega, |f(t,z)| \leq \varphi(t))$ pp en t.

Alors, F est holomorphe sur Ω, et $F'(z) = \int_E \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,dt$

Remarque 20 On peut, sans affaiblir la conclusion, remplacer l'hypothèse (iii) par:

(iii') $\forall K \subseteq X$ compact, $\exists \varphi_K \in L^1(E), (\forall z \in K, |f(t,z)| \leq \varphi_K(t))$ pp en t)

Exemple 21 Γ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(\cdot) > 0\}$

I.4) Exemple d'étude asymptotique

Ici $X = [a, +\infty[$.

Théorème 22 Supposons f de la forme $f(x,t) = e^{-x\varphi(t)} g(t)$ où g est continue et φ est $\mathcal{C}^2$. Si de plus:

(i) $f(\cdot, t)$ est intégrable pour tout $x \in X$

(ii) φ' s'annule en exactement un point t_0 et $\varphi''(t_0) > 0$

(iii) $g(t_0) \neq 0$

Alors, $F(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{x}} e^{-x\varphi(t_0)}$ avec $A = g(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(t_0)}}$

Corollaire 23 Formule de Stirling: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

II) Produit de convolution et régularisation

II.1) Définition et propriétés

Définition 24 On dit que deux fonctions $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont convolables si pp en x, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable. Alors on note $f * g$ leur convolée définie presque partout par $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$.

Prop 25 Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{supp}(g)$ compact, f et g sont convolables

Prop 26 Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, f et g sont convolables.

Prop 27 Si f et g sont convolables, g et f le sont et $f*g = g*f$

Prop 28 Si f et g sont convolables, $\mathrm{supp}(f*g) \subset \overline{\mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\, g}$
Si de plus f et g sont à support compact, $f*g$ aussi.

Prop 29 Si f et g sont convolables avec $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et $\forall |\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g$.

II.2) identités approchées et applications

Définition 30 Une identité approchée est une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tq $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subseteq B(0,\varepsilon)$ et $\int_{\mathbb{R}^d}\rho_\varepsilon = 1$

Exemple 31 On pose $\tilde\rho(x) = \mathbb{1}_{B(0,1)}(x)\exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right)$, puis $\rho_1(x) = \frac{\tilde\rho(x)}{\int_{\mathbb{R}^d}\tilde\rho}$, et enfin, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
Alors $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une identité approchée.

Théorème 32 Soit $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compact et Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant K. Alors il existe $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $[0,1]$ et qui vaut 1 sur K et 0 en dehors de Ω.

Théorème 33 $k\in\mathbb{N}$ et $1\leqslant p<+\infty$.
- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ (norme de la cvu sur tout compact)
- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

III) Transformation de Fourier

1.) Dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 34 Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ on définit sa transformée de Fourier $\hat f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $\hat f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt$

Exemple 35 On a déjà calculé la transformée de $x\mapsto e^{-x^2/2}$

Proposition 36 Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. $\hat f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\hat f(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$

Proposition 37 $\widehat{f+g} = \hat f+\hat g$, $\widehat{f*g} = \hat f\times\hat g$, $\widehat{f\times g} = \hat f * \hat g$

Application 38 Soit X, Y des variables aléatoires réelles, L^1, et de densités f_X et f_Y. On note φ_X et φ_Y leurs fonctions caractéristiques. Si X et Y sont indépendantes,
$$\widehat{f_{X+Y}} = \varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y = \hat f_X\hat f_Y = \widehat{f_X * f_Y}$$

Théorème 39 Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ tq $\hat f\in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{\hat f} = f(-x)$

Exemple 40 Dans l'exemple précédent, si $\widehat{f_{X+Y}}\in L^1$, $f_{X+Y} = f_X * f_Y$

III.2) L'espace de Schwartz

Définition 41 L'espace de Schwartz $S(\mathbb{R})$ est défini par:
$S(\mathbb{R}) := \{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \forall p,q\in\mathbb{N},\ x\mapsto x^p f^{(p)}(x) \text{ bornée}\}$

Exemple 42 $(x\mapsto e^{-x^2/2})\in S(\mathbb{R})$ et de manière générale $(x\mapsto P(x)e^{-x^2/2})\in S(\mathbb{R})$ si $P\in\mathbb{R}[X]$ mais $x\mapsto\frac{1}{1+x^\alpha}\notin S(\mathbb{R})$

Proposition 43 $L^1(\mathbb{R})\subseteq S(\mathbb{R})$

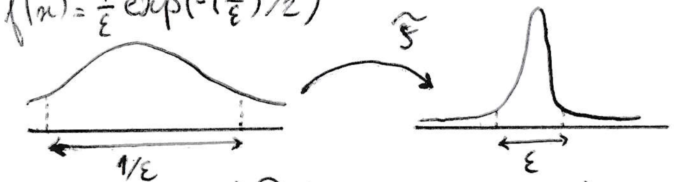
Erratum : c'est évidemment l'inverse, S inclus dans L1

Proposition 44 Si $f\in S(\mathbb{R})$, alors $\hat f\in S(\mathbb{R})$

Corollaire 45 $\mathcal{F}: f\mapsto\hat f$ définit une involution de $S(\mathbb{R})$

Proposition 46 pour $k\in\mathbb{N}$ et $f\in S(\mathbb{R})$, $\hat f(x) = \left(\frac{-i}{x}\right)^k\widehat{f^{(k)}}$

Remarque 47 $\mathcal{F}$ transforme les tailles caractéristiques d'ordre ε en tailles caractéristiques d'ordre $1/\varepsilon$. Notamment si $f(x)=e^{-(\varepsilon x)^2/2}$, $\hat f(x) = \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2/2\right)$



III.3) Prolongement sur $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 48 $\mathcal{F}: (L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)\longrightarrow(L^2(\mathbb{R}),\|\cdot\|_2)$ admet un prolongement continu sur $L^2(\mathbb{R})$ tout entier.

Théorème 49 pour $f,g\in L^2(\mathbb{R})$, $\langle f,g\rangle_2 = \langle\mathcal{F}f,\mathcal{F}g\rangle_2$
(Formule de Parseval)

Théorème 50 pour tout $f\in L^2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$
(Formule de Plancherel)