Leçons d'agrèg

Hélène Hivert

2011 – 2012

Avertissement

Le document proposé ici regroupe toutes les leçons que j'ai préparées pour l'agrégation. Je ne prétends pas être à l'origine de toutes les idées de plans qui y sont présentées car je me suis largement inspirée de ce qui a été fait dans la prépa agrèg de Rennes mon année, les quelques années précédentes, ainsi que -je tiens à le préciser à cause du nombre considérable d'emprunts que je lui fais- des leçons préparées l'année d'avant moi par Victor. Il y a beaucoup d'erreurs de frappe et des parenthèses non fermées tout au long du document, et probablement des erreurs plus graves, des erreurs de maths que je n'ai pas vues ou pas pris le temps de corriger une fois qu'on me les aura signalées. Je pense cependant que ce document peut être intéressant pour des gens décidant de préparer les leçons d'agrégation : ils y trouveront des références, des idées de plans (qui sont tout à fait discutables et auquels il convient d'avoir réfléchi) ainsi que des questions posées sur les leçons en classe et lors des oraux blancs. Certaines sont très classiques et méritent de tenter d'y répondre.
Vous pouvez bien évidemment me communiquer vos remarques concernant ce document.

Table des matières

Chapitre 1

101- Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg). Des exemples de nature différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel, sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas. Par ailleurs, il ne faut pas confondre exemples et remarques générales. Les actions naturelles de $PGL(2, \mathbb{F}_q)$ sur les droites du plan donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$.

Développements

Développements proposés :
- $\mathcal{A}_\backslash$ est simple pour $n \geq 5$, dans *Perrin*
- Décomposition de Frobenius, *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Théorème de Brauer, dans *Objectif Agrégation*
- Théorème de Molien, *Leichtmann, Exercices corrigés de mathématiques Polytechnique et ENS* et *Laurent Dietrich*
- Action du groupe modulaire sur le demi plan de Poincaré, *Alessandri, thèmes de géométrie*
- Isomorphie de $PGL(2, \mathbb{F}_q)$ pour $q = 2, 3, 4$ et 5, *Perrin* (?)
- Théorèmes de Sylow, *Perrin*

Idées pour le plan

Définitions et premières propriétés.
- *Actions de groupes* dans *Combes* la définition d'une action à droite et d'une action à gauche, des premiers exemples. Puis, définitions d'actions fidèles et transitives, orbites, stabilisateurs, centralisateur. Penser à *Calais* pour des exemples d'actions de groupes et aussi des exemples dans *Perrin.*
- *Action d'un groupe fini sur un ensemble fini* toujours dans *Combes* la formule des classes et la formule de Burnside.

Actions de groupes et théorie des groupes.
- *Théorèmes de Sylow* l'énoncé est dans *Perrin.* Et une application : Les groupes d'ordre pq ne sont pas simples (si $p < q$, voir qu'il n'y a qu'un seul p-Sylow qui est alors distingué). Ensuite, le théorème qui dit que $\mathcal{A}_\backslash$ est simple pour $n \geq 5$ (à l'oral dire que la démonstration utilise tout le temps l'action de $\mathcal{A}_n$ sur les éléments de même profil).
- *Théorème de Cauchy* dans *Combes* Le théorème de Cauchy.

– *Produits semi directs* dans *Combes* et *Perrin* la définition et la caractérisation. Donner les groupes diédraux en exemple.

Action de groupes et espaces vectoriels.

– $GLn(\mathbb{K})$ *agit sur* $Mn(\mathbb{K})$ *par conjugaison ou par congruence* (Trouver une référence pour ça, pour l'instant, ça vient de la leçon de Victor ! Il y a *Alessandri* qui en parle au début du livre mais pas tout à fait complètement) Application : réduction de Frobenius dans *Gourdon* (développement), autres réductions : réduction des formes quadratiques (Gauss), matrices équivalentes ssi elle ont même rang. Toutes les réductions sont dans *Gourdon*.
– *Représentations linéaires des groupes finis* Définitions, propriétés de base. Par exemple dans *Alessandri* et le théorème de Molien (Leichtmann - savoir où le trouver)
– *Action des groupes* S_n sur les polynômes à coefficients complexes : polynômes symétriques et sur $\mathbb{C}^n$ le théorème de Brauer (C'est apparemment dans *Goblot*. Mais en tout cas, les polynômes symétriques sont évoqués dans *Tauvel*, *Gourdon, algèbre*et *Ramis-Deschamps-Odoux*. Le théorème de Brauer est dans *Objectif Agrégation*).

Actions de groupes et géométrie

– *Angles orientés et espaces affines* voir *Combes* pour la définition d'un espace affine et *Alessandri* pour les angles orientés

Références

– François Combes, *Algèbre et géométrie*
– Perrin, *Cours d'algèbre*
– Josette Calais, *Éléments de théorie des groupes*
– Alessandri, *Thèmes de géométrie, groupes en situation géométrique*
– Tauvel, *Algèbre*
– Gourdon, *Algèbre*
– Ramis-Deschamps-Odoux, *Algèbre* 1
– Leichtmann pour le théorème de Molien
– Objectif Agrèg

Peuvent aussi probablement être utiles pour cette leçon : *Mneimé Testard*, *Tauvel, géométrie*

Chapitre 2

103- Exemples et applications des notions de sous-groupes distingués et de groupes quotients

Remarques et questions

Remarque (Remarque du jury d'agrèg). Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

Question. Qu'est-ce que c'est que la preuve du théorème de Cauchy ?

Réponse. Il faut l'existence d'un p-Sylow, centre non trivial puis on démontre Cauchy pour les groupes abéliens. (Ceci dit, ça serait mieux de savoir vraiment le faire).

Question. Déterminer tous les morphismes $\phi : S_n \to S_{n-1}$ pour $n \geq 5$.

Réponse. On considère le noyau de ϕ. Il ne peut pas être injectif, donc $\ker \phi \neq 1$, c'est donc un sous groupe distingué non trivial de S_n et donc c'est A_n ou S_n. Si $\ker \phi = S_n$, il s'agit du morphisme nul et sinon on a alors $|Im\phi| = 2$ et donc $Im\phi = \{e, \tau\}$ où τ est un élément d'ordre 2 et donc on a

$$\begin{aligned} \phi : S_n &\to S_{n-1} \\ \sigma &\mapsto \tau \text{ si } \epsilon(\sigma) = -1 \\ \sigma &\mapsto e \text{ sinon} \end{aligned}$$

Pour compter les morphismes, il faut alors compter les éléments d'ordre 2.

Question. Qu'est-ce qu'un groupe abélien simple ?

Réponse. Il s'agit des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier. (Utiliser le théorème de structure des groupes abéliens finis pour le prouver : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n non premier n'est pas simple. Et ensuite, cette forme constitue un sous groupe distingué dans un produit cartésien fini.)

Question. Que dire d'un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués ?

Réponse. Je n'ai pas la réponse, mais on peut déjà donner A_3 et $\mathbb{H}_8$ comme exemples de tels groupes. Pour $\mathbb{H}_8$, si un sous groupe est d'ordre 4, il est d'indice 2 et donc distingué et il n'y a qu'un seul sous-groupe d'ordre 2 : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est cyclique. Donc tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont distingués.

Question. Donner les sous-groupes distingués de S_4 avec une interprétation géométrique.

Réponse. Il s'agit de S_4, A_4 et $V_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. S_4 correspond aux isométries positives du cube. A_4 aux isométries positives du tétraèdre et V_4 aux isométries positives du rectangle.

Question. Soit G un groupe et P une partition de G telle que $\forall A, B \in P, \exists C \in P, AB \subset C$, où
$$AB = \{ab, a \in A, b \in B\},$$
Alors, P est l'ensemble des classes par un sous-groupe distingué.

Réponse. Soit $E \in P$ tel que $e \in E$. Soient x et y dans E. Alors :
$$xy \in EE \in C$$
et$C = E$ car $e \in C$. Soit $b \in P$ tel que $y^{-1} \in B$ alors
$$EB \subset E$$
$$BE \subset B$$

et donc $B = E$. Ainsi, E est un sous-groupe de G. Montrons qu'il s'agit d'un sous-groupe distingué.
Si $y \in E$ et $x \in B \in P$ alors on peut considérer $x^{-1} \in C$ et on a alors :
$$\begin{aligned} e \cdot x &\Rightarrow EB \subset B \\ x \cdot x^{-1} = e &\Rightarrow BC \subset E \\ x \cdot e = x &\Rightarrow BE \subset B \\ &\quad BEC \subset BC \subset E. \end{aligned}$$
Ce qui démontre le résultat voulu.

Développements

Développements proposés :
- A_n est simple pour $n \geq 5$, *Perrin, Cours d'algèbre*
- Classification des groupes d'ordre 8, *Gros pavé*

Autres développements possibles :
- Classification des groupes d'ordre 12, *Gros pavé*

Idées pour le plan

Définitions et premières propriétés (globalement tout en grande majorité dans le Calais) :
- *Définitions* Commencer par la définition des classes à droite et des classes à gauche (Perrin ou Tauvel) puis définir l'indice d'un sous-groupe dans un groupe et donner le théorème de Lagrange (Perrin)

- *Sous-groupes distingués* Définitions, propositions : la def dans le Perrin, propositions dans Calais (proposition : $H \lhd G \Leftrightarrow \forall x \in G, Hx = xH \Leftrightarrow \forall x \in G, xH \subset Hx$ (écrit dans le Madère aussi) et le théorème du Calais (un sous groupe est distingué ssi il est le noyau d'un morphisme de groupes). Exemples du Perrin. Dans Perrin : définition du normalisateur et propriété suivante. Définition d'un groupe simple et exemples du Perrin. En développement, A_n est simple pour $n \geq 5$.
- *Groupes quotients* Définition dans Calais. Propriété universelle du quotient (Calais). Sous groupes d'un groupe quotient (Calais) et en plus, sous-groupes de groupes quotients et les second et troisièmes théorèmes d'isomorphisme.

Résolubilité :
- *définitions* Dans Tauvel, définition des groupes dérivés (exemples dans Perrin si besoin), d'un groupe résoluble et propositions. Cas des groupes finis : Calais. Groupes nilpotents (encore Calais) et une proposition (nilpotent $\Rightarrow$ résoluble).
- *Groupe symétrique, groupe alterné.* Dans Tauvel, définition et propriétés de base : S_n est engendré par $\cdots$ conjugaison, les classes de conjugaison sont les cycles de même longeur. Morphisme signature. Définition de A_n et propriétés de A_n. A_n est simple, et A_n et S_n ne sont pas résolubles.
- *Groupes de matrices* Dans le Chambert-Loir (Algèbre Corporelle) les théorèmes et les lemmes.

Produit direct et semi-direct de groupes :
- *produit direct* Dans le Calais, définitions et propriété universelle.
- *Produit semi-direct* Dans Calais. Définition et def et prop. Développement : Groupes de cardinal 8.

Références

- Josette Calais, *Éléments de théorie des groupes*
- Perrin, *Cours d'Algèbre*
- Tauvel, *Algèbre*
- Antoine Chambert-Loir, *Groupes de matrices* côte 512.3
- Ramis-Warusfel, (Gros pavé). Pour le développement *Classification des groupes d'ordre* 8

Chapitre 3

104-Groupes finis. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg). Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries A_4, S_4 et A_5 et reler sur ces exemples géométrie et algèbre. La structure des groupes abéliens finis doit être connue.

Question. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes de cardinal 10.

Réponse. On a $10 = 2 \cdot 5$. Si G est un groupe abélien, alors $G \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Supposons maintenant que G n'est pas un groupe abélien. On note n_5 le nombre de sous-groupes d'ordre 5 de G (qui sont alors des 5-Sylows). On a :

$$n_5 \equiv 1[5] \text{ et } n_5 \mid 2,$$

Et donc $n_5 = 1$. En notant H le seul sous-groupe d'ordre 5 de G, on a alors $H \lhd G$. Soit maintenant n_2 le nombre de sous-groupes d'ordre 2 de G. On a :

$$n_2 \equiv 1[2] \text{ et } n_2 \mid 5,$$

Et ainsi : $n_2 = 1$ ou $n_2 = 5$.
Si $n_2 = 1$ alors $G \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et G est abélien.
Si $n_2 = 5$ alors on note K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5 les 2-sylows de G et on a : $K_1 \cap H = \{e\}$ car K_1 ne possède qu'un élément d'ordre 2 en plus de l'identité et ça n'est pas un élément de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. D'après le théorème de caractérisation du produit semi-direct, on a donc : $G \cong H \rtimes K_1$.

Question. Soit G un groupe fini et p le plus petit facteur premier tel que $p \mid |G|$ et soit H un sous-groupe d'incide p de G. Montrer que $H \lhd G$.

Réponse. On note G/H l'ensemble des classes à gauche modulo H. On a alors $|G/H| = p$. G opère sur G/H par translation à gauche :

$$\begin{aligned}\phi : G \times G/H &\to G/H \\ (g, aH) &\mapsto (ga).H\end{aligned}$$

Cette opération est transitive : $\forall a, b \in G, (ba^-1)aH = bH$, il n'y a donc qu'une seule orbite. Et le stabilisateur de aH est $\{g \in G | g.aH = aH\}$ qui est aHa^{-1}. Et ainsi, la formule des classes permet de conclure.

Développements

Développements proposés :
– Théorème de Burnside, dans *oraux X-ENS algèbre* 2.

– Groupes d'ordre 8 dans *Ramis-Warusfel ou dans* Combes

Autres développements possibles

– A_n est simple pour $n \geq 5$ dans *Perrin*

– Théorème de Sylow, dans *Perrin*

– Groupes d'ordre 12 dans *Ramis-Warusfel*

– Groupes des isométries qui conservent un solide donné (il y en a dans *Alessandri*)

– Table de caractères de S_4.

Idées pour le plan

Définitions et premières propriétés

– *Ordre et exposant* dans *Calais* définition (rapide) d'un sous-groupe d'ordre fini. Dans *oraux X-ENS algègre* 2 définition de l'exposant d'un groupe et théorème de Burnside (développement). Contre exemple de sous groupe d'exposant fini mais d'ordre infini : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ est d'ordre infini mais d'exposant fini (encore dans les *oraux X-ENS algèbre* 2)

– *Théorème de Lagrange* dans *Combes* le théorème de Lagrange, le corollaire qui dit que l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe et le début de l'exo suivant : Si K et M sont deux sous-groupes d'ordre k et m avec $k \wedge m = 1$ alors $K \cap M = \{e\}$.

– *Actions de groupes* dans *Combes* l'équation des classes et la formule de Burnside et le théorème de Cauchy et le corollaire qui suit et qui dit que pour que l'ordre de G soit une puissance de p il faut et il suffit que l'ordre de tout élément de G soit une puissance de p.

Cas particulier des groupes abéliens finis (Il y a un chapitre sur ça dans *Combes*)

– *Groupes cycliques* Fonction d'Euler, définition d'un groupe cyclique. Les exemples de *Combes.* Le théorème qui donne l'ordre d'un élément d'un groupe cyclique et qui dit si un élément est un générateur du groupe cyclique. Et on trouve le nombre de générateurs du groupe cyclique. Exemple : les générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{U}_{18}$. Ensuite, le théorème qui dit que tout groupe cyclique est isomorphe à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les sous-groupes d'un groupe cyclique. Et exemples simples.

– *Théorème de décomposition des groupes abéliens finis* dans *Combes* le théorème, la définition de la suite des invariants de G et le corollaire qui dit qu'il existe un élément a de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G. En application, la décomposition canonique d'un groupe abélien donné (dans l'exercice 2 par exemple).

Groupes non abéliens finis

- *Produit semi direct* dans *Combes*, la définition du produit semi-direct et la caractérisation.
- *Théorèmes de Sylow* dans *Perrin*, la définition d'un p-Sylow et les théorèmes de Sylow. Application (groupe d'ordre pq n'est pas simple par exemple). (C'est aussi dans *Combes*).
- *Les groupes symétriques* dans *Tauvel*, la définition des groupes symétrique (groupe des bijections d'un ensemble à n éléments. Son ordre). Puis le théorème qui dit que tout groupe d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n. Définition de la signature et de A_n, on donne des générateurs de S_n et A_n. Et dans *Perrin* le théorème qui donne S_n comme produit semi-direct de A_n et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- *Les groupes diédraux* dans *Alessandri* la définition d'un groupe diédral par générateurs et relations, la définition du groupe diédral avec le produit semi-direct.
- *Exemple* les groupes finis d'ordre 8 (Développement). Dans *Combes* ou bien *Ramis-Warusfel*

Applications

- *Géométrie* groupes d'isométrie des solides. Dans Alessandri (en fonction de la place qu'il reste, faire des dessins en annexe ou pas, le groupe d'isométrie du tétraèdre, du cube et du dodécaèdre régulier.
- *Représentations* dans *Ramis-Warusfel* Définition et table de caractères de S_4. Définition d'une représentation de groupes, d'un caractère et illustration avec la table de caractères de S_4.

Références

- Combes, *algèbre et géométrie*
- Josette Calais, *Éléments de théorie des groupes*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Ramis-Warusfel (Si on veut parler en détails des groupes d'ordre 8 ou 12) ou pour les représentations de groupes.
- Tauvel, *Algèbre*
- Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*

Chapitre 4

105- Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg). Le groupe symétrique n'est pas forcément plus facile à comprendre que les autres groupes. Il faut relier rigoureusement les notions d'orbites et d'action de groupe et savoir décomposer une permutation en cycles disjoints. Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations. Par ailleurs, un candidat qui se propose de montrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à A_5 devrait aussi montrer que A_5 est simple.
L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.
Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Les applications du groupe symétrique ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers.

Question. On sait que S_n est fini. Donner d'autres groupes finis ?

Réponse. Par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour $n = 1, 2$, on a : $S_n \cong \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$ mais pas pour $n > 3$ car alors S_n n'est pas commutatif.

Question. Est-ce que dans S_4 il y a un élément d'ordre 5 ?

Réponse. S_4 est d'ordre $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ et 5 ne divise pas 24. Donc non.

Question. Soit G un groupe fini et $g \in G$. On fait agir g sur G par translation à gauche

$$\begin{aligned} \phi_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

C'est une permutation. Quelle est sa signature ?

Réponse. On sait que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.
Si $g \cdot x = x$ alors $g = e$. Ainsi, sauf si $g = e$ il n'y a pas de point fixe pour ϕ_g.
L'orbite de $x \neq e$ est $\left(x, g \cdot x, \cdots, g^{d-1} \cdot x\right)$ où d est l'ordre de g. Les cycles sont donc les classes à gauche pour $\langle g \rangle$. Pour avoir la signature, il faut la taille des cycles qui est d.
Soit N le nombre de classes à gauche. Chaque cycle est de taille d et on a : $N = (G : H)$ avec $H = \langle g \rangle$. Comme $N = \frac{|G|}{|H|}$ on a $N = \frac{|G|}{d}$ et donc $\epsilon(\phi_g) = (-1)^{(d+1)N}$.
Si d est impair alors ϵ est trivial.

Caractériser les groupes tels qu'il existe un ϕ_g de signature -1. D'après ce qui est fait précédemment, il doit alors y avoir un g d'ordre pair. Donc on doit avoir le 2-Sylow cyclique.

Corollaire 4.1. *$|G| = 2n$ avec n impair n'est pas simple.*

Démonstration. En effet, $\exists a \in$ 2-sylow d'ordre 2 et d'indice n impair. Ainsi le ϕ_g correspondant est de signature (-1). Ce qui donne un morphisme non trivial :

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ g &\longmapsto \epsilon(\phi_g). \end{aligned}$$

□

Développements

Développements proposés :
- A_n est simple pour $n \geq 5$ dans *Perrin*
- Théorème de structure des polynômes symétriques, dans *Ramis-Deschamps-Odoux*

Autres développements possibles :
- Théorème de Brauer dans *Objectif Agrégation*
- Groupe des isométries du tétraèdre et du cube dans *Alessandri*
- Nombre de façons de colorier les faces d'un cube avec k couleurs différentes.
- Théorème de Frobenius Zolotarev dans *Objectif Agrégation* et *Perrin*
- Théorèmes de Sylow, *Perrin* (Car on utilise le théorème de Cayley pour le démontrer)

Idées pour le plan

Généralités sur le groupe symétrique
- *Définitions et premières propriétés* dans *Calais* la définition du groupe symétrique S_n, son cardinal et le théorème sur le centre du groupe symétrique pour $n \geq 3$. On donne le théorème de Cayley qui dit que tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n. (Dans *Tauvel* et *Perrin*)
- *Orbites et cycles* dans *Tauvel*, la définition du support d'une permutation, d'une orbite et de la longueur de la permutation (aussi dans *Combes* et *Calais*). Définition d'un k-cycle et d'une transposition. Deux cycles à supports disjoints commutent. Conjugaison des p-cycles dans *Perrin*
- *Générateurs du groupe S_n* dans *Tauvel* existence et unicité de la décomposition d'une permutation en produit de cycles à support disjoint. Définition du profil et corollaire sur les classes de conjugaison de S_n. Théorème sur le nombrede p-cycles et sur les générateurs de S_n.

Signature et groupe alterné
- *Signature d'une permutation* dans *Tauvel* La définition de la signature. Le cas particulier d'un cycle, du produit d'un cycle et d'une transposition, et

le théorème qui dit que la signature est un homomorphisme de groupes. Le théorème qui dit que c'est le seul morphisme de groupes non trivial de S_n dans $\mathbb{C}^*$.
- *Le groupe alterné* dans *Tauvel* la définition de A_n et son cardinal, la proposition pour des générateurs de A_n. Le théorème qui dit que le seul sous-groupe d'indice 2 de S_n est A_n. Dans *Perrin* le théorème qui dit que A_n agit $n-2$ fois transitivement sur $\{1 \cdots n\}$ mais pas $n-1$ fois transitivement. Puis $A_n$est simple pour $n \geq 5$ (développement). On rajoute le sous-groupe distingué de A_4. Dans *Tauvel* le théorème sur les groupes dérivés de S_n et A_n. Dans *Perrin* théorème sur la résolubilité de S_n. (ou sur les sous-groupes distingués de S_n). Tout sous-groupe d'indice n se S_n est isomorphe à S_{n-1}. Pour $n \neq 6$, tout automorphisme de S_n est intérieur.

Actions de groupe et groupe symétrique
- *Groupes d'isométries particuliers* dans *Alessandri* les groupes d'isométries des polyèdres.
- *Polynômes symétriques* dans *Ramis-Deschamps-Odoux* la définition des polynômes symétriques et des polynômes symétriques élémentaires, la définition du poids, les formules qui suivent puis le théorème de structure des polynômes symétriques (développement).
- *Algèbre multi-linéaire* dans *Objectif Agrégation* les matrices de permutation et le théorème de Brauer. Puis dans *Gourdon* la définition d'une forme multilinéaire alternée et le théorème qui dit que l'espace des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle.

Références

- Tauvel, *algèbre*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Combes, *algèbre et géométrie*
- Josette Calais, *Éléments de théorie des groupes*
- Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique* (pour les groupes d'isométrie des polyèdres).
- Gourdon, *algèbre* (pour les polynômes symétriques et les formes multi-linéaires alternées, mais y'en a aussi dans Tauvel)
- Objectif Agrégation (pour le théorème de Brauer)
- Ramis-Deschamps-Odoux, *Algèbre* 1

Chapitre 5

106- Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie. Sous groupes de $GL(E)$. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg). Il faut savoir réaliser S_n dans GL et faire le lien entre signature et déterminant.
Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $GL(E)$. Il faudrait que les candidats sachent faire correspondre sous-groupes et noyaux ou stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc). Á quoi peuvent servir des générateurs du groupe $GL(E)$? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral.

Réponse. La topologie est utile dans cette leçon car pas mal de propriétés (notamment l'exponentielle de matrices) sont montrées facilement sur des sous-ensembles denses de $GL(E)$ et sont obtenues pour tout $GL(E)$ par densité.
Les générateurs de $GL(E)$ sont utilisés pour démontrer certaines propriétés sur les générateurs qui sont ensuite étendues à tout le groupe linéaire.

Question. Un isomorphisme entre GLn^+ et GLn^- ?

Réponse. C'est un piège ! C'est impossible car GLn^- n'est pas un sous-groupe de GLn. Par contre, on peut trouver une bijection en multipliant tout simplement par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & & (0) \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix}$ et ça fait une bijection bicontinue.

Question. Gln^+ isomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times SL_n(\mathbb{R})$. Comment ça se démontre ?
Et pour l'isomorphisme $Gln(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C})$?

Réponse. Il faut exhiber les deux sous groupes :

$$\mathbb{R}_+^* \cong \{\lambda I_n | \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$$
$$Sl_n(\mathbb{R})$$

Pour le cas complexe, le groupe des matrices scalaires n'est pas en produit direct avec $SL_n(\mathbb{C})$ car $\omega_n I_n \in SL_n(\mathbb{C})$. Ce qui est vrai, c'est que

$$GL_n(\mathbb{C})/\{\lambda I_n | \lambda^n = 1\} \cong \mathbb{C}^* \times SL_n(\mathbb{C}).$$

Question. Est-ce que l'enveloppe convexe d'un fermé est fermée ?
Et est-ce que l'enveloppe convexe d'un ouvert est ouverte ?

Réponse. Non, l'enveloppe convexe d'un point et d'une droite est un ouvert par exemple. Par contre, l'enveloppe convexe d'un convexe est ouverte.

Remarque. Si on prend deux produits scalaires f_1 et f_2, alors $O(f_1)$ et $O(f_2)$ sont conjugués.
L'action de Gl_n sur les produits scalaires est transitive.

Développements

Développements proposés :
- Le théorème de Burnside, dans *oraux X-ENS, algèbre* 2
- Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$, dans *Audin* et *Perrin*

Autres développements possibles :
- Les générateurs de $SL(E)$ et de $GL(E)$ dans *Perrin*
- Des propriétés de l'exponentielle de matrice, dans *Objectif Agrégation*
- Le théorème sur les sous-groupes compacts de $GLn(\mathbb{R})$ en utilisant les résultats sur l'ellipsoïde de John Loewner, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3
- Théorème de Frobenius-Zolotarev

Idées pour le plan

Le cadre de cette leçon : $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Le groupe linéaire
- *Définitions et premières propriétés* Dans *Perrin* la définition de $GL(E)$ et de $GLn(\mathbb{K})$ avec isomorphisme non canonique puis dans *Gourdon, Algèbre* ou bien *Ramis Deschamps Odoux* des premières propriétés sur $GL(E)$: En dimension finie, $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$ {injective, surjective, bijective, $detf \neq 0$, $rgf = n$, f inversible à droite, f inversible à gauche }. Image d'une sous-espace vectoriel par $f \in GL(E)$. Matrices de changement de base (ou : détermination d'une application linéaire).
- *Le groupe spécial linéaire* Dans *Perrin* le déterminant est un morphisme multiplicatif de $GL(E)$ dans k^* puis la définition de $SL(E)$. la suite exacte qu'on obtient et la description de $GL(E)$ comme produit semi-direct de $SL(E)$ par k^*.
- *Générateurs, centres et groupes dérivés de $GL(E)$ et $SL(E)$* Dans *Perrin* les deux définition-proposition pour les transvections et les dilatations, les deux lemmes et le théorème : $SL(E)$ est engendré par les transvections, le corollaire sur les générateurs de $GL(E)$. Le théorème sur le centre de $Gl(E)$, le centre de $SL(E)$. Définition du groupe projectif linéaire $PGL(E)$ et de $PSL(E)$ et les théorèmes sur les groupes dérivés de $Gln(K)$ et $SLn(K)$ (mais savoir répondre aux questions sur les cas particuliers).
- *OPTIONNEL- Le cas des corps finis* Dans *Perrin* les théorèmes sur les cardinaux des groupes linéaires et des groupes projectifs linéaires sur $\mathbb{F}_q$, les théorèmes sur les isomorphismes exceptionnels et dans *Objectif agrégation* le théorème de Frobenius-Zolotarev.

D'autres sous-groupes de $GL(E)$

- *le groupe orthogonal* Dans *Perrin*, les définitions des groupes unitaires, orthogonaux et symplectique, la proposition qui dit que f est une isométrie ssi il conserve la forme quadratique, mais c'est mieux de l'énoncer dans le cas d'une forme quadratique et en écrivant $O(q)$. Dans *Oraux X-ENS, algèbre* 2 on introduit la notation $O(q)$ et on donne le théorème sur les sous-groupes compacts de GLn et dans *Audin* et *Perrin* le théorème sur les générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$ (développement). Puis dans *Tauvel*, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$ et on s'intéresse au groupe orthogonal euclidien. Définition du groupe orthogonal euclidien, c'est un groupe compact et réduction des endomorphismes (en produit de réflexions).
- *Des groupes finis de $GL(E)$* Dans *Objectif Agrégation* la définition des matrices de permutation, les propriétés de base : morphisme de groupes de S_n dans $GL_n(\mathbb{K})$, le lien entre la signature et le déterminant, le théorème de Brauer. On peut parler de la représentation régulière qui dit alors que tout groupe fini G est isomorphe à un sous groupe de $GL(E)$ où $\dim E = |G|$ mais ce n'est pas référencé. Et enfin, dans les *oraux X-ENS, algèbre* 2 le théorème de Burnside.

Actions de $GL(E)$

- *$GL(E)$ agit sur E* Dans *Gourdon, algèbre $Gln(E)$* opère à gauche sur E par $f \cdot x = c(x)$ (mais ce n'est pas dit comme ça) et action simplement transitive sur les bases (pareil, pas dit comme ça : c'est juste l'existence d'une unique matrice de passage).
- *$GL(E)$ agit sur $L(E)$* Dans *Gourdon, algèbre $GLn(E)$* opère à gauche sur $L(E)$ par conjugaison et par congruence (mais, encore une fois, c'est pas dit comme ça) en application : la décomposition de Frobenius, on peut trouver d'autres décompositions aussi, mais faut voir si y'a la place.
- *$Gl(E)$ agit sur* $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ Dans quoi ? On peut parler du théorème de Molien

Aspects topologiques de $GL(E)$

- *Des résultats et la décomposition polaire* Dans *Mneimé-Testard $GLn(\mathbb{C})$* est un ouvert dense de $Mn(\mathbb{C})$, application : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, les propositions sur la connexité de $GLn(\mathbb{C})$ et la décomposition polaire.
- *L'exponentielle de matrices Dans Mneimé-Testard* Y'a plein de propriétés, mais on peut dire que l'exponentielle de $Mn(\mathbb{K}) \longrightarrow GLn(\mathbb{K})$ est une application de classe C^1 est sa différentielle en O et l'application qui dit que $GLn(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Références

- Perrin, *Cours d'algèbre*

– Tauvel, *algèbre*
– Objectif agrégation
– Ramis Deschamps Odoux, *Cours de mathématiques.* 1 *algèbre*
– Gourdon, *Algèbre*
– Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*
– Audin, *Géométrie*

Chapitre 6

107- Représentation et caractère d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg). Le jury souhaite maintenir ces leçons à un niveau très raisonnable. Toute théorie globale est exclue et serait contre-productive au niveau de l'agrégation (induction, produit tensoriel, etc) et nous encourageons les candidats à traiter des exemples en petite dimension pour illustrer les aspects élémentaires de la théorie.

Question. Comment démontrer le théorème de Maschke sans utiliser le produit scalaire ?

Réponse. On peut mettre Maschke juste avant le lemme de Schur pour utiliser le produit scalaire. Et sinon, on fait une moyenne des projections sur le sous-espace.

Question. Donner les classes de conjugaison de S_3.

Réponse. Les classes de conjugaison regroupent les éléments ayant même profil. Pour S_3 il s'agit donc des transpositions, des trois cycles et de la classe de l'identité.

Question. Donner le caractère de la représentation associée au triangle équilatéral.

Réponse. C'est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Remarque. Le théorème de Lie-Kolchin est un peu hors sujet dans la leçon (ne pas le mettre en développement donc).

Question. Dans le cas des groupes abéliens, comment montre-t-on qu'un groupe abélien et son dual sont isomorphes ?

Réponse. On commence par les groupes cycliques : si g est un élément de G d'ordre divisant n, on pose :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto g^n, \\ &\text{et} \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ k &\longmapsto e^{\frac{2i\pi k}{n}} \end{aligned}$$

Dnas le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le dual est le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Puis le dual d'un produit est le produit des duaux et on applique le théorème de structure des groupes abéliens finis (qu'il faut savoir énoncer à la perfection).
L'isomorphisme entre un groupe abélien et son bidual doit pouvoir être expliqué. Pour conclure, l'isomorphisme d'un groupe cyclique sur son dual revient à choisir une racine n-ième de l'unité sur laquelle on envoie un générateur. Et ça implique aussi de faire le choix d'un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le choix d'un isomorphisme revient donc au problème du choix d'une base.

Question. Qu'est-ce que c'est que la représentation régulière du groupe ?

Réponse. On fait agir G sur lui-même par translation à gauche. La représentation associée est le représentation de permutation. Son degré est $Card(G)$. Et son caractère ? Soit $g \in G$ on a $\chi(1) = n$ et si $g \neq 1, \chi(g) = 0$ car il n'y a aucun point fixe par permutationd des éléments de G par translation à gauche par g. Si Z_i est un autre caractère sur G on a :

$$\begin{aligned} < \chi, Z_i > &= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi(s) \bar{Z}_i(s) \\ &= \bar{Z}_i(1) \\ &= n_i \text{ car } \chi \text{ est la représentation régulière .} \end{aligned}$$

Soit V la représentation régulière, sa décomposition est de la forme $V \cong n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_i V_i$ où $\dim V_i = n_i$ et $\dim V = n = n_1^2 + \cdots + n_i^2$.

Remarque (Remarques de Michel Coste sur la leçon). Il faut recouvrir tout le contenu du programme qui parle de représentations de groupes. Le cas des groupes abéliens *doit* figurer dans la leçon, ainsi que les notions de groupe dual et de transformée de Fourier. La présence de la transformée de Fourier peut être justifiée par des applications de la transformée de Fourier en utilisant la FFT : elle est utilisée en traitement du signal et les calculs de produits rapides. Voir *Peyré* pour la référence. Si on utilise plusieurs références, faire attention aux normalisations des transformées de Fourier.

En ce qui concerne de développement *Table de caractères de* S_4, il faut mettre de la géométrie mais on peut le fire directement et faire les applications géométriques après. Il faut faire le lien entre les classes de conjugaison et les classes de conjugaison des rotations du cube. L'outil à utiliser est le passage au quotient (représentation de S_3 par passage au quotient.

Comme dans toute représentation de permutation il y a une copie de la représentation trivial $Vect(e_1 + \cdots + e_n)$. Ce qui nous donne une représentation de degré 1 contenue dans toute représentation de permutation. Dans S_4 on peut avoir la représentation de degré 2 de cette manière aussi.

En développement, ne pas faire Lie-Kolchin mais plutôt des démonstrations de théorèmes importants sur les représentations. On peut aussi parler de la transformée de Fourier en développement si on veut.

Quand on a un gros sous-groupe abélien (de petit indice), on peut obtenir une borne sur les représentations irréductibles (qui est borné par l'indice du sous-groupe abélien) : une représentation de G induit une représentation de H (sous-groupe abélien de G), ses représentations sur H sont de dimension 1 et en remontant, les représentations sur G sont bornées par l'indice de H dans G. Par exemple, on peut dire que D_n a un sous-groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'indice 2.

Question (Autre exercice qui aurait pu être posé). En considérant la représentation de permutation, on a une sous-représentation de degré 1 et un supplémentaire stable qui donne une représentation de degré $n-1$. Elle est irréductible.

Réponse (Éléments de réponse). On peut le montrer si l'action de permutation associée à le représentation du groupe est doublement transitive.
G agit de facon diagonale sur $X \times X$ par $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$ l'action est doublement transitive ce qui se traduit en termes de nombre d'orbites et on peut conclure à l'irréductibilité.

Développements

Développements proposés :
- Table de caractère de S_4, dans *Peyré* et *Ramis-Warusfel* ou *Alessandri* pour la géométrie
- Théorème de Frobenius et lemmes, dans *Colmez*

Autres développements possibles :
- Table de caractères de A_5, dans *Ramis-Warusfel*
- Théorème de Molien, dans *Leichtmann* [D'après Victor]

Idées pour le plan

Représentations et caractères
- *Représentations* Dans *Colmez* la définition d'un représentation de groupe et les exemples qui suivent immédiatement. Puis, la définition de la dimension d'une représentation. Dans toute la suite, on se place dans le cadre de représentations de dimension finie.
- *Caractères* Dans *Colmez* la définition du caractère d'une représentation, du degré du cararactère, la remarque qui dit que $\rho_V(g)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les racines n-ièmes de l'unité si le groupe est d'ordre n. Ensuite, la proposition qui dit que la fonction caractère est une fonction centrale et la définition d'un caractère linéaire. Des exemples.
- *Construction des représentations* Dans *Colmez* la définition de la somme directe de représentations, la proposition sur les caractères, l'exemple de la représentation de permutation et de la représentation régulière, la représentation $Hom(V1, V2)$ et la proposition sur les caractères. La définition des opérateurs d'entrelacement et de représentations isomorphes. Des exemples si possible (dans les autres livres à priori)

Décomposition des représentations

- *Représentations et caractères irréductibles* Dans *Colmez* la définition d'une sous-représentation, d'une représentation irréductible et d'un caractère irréductible. Des exemples. On introduit le produit scalaire sur les représentations, sur les caractères et la notion d'orthogonalité des caractères. Et ensuite, le théorème de Maschke, le lemme de Schur, le lemme du théorème de Frobenius et le théorème de Frobenius (proposé en développement).
- *Applications* Dans *Colmez* les théorèmes qui permettent de définir les tables de caractères, soit le nombre de représentations irréductibles, deux représentations ayant même caractère sont isomorphes, condition nécessaire et suffisant d'irréductibilité puis le corollaire qui contient la formule de Burnside. Ensuite, la définition d'une table de caractères, la propriété sur l'orthogonalité des lignes de la table de caractères et quelques exemples : S_3 et S_4 (proposé en développement).

Cas des groupes abéliens [Il y a des trucs dans Colmez, mais peut-être que Peyré est plus adapté]

- *Dual et bidual de G* C'est tout au début de *Peyré* mettre la définition du dual et du bidual d'un groupe. Les théorèmes d'isomorphisme dans le cas des groupes abéliens et si on veut, on peut expliciter pour le cas des groupes cycliques (donner en exemple).
- *Transformée de Fourier discrète* Encore dans le premier chapitre de *Peyré* la définition de la transformée de Fourier discrète, la formule d'inversion et la propriété avec la convolution. Et des exemples si il y a la place.

Références

- Colmez, *Élements d'analyse et d'algèbre*
- Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
- Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées*

Chapitre 7

108- Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes.

Question. En parlant de sous-groupes engendrés par une partie de G. Que se passe-t-il si la partie est vide ?

Réponse. Le sous-groupe engendré par la partie vide est $\{e\}$.

Question. À propos du $PGCD$. On peut donner une définition du $PGCD$ qui fait appel à la notion d'anneau principal. Mais peut-on donner une définition du $PGCD$ pour les anneaux non principaux ?

Réponse. Dans le cas d'un anneau non principal, le $PGCD$ est le plus grand diviseur commun des éléments que l'on considère. On peut faire la relation entre les deux définitions en considérant que le $PGCD$ est le générateur du plus petit sous-groupe qui contient tous les $a_i\mathbb{Z}$.

Question. À propos des générateurs de GL_n, est-ce que c'est vrai pour tous les corps ? Et dire pourquoi seules les dilatations peuvent engendrer Gl_n.

Réponse. Non, ce n'est pas vrai sur tous les corps, on doit avoir au moins deux éléments. Pour la deuxième question, voire Perrin où c'est bien expliqué.

Question. À propos de la propriété universelle des groupes libres. Pour le produit libre, trouver un morphisme du produit libre dans H.

Réponse. On a :

$$\phi : G_1 \longrightarrow H$$
$$\psi : G_2 \longrightarrow H$$

et on pose

$$\Phi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$$

tel que $\Phi|_{G_1\times\{e\}} = \phi$ et $\Phi|_{\{e\}\times G_2} = \psi$.

Question. On peut parler des générateurs de $O(q)$ (dans le théorème de Cartan-Dieudonné notamment), mais que dire des générateurs de $SO(n)$.

Réponse. On peut les mettre, dans une bonne base, sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & (0) & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & \\ & & (0) & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

Il s'agit de symétries orthogonales par rapport à des sous-espaces de dimension 2. On peut aussi l'écrire comme produit de deux retournements (mais comment ?)

Question. Donner un exemple de groupe cyclique dans un corps quelconque cyclique.

Réponse. Dans un corps fini, le groupe multiplicatif est cyclique. Les sous-groupes finis de ce groupe multiplicatif sont cycliques.

Question. Quelle est la structure sur $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?

Réponse. Il s'agit d'un groupe additif.

Question. Est-ce que $D(G)$ est toujours cyclique ?

Réponse. Oui.

Question. Quel est le lien entre les homographies et le groupe linéaire ?

Réponse.
$$PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\{k \cdot Id, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Question. Est-ce que les éléments d'ordre 5 dans $\mathcal{A}_5$ sont tous conjugués ?

Réponse. Non, car 24 ne divise pas 60.

Question. Dans S_n, combien y-a-il de classes de conjugaison d'ordre 5 ? Et dans $\mathcal{A}_n$?

Réponse. Il y a une seule classe de conjugaison d'ordre 5 dans S_n et donc il y en a deux dans $\mathcal{A}_n$.

Question. Que peut-on dire sur les stabilisateurs de $\mathcal{A}_n$ et S_n ?

Réponse. On a $Stab_{\mathcal{A}_n} \subset Stab_{S_n}$.

Question. À propos des générateurs de $\mathcal{A}_n$. Faire le lien entre les 3-cycles et les carrés. Donner dans $\mathcal{A}_n$ un élément qui n'est pas un carré. Et dans $\mathcal{A}_5$?

Réponse. On a $(a, b, c)^2 = (a, bc, b)$. Donc tous les 3-cycles de $\mathcal{A}_n$ sont des carrés. En particulier, tous les éléments de $\mathcal{A}_5$ sont des carrés. Et si n est pair, $(a_1, \cdots, a_n)^2$ n'est pas un n-cycle si n est pair.

Question. Faire le lien entre homographie et $PGL(\mathbb{C})$.

Réponse. Il faut parler du groupe des déplacements.

Remarque. Les générateurs peuvent servir à fabriquer des morphismes d'un groupe dans un autre. En particulier pour des morphismes à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ ce qui nous donne la théorie des représentations de groupes.

Développements

Développements proposés :
– $\mathcal{A}_n$ est simple, dans *Perrin*

– Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$, dans *Audin* et *Perrin*

Autres développements possibles :

– Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$, dans *Perrin*

– Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré, dans *Alessandri*

Idées pour le plan

En introduction, dans *Tauvel* la définition d'un groupe engendré et d'une partie génératrice. Groupes abéliens

– *Groupes monogènes et cycliques* dans *Tauvel* la définition d'un groupe monogène et d'un groupe cylcique. Dans *Perrin* le théorème qui dit qu'un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans *Perrin* le théorème sur les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la définition et les résultats sur la fonction d'Euler et l'application. Enfin, toujours dans *Perrin* le résultat qui donne ce à quoi est isomorphe le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans le cas où p est premier. Dans *Perrin*, le théorème sur les groupes d'ordre pq.

– *Groupes abéliens finis* dans *Perrin* le lemme chinois puis dans *Combes* les résultats sur les groupes d'ordre premier et ensuite le théorème de structure des groupes abéliens finis.

– *Groupes abéliens de type fini* dans *Tauvel* la définition d'un groupe libre, l'exemple de $\mathbb{Z}$ et dans *Calais* la proposition sur les sous-groupes des groupes libres puis dans *Tauvel* la définition des groupes de torsion, et dans *Calais* le théorème de structure des groupes abéliens de type finis (mais il faut l'écrire avec des produits et pas des sommes directes).

Groupes symétriques et diédraux

– *Le groupe symétrique* dans *Tauvel* les définitions de $\mathcal{A}_n$ et S_n, les propositions pour les générateurs de S_n et $\mathcal{A}_n$ dans *Perrin* le théorème qui dit de $\mathcal{A}_n$ est simple (développement), et la définition des groupes dérivés avant de mettre la proposition sur les groupes dérivés. On donne le cas des $\mathcal{A}_n$ pour $n \leq 4$.

– *Le groupe diédral* dans *Combes* la définition et la caractérisation du produit semi-direct puis dans *Calais* la définition des groupes diédraux et leur écriture en termes de générateurs et dans *Perrin* le théorème qui donne D_n comme un produit semi-direct.

Le groupe linéaire

– *$GL(E)$ et $SL(E)$* dans *Perrin* la définition de $GL(E)$ et de $SL(E)$ puis les définitions et caractérisations des dilatations et des transvections avant de montrer les générateurs de $Gl(E)$ et $SL(E)$ et en application, le calcul des centres de $Gl(E)$ et $SL(E)$ et la proposition sur les groupes dérivés de $GL(E)$ et $Sl(E)$. Dans *Tauvel* dans le cas d'un corps fini, les cardinaux de ces deux groupes.

- *PGL_n et PSL_n* [Optionnel] dans *Perrin* la définition de PGL_n et de PSL_n. Si on a la foi, parler d'isomorphismes exceptionnels et d'action de PGL_2 sur le demi-plan de Poincaré.
- *$\mathcal{O}_n$* dans *Perrin* la définition du groupe orthogonal et du groupe spécial orthogonal. Dans *Perrin* et *Audin* le théorème sur les générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$ (développement) et en exemple la forme des éléments de $O(q)$ dans l'espace euclidien dans *Perrin*.

Homographies et groupe circulaire

- *À propos des homographies* Dans *Audin* la définition d'une homographie, le fait que les homographies munies de la composition forment un groupe, les générateurs des homographies (les similitudes directes et $z \longmapsto \frac{1}{z}$).
- *Le groupe circulaire* Dans *Audin* la définition du groupe circulaire, le fait qu'il est engendré par les inversions et les reflexions, que ses éléments préservent les angles non orientés, et que ses éléments sont les transformations qui préservent l'ensemble des cercles ou droites.

Références

- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Tauvel, *Algèbre*
- Calais, *Éléments de théorie des groupes*
- Combes, *Algèbre et géométrie*
- Audin, *Géométrie*

Chapitre 8

109- Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Cette leçon classique demande une préparation minutieuse. Tout d'abord n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Bien maîtriser le théorème chinois et sa réciproque. Distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques application arithmétiques des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.

Question. Énoncer le théorème des deux carrés.

Réponse. Soit

$$\Sigma = \left\{ n \in \mathbb{N} | \exists a, b \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2 \right\}$$

Alors, si p est premier, on a :

$$p \in \Sigma \Leftrightarrow p \equiv 2 \text{ ou } 1[4]$$

et si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ n'est pas premier :

$$n \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } \alpha_i \text{ impair} & p_i \in \Sigma \\ \text{si } \alpha_i \text{ pair} & p \text{ quelconque premier} \end{cases}$$

Développements

Développements proposés :
- Forme faible du théorème de progression arithmétique de Dirichlet, dans *Oraux X-ENS algèbre* 1
- Théorème de Sophie Germain, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Autres développements possibles :
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques dans $\mathbb{Z}[X]$, dans *Gourdon*
- Détermination des groupes d'ordre pq avec $p < q$ premiers, dans *Perrin*
- Structure de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$, p premier, dans *Perrin* et *Demazure*
- Théorème des deux carrés, dans *Gourdon*

Idées pour le plan

Généralités

- *Arithmétique dans* $\mathbb{Z}$ dans *Gourdon* la définition des classes de congruence modulo n et de $n\mathbb{Z}$ puis la définition des *pgcd* et *ppcm* et leurs propriétés. les théorèmes de Bezout et de Gauss, en application le fait qu'un entier k soit congru à la somme de ses chiffres modulo 9 dans *Combes*
- *L'anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans *Combes* la définition de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la définition de l'indicatrice d'Euler et quelques propriétés, et les propositions qui suivent : $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si a est premier avec n, le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le théorème de Fermat (en contre-exemple à la réciproque, on peut citer les nombres de Carmichael), l'application à $k^{\phi(n)}$ et la condition pour que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit un corps. Des exemples qui sont en grand nombre dans les exercices proposés dans *Combes*. La plupart des théorèmes sont aussi regroupés dans *Gourdon*

Structures de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- *Théorème chinois* dans *Gourdon* le théorème chinois et les applications. Dans *Combes* un exemple de résolution d'équation avec le théorème chinois.
- *Les automorphismes de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans *Perrin* tout ce qu'il y a dans le paragraphe du même nom.

Arithmétique

- *Nombres premiers* dans *Gourdon* le théorème fondamental de l'arithmétique, l'ensemble des premiers est infini et le théorèpe de Wilson (congruence de $(p-1)!$ à -1 modulo p). Dans *Demazure*, le théorème de Rabin-Miller et dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 la version faible du théorème de Dirichlet (développement).
- *Irréductibilité des polynômes* dans *Perrin* dans *Perrin* le critère d'Eisenstein et un exemple dans *Tauvel*
- *les carrés dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *où* p *est un premier* dans *Perrin* le propriétés sur les carrés de $\mathbb{F}_q$ en prenant $q = p$, les caractérisations et le corollaire. Puis dans *Gourdon* le théorème des deux carrés, la définition du symbole de Legendre et des propriétés, aussi d'autres propriétés dans *Perrin* (toutes ces propriétés sont écrites clairement dans *Tauvel* aussi).
- *Équations diophantiennes* dans *Combes* ce qu'il y a écrit sur les équations diophantiennes, un exemple de niveau terminale et le théorème de Sophie Germain dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 (développement).

Cryptographie

- *Système RSA* dans *Gourdon* l'explication du système et le pourquoi c'est difficile à casser.

Références

- Perrin, *Cours d'algèbre*

– Gourdon, *Algèbre*
– Combes, *Algèbre et géométrie*
– Demazure, *Cours d'algèbre, primalité, divisibilité, codes*
– Tauvel, *Algèbre*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Chapitre 9

110- Nombres premiers. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il faut savoir si 113 est un nombre premier ! Attention au choix des développements, ils doivent être pertinents (l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant !). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est, bien sûr, pas exigible au niveau de l'agrégation.

Question. Comment montrer que tout groupe abélien d'ordre pq avec p et q premiers distints est cyclique ?

Réponse. Si x est d'ordre p et y d'ordre q alors xy est d'ordre pq. Si le groupe n'est pas abélien le résultat est faux : les groupes diédraux sont d'ordre $2n$ et ne sont pas forcément cycliques.

Question (A propos des nombres de Mersen). Les nombres de Mersen sont les nombres de la forme $2^p - 1$ avec p premier. Si on considère les $2^n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, est-ce qu'on trouve d'autres nombres premiers ?

Réponse. Non. En effet si n n'est pas premier, on peut écrite $n = pq$ où au moins p est premier. Ensuite on a

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= (a^p)^q - 1 \\ &= (a^p - 1)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(a^p)^k\right) \end{aligned}$$

on a donc factorisé $a^n - 1$ de manière non triviale : il ne peut pas être premier.

Question. Expliquer la notion de premier dans $\mathbb{Z}$ à partir de la notion d'idéal premier. Est-ce que tout idéal premier est engendré par un premier ?

Réponse. On a

$$\mathbb{Z}/I \text{ intègre } \Leftrightarrow I \text{ premier}$$

et

$$\mathbb{Z}/I \text{ corps } \Leftrightarrow I \text{ maximal}$$

Question. Quel temps ça prend de montrer qu'un nombre est premier avec le crible d'Erathostène ?

Réponse. C'est en $\sqrt{n}$ et c'est polynômial en le nombre de chiffres de n. Il est possible de montrer qu'un nombre est premier en $\ln n$.

Question (En utilisant le test de Proth). L'objet de la question est de proposer un test de primalité pour les nombres de Fermat. Il faut montrer

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ premier } \Leftrightarrow 5^{2^{2^n-1}} \equiv -1[F_n]$$

Réponse. On pose $p = 2^n$ et on note $F_n = 2^p + 1$. On cherche a tel que $a^{2^{p-1}} \equiv -1[F_n]$ et d'après le test de Proth en prenant $a = 5$ ça marche. Mais on veut démontrer le théorème de Proth dans ce cas particulier. On veut donc montrer que si $\exists a$ tel que $a^{2^{p-1}} \equiv -1[F_n]$ alors F_n est premier. On commence par considérer un premier q tel que q divise F_n. On cherche l'ordre de 5 dans $\mathbb{F}_q^* =$.
Dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, F_n = 0$ et donc $2^{2^n} + 1 \equiv 0[q]$. On commence par montrer que l'ordre de 5 divise 2^{2^n}. On a :

$$\begin{aligned} 5^{2^{2^n-1}} &\equiv -1[F_n] \\ \Rightarrow \left(5^{2^{2^n-1}}\right)^2 &\equiv 1[F_n] \\ \Rightarrow 5^{2^{2^n}} &\equiv 1[F_n] \end{aligned}$$

On montre maintenant que l'ordre de 5 est exactement égal à 2^{2^n}. Si on avait l'ordre de 5 strictement inférieur à 2^{2^n}, alors l'ordre de 5 diviserait 2^{2^n-1} et ainsi

$$5^{2^{2^n-1}} \equiv 1[q]$$

et donc

$$\begin{aligned} q&|5^{2^{2^n-1}} + 1 \\ q&|5^{2^{2^n-1}} - 1 \end{aligned}$$

donc $q|2$ et ainsi $q = 2$ ce qui est impossible car F_n est impair.
Il ne nous reste plus qu'à montrer que $q \geq 2^{2^n+1}$. On remarque que dans $\mathbb{F}_q^*$ qui est d'ordre $q-1$ l'ordre d'un élément divise $q-1$. Alors $5^{2^{2^n+1}} = 5$ et donc $2^{2^n} \leq q-1$ ce qui nous donne $F_n \leq q$ et comme $q|F_n$ on a $F_n = q$. Donc F_n est premier.

Question (Carrés dans $\mathbb{F}_p^*$). Soit p un premier. Montrer que $-1 \equiv x^2[p]$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$ avec le théorème de Wilson. Et trouver une formule pour la racine carrée de -1.

Réponse. On suppose que $p \equiv 1[4]$ et d'après le théorème de Wilson, comme p est premier on a : $(p-1)! \equiv -1[p]$. On écrit $p = 4k+1$. Alors $(4k)! \equiv -1[p]$. C'est à dire :

$$\left(\prod_{k=1}^{p-\frac{1}{2}} k\right)^2 \equiv -1[p]$$

ce qui répond à la question (il manque probablement une ou deux étapes de calcul).

Développements

Développements proposés :
- Version faible du théorème de progression arithmétique de Dirichlet, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 1
- Théorème de Sophie Germain, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Autres développements possibles :
- Théorème des deux carrés, dans *Gourdon*
- Probabilité que deux entiers soient premier entre eux, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 1
- Loi de réciprocité quadratique, dans *Gourdon*

Idées pour le plan

Généralités
- *Définitions et exemples* dans *Gourdon* la définition d'un nombre premier, en application dans *Perrin* le fait que tout groupe d'ordre p est cyclique et dans *Gourdon* la caractéristique d'un corps qui est 0 ou un nombre premier. La définition de nombres premiers entre eux et les théorèmes de Bezout et de Gauss et le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.
- *Factorisation et décomposition en facteurs premiers* dans *Gourdon* le théorème fondamental de l'arithmétique. En application, les remarques qui suivent dans *Gourdon* et si on trouve où c'est, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{\ln 5}{\ln 7} \notin \mathbb{Q}$.
- *Fonctions multiplicatives* dans *Demazure*, la définition d'une fonction multiplicative, la définition de l'indicateur d'Euler, des propriétés et dans *Ramis-Warusfel* la définition et les propriétés de la fonction de Moëbius.

Arithmétique modulaire
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans *Gourdon* la définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et dans *Perrin* les propriétés sur les automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et ensuite le fait que c'est un corps si et seulement si n est premier. Et le théorème de Sophie Germain, dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 (développement).
- *Carrés dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans *Perrin* les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et les corollaires.

Recherche de nombres premiers
- *Tests de primalité simples* le crible d'Erathostène qui n'est écrit nulle part. Et dans *Gourdon* le théorème de Wilson.
- *Tests de primalité moins évidents* dans *Gourdon* le petit théorème de Fermat et le test associé dans *Hindry*. Toujours dans *Hindry* le théorème de Rabin-Miller et le test associé.
- *Répartition des nombres premiers* dans *Ramis-Warusfel* le théorème sur la divergence de la série des $\frac{1}{p}$, l'équivalent du nombre de premiers et dans

Oraux X-ENS, algèbre 1 le théorème de Dirichlet faible (développement).
Application : Cryptographie
- *Le système RSA* dans *Gourdon* l'explication du système de cryptographie RSA.

Références

- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1
- Gourdon, *Algèbre*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Demazure, *Cours d'algèbre, primalité, divisibilité, codes*
- Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées. Volume* 1

Chapitre 10

111- Anneaux principaux. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). On peut aussi donner des exemples d'anneaux non principaux. Les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$, accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent.

Question. Pourquoi est-ce que les inversibles de A sont de norme ± 1 ?

Réponse. Soit $u \in A^*$. On a :

$$uu^-1 = 1$$
$$N(u)N(u^-1) = 1$$

Et on a bien $N(ab) = N(a)N(b)$ car $N(a) = a\bar{a}$.

Question. Quels sont les inversibles d'un anneau d'entiers quadratiques ?

Réponse. Ce sont les éléments de norme ± 1

Question. On sait que $\mathbb{Z}[X]$ est factoriel non principal. À quelle condition $A[X]$ est-il principal ?

Réponse. $A[X]$ est principal si A est un corps. On commence par montrer que $A[X]$ principal entraînes A principal. Soit $u \in A$ et $I \in A$. Alors l'idéal engendré par I dans $A[X]$ est principal : $\langle I \rangle = (P) \in A[X]$ et $deg(P) = 0$ car $I \in A$ et donc $(P) = \sum_{i=1}^{n} Q_i x_i$ ou $Q_i \in A[X]$ et $x_i \in I$.
On considère (x)...La réciproque est vraie.

Question. Démontrer a premier $\Leftrightarrow$ a irréductible.

Question. Donner un exemple d'anneau avec un idéal premier non nul non maximal.

Développements

Développements proposés :
- Réduction de Frobenius, dans *Gourdon*
- $\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2)$ et $\mathbb{C}[X,Y]/(XY - 1)$ sont principaux, dans *Francinou-Gianella*

Autres développements possibles :
- Théorème des bases adaptées, dans *Goblot*
- $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ est non euclidien et principal, dans *Hauchecorne*
- Le théorème des deux carrés, dans *Perrin* ou *Gourdon*

Idées pour le plan

On commence par poser le cadre : A est un anneau commutatif, unitaire et intègre. Généralités

- *Définitions et premiers exemples* dans *Goblot* la définition d'un anneau principal, dans *Francinou-Gianella* la condition $A[X]$ principal $\Leftrightarrow$ A est un corps et des exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$ et l'anneau des séries formelles à une indéterminée, dans *Francinou-Gianella* avec ses éléments irréductibles. Ensuite, la proposition qui sert de lemme au développement puis le développement $\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ et $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ sont principaux, dans *Francinou-Gianella*.
- *Anneaux euclidiens* dans *Goblot* la définition des anneaux euclidiens, la proposition euclidien $\Rightarrow$ principal et dans *Francinou-Gianella* un contre exemple : un anneau principal non euclidien. La notion d'anneau euclidien est utile car on peut utiliser comme preuve de terminaison d'algorithmes des propriétés de décroissance du stathme comme invariant de boucle.

Arithmétique sur les anneaux principaux

- *PGCD, PPCM* dans *Goblot* la définition de $PGCD$ et de $PPCM$ dans un anneau principal, les théorèmes de Bezout et de Gauss. Dans *Objectif Agrégation* les définitions d'éléments premiers et irréductibles, la traduction en termes d'idéaux. Et en termes d'idéaux, le théorème qui est dans les exercices de *Gourdon*
- *Théorème chinois* dans *Goblot* le théorème chinois et dans *Combes* la résolution d'un système de congruences.
- *Anneaux factoriels* dans *Perrin* la définition d'un anneau factoriel et le théorème qui dit que principal $\Rightarrow$ factoriel.

Modules sur un anneau principal

- *Définitions* dans *Objectif Agrégation* la définition d'un module, d'un morphisme de modules, de base, de familles libre et génératrices. Modules de type fini.
- *Modules sur un anneau principal* dans *OA* le théorème de base adaptée et le théorème des facteurs invariants et en application la réduction de Frobenius (développement) et le théorème de structure des groupes abéliens finis. En exemple, les groupes abéliens finis d'ordre 8 dans *Francinou-Gianella* ou *Combes*.

Autres utilisations des anneaux principaux

- *Équations diophantiennes* dans *Combes* la définition d'une équation Diophantienne. Le théorème de Fermat qui suit et dans *Oraux X-ENS* 1 le théorème de Sophie Germain.
- *Étude de l'anneau des entiers de Gauss* dans *Perrin* les théorèmes sur $\mathbb{Z}[i]$ et le théorème des deux carrés.

Références

- Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation,* 1
- Goblot, *Algèbre commutative*
- Demazure, *Cours d'algèbre, primalité, divisibilité, codes*
- Objectif Agrégation
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- Gourdon, *Analyse*
- Combes, *Algèbre et géométrie*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Chapitre 11

112- Corps finis. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit aussi savoir résoudre les équations de degré 2. Les constructions de corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers $\mathbb{F}_q$. Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis ne doivent pas être négligées. Le théorème de l'élément primitif, s'il est cité, doit pouvoir être utilisé.

Question. Á propos de l'algorithme de Berlekamp. Que se pase-t-il si on applique l'algorithme à un polynôme irréductible ? En terme de complexité, est-ce un bon algorithme ?

Réponse. On arrive au critère d'arrêt. Et si on veut continuer, c'est impossible car ça ne marche pas dans l'algorithme. En termes de complexité, on doit tester tous les $\alpha \in \mathbb{F}_q$, ça croit vite avec le degré du polynôme. Mais c'est linéaire en le nombre d'éléments du corps. Selon le corps sur lequel on se place, c'est plus ou moins long.

Question. Écrire la table de multiplication de $\mathbb{F}_4$.

Réponse. Soit $P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2$ qui est irréductible. On a alors :

$$\mathbb{F}_4 \cong \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1).$$

On obtient alors le tableau suivant

	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$1+\alpha$
α	0	α	$1+\alpha$	1
$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	1	α

Question. Quels sont les sous-corps de $\mathbb{F}_{64} = \mathbb{F}_{2^6}$?

Réponse. On sait que $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n} \Leftrightarrow m|n$. Ainsi, on a $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_8 \subset \mathbb{F}_{64}$.

Question. Quels sont les n tels que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ soit cyclique ?

Réponse. Si n est premier, c'est bon. Sinon on a

$$(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/\phi(p^\alpha)\mathbb{Z}$$

Si n n'est pas premier, on applique le théorème chinois et on applique ça sur chaque composante. Le produit obtenu est cyclique si les ordres sont premiers entre eux.

Développements

Développements proposés :

– Théorème de Chevalley-Warning, dans *Serre*
– Théorème d'existence et d'unicité des corps finis, caractérisation des sous-corps, dans *Perrin* et *Gozard*

Autres développements possibles :

– Algorithme de Berlekamp, dans *Objectif Agrégation*
– Loi de réciprocité quadratique, dans *Gourdon*
– Formule d'inversion de Möbius, dans *Ramis-Warusfel*
– Formes quadratiques sur un corps fini.

Idées pour le plan

La définition qu'on prend des corps implique que, même quand ils sont infinis, ils sont commutatifs. On n'a donc pas besoin de citer le théorème de Wedderburn ni de s'appesantir sur la commutativité des corps finis.

Structure des corps finis

– *Définition* dans *Perrin*, la remarque préliminaire sur le cardinal des corps finis puis la définition de la caractéristique d'un corps. Les remarques qui suivent et la proposition sur le morphisme de Frobenius, avec la remarque dans le cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$.
– *Existence et unicité des corps finis* dans *Perrin* la proposition d'existence et d'unicité des corps finis et l'introduction de la notation $\mathbb{F}_q$, dans *Gozard* la caractérisation des sous-corps (développement).
– *Le groupe multiplicatif* $\mathbb{F}_q^*$ dans *Perrin* le lemme sur la fonction d'Euler, le théorème sur $\mathbb{F}_q^*$ et des exemples de générateurs de quelques groupes multiplicatifs (pour des petits corps).
– *Sous-corps et clôture algébrique de* $\mathbb{F}_q$ dans *Gozard* les théorèmes sur les sous-corps d'un corps fini et sur la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$.

Les carrés de $\mathbb{F}_q$

– *Généralités* dans *Gozard* les notations pour l'ensemble des carrés non nuls de $\mathbb{F}_q$, les remarques et corollaires et dans *Gourdon*, en application, le théorème des deux carrés.
– *Résidus quadratiques* dans *Gourdon* la définition du symbole de Legendre et des propriétés, dans *Gozard* d'autres propriétés et la loi de réciprocité quadratique. Un exemple de calcul donné dans *Gozard*. Les propriétés sont dans *Serre* aussi.

Polynômes sur un corps fini

– *Polynômes irréductibles sur un corps fini* dans *Gozard* le théorème qui dit pourquoi c'est intéressant de regarder les polynômes irréductibles d'un corps fini, des exemples de polynômes irréductibles dans des corps finis (il y en a quelques uns dans *Perrin* aussi), le théorème d'existence des polynômes

irréductibles et des exemples d'isomorphisme entre un corps fini et un quotient $\mathbb{F}_p/(P)$. En application, si on veut la formule d'inversion de Möbius et le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n sur $\mathbb{F}_p$, mais c'est un développement.
- *Algorithme de factorisation* dans *Objectif Agrégation*, l'algorithme de Berlekamp.
- *Nombre de solutions d'équation sur* $\mathbb{F}_q$ dans *Serre* le lemme et le théorème de Chevalley-Warning (développement) et les corollaires qui suivent.

Algèbre linéaire
- *Groupes linéaires sur* $\mathbb{F}_q$ dans *Perrin* les théorèmes sur les cardinaux des groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$ et les isomorphismes des groupes de petit cardinal.
- *Formes quadratiques sur* $\mathbb{F}_q$ dans *Perrin* le théorème qui donne les classes d'équivalence des formes quadratiques sur un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie.

Références

- Serre, *Cours d'arithmétique*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Objectif agrégation
- Gozard, *Théorie de Galois*
- Gourdon, *Cours d'algèbre*

Chapitre 12

113- Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010)*.* Les propriétés des polynômes cyclotomiques doivent être énoncées. Leur irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ doit être maîtrisée. Il est tout à fait possible de parler d'exponentielle complexe, de théorème du relèvement ou de séries de Fourier tout en veillant à rester dans le contexte de la leçon.

Question. L'isomorphisme d'un groupe abélien avec son dual est-il canonique ?

Réponse. Non, car il dépend du choix d'un générateur du groupe. Par contre, l'isomorphisme avec le bidual est canonique.

Développements

Développements proposés :
– Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, dans *Gozard*
– Lemme de Kronecker, dans *Szpirglas*

Autres développements possibles :
– Théorème de Dirichlet faible, dans *Oraux-X-ENS algèbre* 1

Idées pour le plan

Groupe des nombres complexes de module 1
– *Définitions* dans *Arnaudiès-Fraysse* la définition du groupe $\mathbb{U}$, le morphisme exponentielle, la définition des fonctions sinus et cosinus, les formules de Moivre et Euler en application la linéarisation de $\cos^n(x)$ et l'expression de $\cos(nx)$ en tant que polynôme en $\cos x$
– $\mathbb{U}$ *et la géométrie* dans *Arnaudiès-Fraysse* la définition de l'argument et de l'argument principal d'un nombre complexe. Dans *Audin* les théorèmes sur le groupe des isométries positives avec l'homéomorphisme avec $\mathbb{U}$, la définition des angles dans *Tauvel.*

Sous-groupe des racines de l'unité
– *Groupe des racines n-ièmes de l'unité* dans *Gozard* la définition des racines primitives de l'unité, leur cardinal, la définition du corps cyclotomique. En application, le théorème de Kronecker, dans *Szpirglas* (développement).
– *Polynômes cyclotomiques* dans *Gozard* la définition des polynômes cyclotomiques, le lemme et le fait qu'ils sont dans $\mathbb{Z}[X]$ et leur irréductibilité (développement). En application, le théorème de Dirichlet faible dans *Oraux X-ENS algèbre* 1.

Applications

– *Paramétrisation rationnelle de* $\mathbb{U}$ dans *Combes* dans la partie sur les équations diophantiennes, la paramétrisation rationnelle du cercle unité.
– *Représentations de groupes* dans *Peyré* la définition d'une représentation et d'un caractère si il y a la place, et le cas particulier des groupes cycliques.

Références

– Gozard, *Théorie de Galois*
– Szpirglas, *Mathématiques, algèbre L*3
– Arnaudiès-Fraysse, *Cours de mathématiques* 1- *Algèbre*
– Audin, *Géométrie*
– Tauvel, *Géométrie*
– Combes, *Algèbre et géométrie*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1
– Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*

Chapitre 13

114- Anneau des séries formelles. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, etc...

Question. Quel est le corps des fractions de $K[[X]]$?

Réponse. On a l'injection des fractions rationnelles dans le corps des fractions de $K[[X]]$, mais a-t-on mieux ? On a

$$Frac\,(K[[X]]) = \left\{ \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n X^n, a_n \in K, n_0 \in \mathbb{N} \right\}.$$

En effet pour l'inclusion directe on peut écrire

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n X^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n+n_0} X^n \right) \frac{1}{X^{-n_0}},$$

et pour l'inclusion réciproque on écrit un élément $S \in Frac\,(K[[X]]))$ comme $S = \frac{P}{Q}$ avec P et Q des fractions rationnelles. Si $v(Q) = 0, S = PQ^{-1} \in K[[X]]$. Sinon, $Q = X^{K_0} Q_1$ avec $v(Q_1) = 0$.

Question. Quel est le plus grand entier positif qui ne peut pas s'écrire comme somme de 7 et de 11.

Réponse. En fait, c'est dur comme question.

Question. Peut-on prendre la racine carrée d'une série formelle ?

Réponse. Oui, sous certaines conditions.

Développements

Développements proposés :
- Nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ (Nombres de Bell) dans *Oraux X-ENS algèbre* 1
- Partitions d'un entier en parts fixées, dans *Oraux X-ENS analyse* 2.

Autres développements possibles :
- Nombres de Catalan, dans *Saux-Picart*

Idées pour le plan

On se place sur un corps de caractéristique nulle.

Généralités sur $K[[X]]$

- *Structure* dans *Saux-Picart* les généralités sur l'anneau des séries formelles, définition, c'est un anneau commutatif intègre, le résultat sur ses éléments inversibles et la notation sous la forme d'une série génératrice. On définit la valuation et les propriétés de la valuation, dans *Francinou-Gianella* c'est un anneau principal et on donne les éléments irréductibles, on dit que c'est un anneau euclidien dans *Saux-Picart*. Et à la fin, la propriété 6.3 de Saux-Picart, à propos des fractions rationnelles qui n'ont pas 0 pour pôle. Dans *Arnaudiès*, tout au long du paragraphe, des exemples de toutes ces notions.
- *Opérations* dans *Arnaudiès-fraysse Algèbre* 1, la définition de la composition de séries formelles et le théorème qui suit et dans *Saux-Picart* la définition de la dérivation dans $K[[X]]$ et la définition de la primitive.
- *Exemples* dans *Arnaudiès* la liste de séries formelles usuelles.

Séries génératrices et suites récurrentes

- *Séries génératrices* dans *Saux-Picart* la définition d'une série génératrice et des exemples. En application, les partitions d'un entier en parts fixées (développement), dans les Oraux X-ENS analyse 2 (développement) et l'exemple qui suit avec les valeurs et dans les *Oraux X-ENS, algèbre* 1 les nombres de Bell et les formules de Newton dans *Francinou-Gianella* et dans *Leichtmann* le théorème de Molien.
- *Suites récurrentes linéaires* dans *Saux-Picart* la définition d'une suite réucurrente linéaire, la définition du polynôme caractéristique puis le théorème associé et en application la suite de Fibonacci (c'est juste après). Dnas *Arnaudiès-Fraysse* l'application aux polynômes de Tchebychev.

Équations différentielles dans $K[[X]]$

- *Définitions* dans *Saux-Picart* la définition d'une suite p-récurrente, d'une suite différentiellement finie et les deux propositions qui suivent.
- *Applications* dans *Saux-Picart* les nombres de Catalan (un peu détaillé pour pas se faire avoir) la proposition.

Références

- Francinou-Gianella-Nicolas, *oraux X-ENS algèbre* 1
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 2
- Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre* 1
- Saux-Picart, *Cours de calcul formel, algorithmes fondamentaux*
- Arnaudiès-Fraysse, *Cours de mathématiques* 1- *Algèbre*

Chapitre 14

115- Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications

Remarques et questions

Question. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux disjoints. Donner la décomposition en éléments simples de

$$\frac{P(x)}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)}.$$

Réponse. On note $Q(X) = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$. On suppose $P \wedge Q = 1$ sinon on simplifie. On écrit la division euclidienne de P par Q :

$$P = BQ + R$$

avec $deg(R) < deg(Q)$. On veut maintenant décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{R(x)}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)}.$$

On obtient :

$$\frac{R(x)}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)} = \frac{a_1}{X-\alpha_1} + \cdots + \frac{a_n}{X-\alpha_n}$$

où

$$a_i = \frac{R(\alpha_i)}{\prod_{j\neq i}(\alpha_i - \alpha_j)}.$$

Question. Quels sont les points à coordonnées rationnelles sur l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 6$?

Réponse. Le point $(2,1)$ est à coordonnées rationnelles sur l'ellipse. On va s'en servir pour trouver les autres. La méthode consiste à prendre les droites rationnelles qui passent par ce point et à regarder leur intersection avec l'ellipse. Les droites à pente rationnelle qui passent par $(2,1)$ ont pour équation :

$$\begin{cases} y = ax + b & a \in \mathbb{Q} \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

Ces points vérifieront donc le système :

$$\begin{cases} y = ax + (1-2a) \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

soit, en reprenant seulement la dernière ligne :

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left[ax + 1 - 2a\right]^2 &= 6 \\ (1+2a^2)x^2 + 4ax(1-2a) + (1-2a) &= 6 \end{aligned}$$

On a déjà une racine en $x = 2$, la seconde racine r vérifie (utiliser les relations coefficients racines) :

$$r = -\frac{4a(1-2a)}{1+2a^2} - 2$$

Ainsi, les points de l'ellipse à coordonnées rationnelles sont :

$$\begin{cases} x = -\frac{4a(1-2a)}{1+2a^2} - 2 & a \in \mathbb{Q} \\ y = ax + (1-2a) \end{cases}$$

auxquels il faut rajouter le seul point qui n'est pas atteint par ces droites : le symétrique de $(2,1)$ par rapport à l'axe des abscisses (il faudrait une droite de pense infinie) qui est donc $(2,-1)$.
On aurait aussi pu utiliser la paramétrisation rationnelle des ellipses, mais ça aurait été dur d'être sûrs de tomber sur des points à coordonnées rationnelles.

Développements

Développements proposés :
- Partitions d'un entier en parts fixées, dans *Oraux X-ENS analyse* 2
- Les automorphismes de $\mathbb{K}(X)$, dans *Oraux X-ENS algèbre* 1

Idées pour le plan

Tout au long de la leçon, il y a de très nombreux exemples dans les exercices à la fin du chapitre consacré dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès.*
Généralités
- *Construction* dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès* la définition du corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps, la manière dont on l'obtient par quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence à expliciter. On explicite alors aussi les deux lois : addition et multiplication et on donne la notation pour les classes d'équivalence. On définit ensuite la forme irréductible et dans *Tauvel* le degré (adapter au cas d'une seule variable).
- *Racines et pôles* dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès* la définition de l'ensemble des pôles d'une fraction rationnelle, de l'ensemble de définition, la fonction variationnelle et le cas d'égalité de fonctions rationnelles sur un corps commutatif infini. On écrit aussi la multiplicité d'un pôle.
- *Le corps* $\mathbb{K}(X)$ dans *Tauvel* le théorème qui dit que $\mathbb{K}(X)$ n'est jamais algébriquement clos. Puis la proposition sur les automorphismes de $\mathbb{K}(X)$ (développement).

- *Dérivation* dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès* la définitition de la dérivée formelle d'une fraction rationnelle, des propriétés, le fait qu'en caractéristique nulle une fraction rationnelle de dérivée nulle est constante. Un contre-exemple dans *Tauvel* quand on est dans le cas de la caractéristique strictement positive et l'application qui dit que le logarithme n'est pas une fraction rationnelle (via l'intégration).

Décomposition en éléments simples

- *Théorème de décomposition en éléments simples* dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès* le théorème de décomposition en éléments simples, l'explication des parties polaires et des parties entières, le cas d'un corps algébriquement clos et la formule qui va avec, dans *Tauvel* la formule pour les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$. En application le théorème de Lucas et des exemples de calcul dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès*.
- *Résidus* dans *Tauvel* la définition des résidus, le cas d'un corps algébriquement clos, la proposition pour le calcul des résidus et le corollaire puis le théorème des résidus et en application, un calcul de résidus dans *Amar-Matheron*.

Applications

- *Intégration des fractions rationnelles* dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès* la définition d'une primitive formelle d'une fraction rationnelle. La condition sur les résidus pour qu'une fraction rationnelle admette une primitive rationnelle et des exemples sur $\mathbb{C}$.
- *Application aux séries formelles* dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès* la condition pour l'inversibilité d'une série formelle et comme application le fait que toute fraction rationnelle qui n'admet pas 0 pour pôle peut être développée en série formelle. En exemple, le nombre de partitions d'un entier en parts fixées (développement).
- *Géométrie* dans *Combes* la paramétrisation rationnelle des coniques et une application (optionnel).

Références

- Lelong-Ferrand-Arnaudiès, *Algèbre* 1
- Tauvel, *Algèbre*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *oraux X-ENS algèbre* 1
- Amar-Matheron, *Analyse complexe*
- Combes, *Algèbre et géométrie*

Chapitre 15

116- Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Les applications ne concernent pas que les corps finis. Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que $\mathbb{C}$. Un polynôme réductible n'admet pas forcément de racines. Il est instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré $2, 3, 4$ sur $\mathbb{F}_2$.

Question. Est-ce que le polynôme $X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible ?

Réponse. On a

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

donc, non.

Question. À propos de l'algorithme de Berlekamp, est-ce que l'algorithme est identique pour un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$?

Réponse. Oui : on passe dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Q}$.

Question. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d \geq 1$. On suppose que $\exists x_1, \cdots, x_{2d+1} \in \mathbb{Z}$ tels que $P(x_i)$ est premier. Montrer que P est irréductible.

Réponse. Si on a $P = QR$ alors pour tout i on a $P(x_i) = Q(x_i)R(x_i)$. Donc

$$\forall i \in [\![1, 2d+1]\!], Q(x_i) = \pm 1 \text{ ou } R(x_i) = \pm 1,$$

or $deg(Q) \leq d - 1$ et $deg(R) \leq d - 1$. On a le résultat avec le nombre de racines maximal de Q et R.

Question. Soit l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$. Montrer qu'il est intègre.

Réponse. Dans un anneau factoriel, premier $\Leftrightarrow$ irréductible.

Remarque. A factoriel $\Rightarrow$ $A[X]$ factoriel.

Développements

Développements proposés :
- Théorème d'existence et d'unicité des corps finis, caractérisation des sous-corps, dans *Perrin* et *Gozard*
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, dans *Gozard*

Autres développements possibles
- Algorithme de Berlekamp, dans *Objectif Agrégation*
- Comptage des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_q$, dans *Francinou-Gianella* ou *Gozard*

Idées pour le plan

Attention ! La définition de *Gozard* des polynômes irréductibles est fausse !

On se place dans le cadre suivant : A est un anneau factoriel et $\mathbb{K}$ un corps (tous deux sont supposés commutatifs et unitaires).

Polynômes irréductibles

- *Définitions et premiers exemples* dans *Perrin* la définition de l'irréductibilité appliquée dans le cas des polynômes à une seule indéterminée puis en remarque le fait que si A est factoriel, alors A et intègre et $A[X]$ est intègre. En remarque dans *Gozard* une première liste d'exemples de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Dans *Gourdon* le théorème de d'Alembert Gauss et les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, le théorème qui dit que si un polynôme est irréductible sur un anneau, il est irréductible sur tout sous-anneau (mais où ?)
- *Critères d'irréductibilité* dans *Perrin* la définition du contenu d'un polynôme, d'un polynôme primitif, le lemme de Gauss, le théorème sur les irréductibles de $A[X]$, le fait que A factoriel entraine $A[X]$ factoriel puis dans *Gosard* le critère d'Eisenstein et un exemple qui suit immédiatement. Toujours dans *Gozard* le théorème de réduction modulo p, l'explication dans le cas de $\mathbb{Z}$ et l'exemple qui suit.
- *Éléments algébriques et polynôme minimal* dans *Gozard* la définition de l'idéal annulateur d'un élément, des éléments algébriques. La définition du polynôme minimal et la proposition sur le polynôme minimal et ensuite la définition d'une extension algébrique.

Adjonction de racines

- *Corps de rupture d'un polynôme* dans *Gozard* la définition du corps de rupture d'un polynôme, et le théorème d'existence et d'unicité à isomorphisme près du corps de rupture. En exemple, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_4$. La proposition sur les racines de P en fonction du degré de l'extension, et celle avec le pgcd du degré de l'extension et du degré du polynôme.
- *Corps de décomposition* dans *Gozard* la définition du corps de décomposition et le théorème d'isomorphisme. Des exemples. En application, le théorème d'existence et d'unicité des corps finis à isomorphisme près et la caractérisation des sous-corps, dans *Perrin* et *Gozard.*
- *Clôture algébrique d'un corps* dans *Gozard* la définition de la clôture algébrique d'un corps, des exemples ($\mathbb{C}$ est algébriquement clos), la définition de la clôture algébrique d'un corps , le théorème d'existence et d'unicité, un exemple non trivial.
- *Application : polynômes cyclotomiques* dans *Gozard* la définition des polynômes cyclotomiques, on en donne quelques uns, les propositions sur les polyômes cyclotomiques, en application : la version faible du théorème de Dirichlet dans *Oraux X-ENS, algèbre* 1 et le théorème qui dit que les polynômes

cyclotomiques sont irréductibles (développement).

Cas des corps finis

- *Polynômes irréductibles sur* $\mathbb{F}_p$ dans *Gozard* le pourquoi c'est intéressant d'étudier les polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_p$, les exemples de $\mathbb{F}_4$ et de $\mathbb{F}_8$, le théorème d'existences de polynômes irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_p$ et si on veut on définit la fonction de Möbius et on donne le théorème qui permet le dénombrement des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{F}_q$.
- *Un algorithme de factorisation* dans *Objectif Agrégation* l'algorithme de Berlekamp.

Références

- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Gozard, *Théorie de Galois*
- Objectif Agrégation

Chapitre 16

117- Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geq 2$). Aspects théoriques et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ni sur les polynômes symétriques. Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés.
Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbb{Z}$, l'algorithme peut être présenté sur un exemple.
Les applications aux quadriques, aux relations coefficients-racines ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ sur les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Question. Qu'est-ce que ça veut dire *Noethérien* ?

Réponse. Ca implique que tout idéal est de type fini. Toute suite d'idéaux strictement croissante est stationnaire à partir d'un certain rang.

Question (À propos des polynômes symétriques). Symétriser le monôme $X_1^2X_2^2X_3$.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Chevalley-Warning, dans *Serre*
- Théorème de structure des polynômes symétriques, dans *Ramis-Deschamps-Odoux, algèbre* 1

Autres développements possibles :
- Théorème de Molien, dans *Leichtmann*
- Comptage de racines de formes quadratiques, dans *Gantmacher*

Idées pour le plan

On prend, comme dans le titre de la leçon, $n \geq 2$ et A un anneau commutatif unitaire. K désignera toujours un corps commutatif.
Généralités
- *L'algèbre* $A[X_1, \cdots, X_n]$ dans *Ramis-Deschamps-Odoux* la définition d'un polynôme à n indéterminées, la notation, il s'agit d'une algèbre, on peut aussi la définir par réccurrence, si A est intègre alors $A[X_1, \cdots, X_n]$ l'est aussi.
- *Degré* dans *Ramis-Deschamps-Odoux*, la définition du degré partiel et du degré total d'un polynôme (et inventer un exemple sur place, c'est pas la mort), le degré du polynôme nul, les propriétés du degré, la définition du poids d'un monôme, et dans *Serre* le théorème de Chevalley-Warning (développement) et les corollaires.

– *Polynômes homogènes* dans *Ramis-Deschamps-Odoux* la définition d'un polynôme homogène, la propriété pour le produit, tout polynôme est combinaison linéaire de polynômes homogènes, l'application au degré d'un produit de polynômes dans un anneau intègre.
– *Propriété universelle et fonction polynôme* dans *Goblot* la propriété universelle, la définition d'une fonction polynôme et l'application au prolongement des identités.
– *Propriétés arithmétiques* Dans *Ramis-Deschamps-Odoux* le paragraphe sur les propriétés arithmétiques de $K[X_1, \cdots, X_n]$.

Applications
– *Polynômes symétriques* dans *Ramis-Deschamps-Odoux* la définition des polynômes symétriques, des polynômes symétriques élémentaires, le degré du polynôme obtenu en remplaçant les indéterminées par les polynômes symétriques élémentaires et l'ordre d'un polynôme symétrique. le théorème de structure des polynômes symétriques (développement).
– *Résultant* dans *Szpirglas* la définition du résultant et sa valeur en fonction des racines des polynômes.

Références

– Rudin-Deschamps-Odoux, *Cours de mathématiques, algèbre* 1
– Serre, *Cours d'arithmétique*
– Gantmacher, *Matrix theory, tome II*
– Tauvel, *Algèbre*
– Madère, *Leçons d'agrégation. Algèbre*
– Goblot, *Algèbre commutative*
– Gourdon, *Algèbre*
– Szpirglas, *Mathématiques Algèbre L*3

Chapitre 17

119 -Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

Remarques et questions

Remarque (Remarque du jury d'agrèg 2010). Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle demande un certain recul.

Question. Matrice de passage de B à B' ou de B' à B ? Comment retrouver si c'est $P^{-1}AP$ ou PAP^{-1} ?

Réponse. Si P est la matrice de passage de B' à B, c'est la matrice de l'identité de B dans la base B' :

$$P = Mat(I, B, B')$$

Si $A = Mat_{B'}(f)$ est la matrice de l'endomorphisme f dans la base B' et $\tilde{A} = Mat_B(f)$ alors

$$\begin{aligned} P^{-1}Ap &= Mat(I, B', B)Mat_{B'}(f)Mat(I, B, B') \\ &= Mat(f, B, B). \end{aligned}$$

Question. Soit $n \geq 2$ et A une matrice non nulle de taille n telle que $Tr(A) = 0$. Montrer que $\exists e$ tel que (Ae, e) soit une famille libre.

Réponse. Si tous les vecteurs étaient liés à leur image, A serait une homothétie. La condition sur la trace impliquerait la nullité du rapport de l'homothétie, ce qui est impossible.

Remarque. Doit-on mettre toutes les décompositions ? Non pas forcément, c'est un sujet très vaste et il faut faire des choix (Jordan. . .)
On peut parler de théorie des matrices sur des corps finis mais c'est dangereux et il y a beaucoup de choses à mettre. Donc ce n'est pas idiot de se cantonner au cas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut quand même parler de l'action par multiplication sur un corps quelconque. La décomposition de Frobenius est valable sur n'importe quel corps alors que la réduction de Jordan n'est pas valable sur un corps non algébriquement clos.

Développements

Développements proposés :
- Décomposition de Frobenius, dans *Gourdon*
- Réduction des endomorphismes normaux, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Théorème de Brauer, dans *Objectif Agrégation*
- Crochets de Lie, dans *Oraux X-ENS, algèbre*
- Décomposition de Bruhat, dans *Oraux X-ENS algèbre* 1
- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$, dans *Oraux X-ENS algèbre*

Idées pour le plan

L'idée est de chercher, pour différentes actions, de trouver des représentants simples dans les orbites. Action par translation et pivot de Gauss

- L'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ par translation à gauche est $P \cdot A = PA$ (et pour la translation à droite $P \cdot A = AP^{-1}$). Dans *Voedts*, la définition des matrices de transvection, dilatation et permutation, les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, le lemme du pivot de Gauss et en applications les résolutions d'équations, le rang caractérise les matrices à équivalence près et les générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ dans *Perrin*.

Action de Steinitz - matrices équivalentes

- *Sur un corps* dans *Objectif Agrégation* la définition de l'action de Steinitz, la vision en termes de changement de base, deux matrices dans la même orbite sont équivalentes, deux matrices équivalentes ont même rang, équivalence à une matrice J_r qui est une caractérisation du rang et les applications pour le rang de la transposée, l'adhérence de GL_n dans M_n, indépendance du rang vis-à-vis du corps de base. Et en application l'ensemble des matrices de rang $\leq r$.
- *Sur un anneau euclidien - Facteurs invariants* dans *Serre* le théorème sur les facteurs invariants d'une matrice.

Action par conjugaison - matrices semblables

- *Introduction* GL_n agit à gauche sur M_n par conjugaison : $(P, M) \mapsto PMP^{-1}$
- *Invariants de similitude et réduction de Frobenius* dans *Gourdon* la définition de la matrice compagnon, le théorème qui suit puis le théorème sur les invariants de similitude et la réduction de Frobenius (développement) et en corollaire la réduction de Jordan, toujours dans *Gourdon*
- *Matrices normales* dans ce paragraphe on donne l'action de O_n sur M_n dans les cas $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ et on donne des représentants d'orbites pour certains types de matrices. Dans *Grifone* la définition des matrices normales et les différentes classes de matrices qui en font partie, le théorème de réduction des matrices normales sur $\mathbb{R}$ avec les lemmes dans *Gourdon* (développement), le théorème de réduction des matrices symétriques réelles et des matrices hermitiennes, pour les matrices unitaires les valeurs propres sont toutes de module 1 et dans *Mneimé-Testard* la réduction des matrices orthogonales sur $\mathbb{R}$.
- *Groupe symétrique et matrices de permutation* dans *Objectif Agrégation* l'action du groupe symétrique sur $M_n(\mathbb{K})$ et le théorème de Brauer.

Action par congruence

- Dans *Gourdon* la définition de matrices congruentes (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et dans *Grifone* la matrice associée à une forme quadratique, le théorème de réduction des formes quadratiques et le théorème de Sylvester pour la réduction des formes quadratiques réelles avec la définition de la signature.

Références

- Objectif Agrégation
- Voedts, *Cours de mathématiques*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Denis Serre, *Les matrices*
- Gourdon, *Algèbre*
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*

Chapitre 18

120- Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). C'est une leçon qui contrairement aux apparences est devenue difficile pour les candidats. Il faut absolument la préparer avec méthode. Nombre d'entre eux n'ont pas été capables de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est-il aussi de dimension finie ?

Remarque. Dans la définition d'espace vectoriel normé, il faut prendre un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Question. Comment montre-t-on que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe ?

Réponse. On a $GL_n\mathbb{C}) = \det^{-1}(\{0\})$, ce qui répond à la question. On peut aussi trouver un chemin pour prouver la continuité par arcs.

Question. Avec le rang, peut-on caractériser les classes de similitude ?

Réponse. Non. Deux matrices de même rang sont équivalentes mais pas forcément semblables. Les matrices suivantes sont de même rang mais non semblables :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, rg((A-\lambda I_n)^m) = rg((B-\lambda I_n)^m)$. Que peut-on dire de A et B ?

Réponse. $rg(A - \lambda I_n) = rg(B - \lambda I_n)$ donc A et B ont mêmes valeurs propres. On va montrer que A et B sont semblables. Si λ n'est pas valeur propre, l'égalité donne $n = n$ donc c'est assez peu intéressant. Si λ est valeur propre, on trouve que les blocs de Jordan associés à λ dans A et B ont même taille. Donc A et B ont même décomposition de Jordan. Donc elles sont semblables.

Question. Pourquoi est-ce qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie ?

Réponse. On considère $F \subset E$ et on prend une famille libre maximale de F. Elle est de dimension $\leq n = dim(E)$ donc finie, donc c'est une base.

Question. Quelle est la forme générale des matrices de rang 1 ?

Réponse. Toutes les colonnes sont colinéraires : $M = (\lambda_1 C, \lambda_2 C, \cdots, \lambda_n C)$ donc $M = (C)(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. Il s'agit donc d'une colonne multipliée par une ligne.

Développements

Développements proposés :
– Théorème des extrêma liés, dans *Gourdon, Analyse*

- Réduction des endomorphismes normaux, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :

- Théorème de Molien, dans *Leichtman*
- Théorème de l'élément primitif, dans *Chambert-Loir*
- Étude de l'action de Steinitz, dans *Mneimé-Testard, Cognet* et *Gourdon*
- Dimension maximale de sous-espaces de matrices de rang $\leq p$, dans *Oraux X-ENS algèbre* 1

Idées pour le plan

On se place sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Théorie de la dimension

- *Familles libres, génératrices, bases* dans *Grifone* la définition d'une famille génératrice, des exemples simples, la définition d'un espace vectoriel de dimension finie, des exemples, la définition d'une famille libre, des exemples, les propriétés sur les familles libres et liées, la définition d'une base, les propriétés, des exemples, le théorème d'existence de bases, le corollaire et le théorème de la base incomplète. Dans *Grifone* un peu plus loin, l'exemple de la méthode du pivot qui permet d'extraire une base d'une famille de vecteurs. Et un exemple pratique.
- *Théorèmes fondamentaux sur la dimension* dans *Grifone* le lemme qui dit que dans un espace vectoriel de dimension n toute famille de $n+1$ vecteurs est liée puis le théorème qui dit que toutes les bases ont même cardinal, les corollaires et des exemples, la dimension d'un produit cartésien, la dimension des sous-espaces vectoriels, enocre des exemples, dans *Grifone* la définition d'une somme directe, le théorème sur la dimension d'une somme directe et la formule pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels. On peut citer les démonstrations par récurrence sur la dimension et donner en exemple le théorème de réduction des endomorphismes normaux, dans *Gourdon* (développement).

Rang et applications linéaires

- *Définitions, théorème du rang* dans *Grifone* la définition du rang d'une application linéaire et du rang d'une famille de vecteurs, la définition du rang d'une matrice, dans *Grifone* mais un peu avant, deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension, le théorème du rang, des exemples dans les exercices, et l'équivalence pour les endomorphismes entre bijection, injection et surjection. Dans *Objectif Agrégation* l'application aux polynômes interpolateurs de Lagrange.
- *Caractérisations et calcul du rang* dans *Gourdon* l'équivalence à une matrice J_r, deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang,

les matrices extraites, dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 la dimension maximale d'un sous-espace de matrices de rang $\leq p$, dans *Gourdon* la propriété sur la trace d'un projecteur.
- *Formes linéaires* dans *Grifone* la définition d'une forme linéaire (on est en dimension finie donc elles sont toutes continues), leur noyau est un hyperplan, définition de l'espace dual, isomorphisme entre E et son dual (on est en dimension finie), définition de la base duale et des exemples simples. En application, le théorème des extrêma liés dans *Gourdon, analyse.* Dans *Grifone* l'isomorphisme canonique entre E et son bidual.

Extensions de corps et dimension
- Dans *Gozard* la définition d'une extension de corps, du degré d'une extension, des exemples simples, le théorème de la base téléscopique, la multiplicativité du degré, la définition d'un élément algébrique, la définition d'une extension algébrique et enfin, le degré d'une extension algébrique.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Gourdon, *Algèbre*
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Gozard, *Théorie de Galois*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 1
- Objectif Agrégation

Chapitre 19

123- Déterminant. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il faut que le plan soit cohérent : si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant en terme de volume est essentielle.
Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux.

Développements

Développements proposés :
- Résultant et application, dans *Gourdon*
- Ellipsoïde de John-Loewner, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3

Autres développements possibles :
- Théorème de Müntz, dans *Gourdon, analyse*
- Inégalité d'Hadamard, dans *Gourdon*
- Dimension d'espaces de matrices de rang $\geq p$, dans *Oraux X-ENS*

Idées pour le plan

Dans toute la suite, on se place sur E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On aurait aussi pu se placer sur un anneau commutatif, mais certaines propriétés ne seraient alors plus vérifiées. Définitions et premières propriétés
- *Formes multilinéaires - déterminants* dans *Gourdon Algèbre* la définition d'une forme p linéaire antisymétrique, c'est une espace de dimension 1, la définition du déterminant. La formule du déterminant en tant que somme sur le groupe symétrique, le déterminant est $\mathcal{C}^\infty$ en ses coefficients, on introduit le déterminant d'une matrice carrée, déterminant de la transposée, déterminant de d'un produit de matrices carrées, le déterminant d'une matrice inversible est non nul, définition du déterminant d'un endomorphisme, on remarque que ça ne dépend pas de la base.
- *Méthodes de calcul* dans *Gourdon Algèbre* la définition des mineurs et des cofacteurs, les formules de Cramer et une estimation du temps de calcul, les méthodes de développement par rapport à une ligne ou une colonne en application les déterminants de Vandermonde, de Cauchy et le déterminant circulant. On peut citer le pivot de Gauss en alternative à Cramer.

Le déterminant en algèbre et géométrie

- *Inversion de Matrices* dans *Gourdon Algèbre* la formule de l'inverse d'une matrice en fonction du déterminant.
- *Polynôme caractéristique* dans *Gourdon Algèbre* la définition du polynôme caractéristique d'une matrice, la proposition qui dit que le spectre de la matrice est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme caractéristique.
- *Topologie des espaces de matrices* dans *Mneimé-Testard* le fait que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert, qu'il est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, qu'il n'est pas connexe.
- *Volume* dans *Objectif Agrégation* la définition de la mesure de l'image d'une partie mesurable par un endomorphisme. En exemple, l'ellipsoïde de John-Loewner dans *Oraux X-ENS Algèbre* 3 (développement).
- *Distance* dans *Objectif Agrégation* la définition d'une matrice de Gram et la proposition pour le déterminant de Gram.
- *Orientation* dans *Grifone* le théorème qui dit que deux bases ont même orientation si le déterminant de l'identité relativement à ces deux bases est positif.

Applications à l'arithmétique et à l'analyse

- *Résultant* dans *Gourdon, Analyse* la définition du résultant, le théorème et l'application.
- *Wronskien* dans *Gourdon, Analyse* on pose un problème de Cauchy, on dit que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension n, on définit le Wronskien et on donne la proposition pour le Wronskien en fonction du temps.
- *Changement de variables* dans *Objectif Agrégation* la formule de changement de variables dans les intégrales de fonctions de plusieurs variables.
- *Un résultat de densité* dans *Gourdon, Analyse* le théorème de Müntz dont la démonstration utilise les déterminants.

Références

- Gourdon, *Algèbre*
- Gourdon, *Analyse*
- Objectif Agrégation
- Francinou-Gianella-Nicolax, *Oraux X-ENS algèbre* 3
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*

Chapitre 20

124- Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010)*.* Le titre officiel précise que la dimension est finie. Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbb{K}[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de cette algèbre $\mathbb{K}[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.
Le jury ne souhaite pas voir un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme.
L'aspect *applications* est trop souvent négligé.

Remarque. On peut parler d'endomorphismes semi-simples (dont le polynôme minimal est sans facteurs carrés : $\mathbb{K}[u]$ est alors un produit de corps.

Question. Quel est le lien entre l'expression des projecteurs dans la décomposition des noyaux en tant que polynôme d'endomorphisme et l'expression des idempotents ?

Réponse. On note $\Pi(u) = P_1 \cdots P_m$ alors

$$\mathbb{K}[u] = \mathbb{K}[X]/(P_1) \times \cdots \times \mathbb{K}[X]/(P_m)$$

et, par exemple, $(1, 0, \cdots, 0)$ est un idempotent de $\mathbb{K}[u]$. On se place dans le cas où $m = 2$ et on veut remonter l'élément $(1, 0)$. On peut écrire une relation de Bezout entre P_1 et P_2 :

$$U_1P_1 + U_2P_2 = 1$$

et on a alors que U_2P_2 est le projecteur sur $Ker(P_1(u))$ parallèlement à $Ker(P_2(u))$ et pareil pour U_1P_1.

Remarque. On peut aussi parler de semi-simplicité, puisque les endomorphismes semi-simples sont ceux qui admettent un polynôme annulateur sans facteur carré.

Question. Dans un espace complet, la convergence normale implique la convergence simple, ce qui permet de définir l'exponentielle. Donner un exemple de corps dans lequel l'exponentielle n'est pas définie.

Réponse. Une matrice sur $\mathbb{Q}$ aura une exponentielle qui n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Sinon, si on se place sur $\mathbb{F}_p$, on ne peut pas diviser par p ce qui empêche de diviser par des factorielles.

Question. Pourquoi est-ce que $exp(A)$ est un polynôme en A ?

Réponse. Parce que la suite des sommes partielles qui définit l'exponentielle est une suite de $\mathbb{K}[A]$ qui est un espace de dimension finie (de dimension le degré du polynôme minimal de A) et que cette suite converge donc vers un polynôme puisque l'espace est fermé.

Question. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\langle M \rangle$ soit un sous-groupe fini. Montrer que M est diagonalisable.

Réponse. On a l'existence d'un entier n tel que $M^n = I_n$ et donc $X^n - 1$ est annulateur pour M et il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable.

Question. On suppose que le polynôme $(X-a)(X-b)$ annule M. Exprimer $exp(M)$ comme polynôme en M.

Réponse. Si M n'a qu'une valeur propre c, alors $M - cI_n$ est nilpotente et ainsi

$$exp(M - cI_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(M - cI_n)^k}{k!} = R_c(M)$$

où R_c est un polynôme. Ainsi $exp(M) = e^c R_c(M)$.
On reprend le cas où M a deux valeurs propres. On peut écrire une relation de Bezout pour les facteurs du polynôme annulateur : $1 = U(X - a) + V(X - b)$ et le projecteur sur le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre a est $P_a(X) = V(X - b)$, de la même manière $P_b(X) = U(X - a)$. Dans ces sous-espaces propres, M a une valeur propre simple, si on note P le polynôme tel que $P(M) = exp(M)$, P doit donc vérifier les systèmes de congruences suivants :

$$\begin{aligned} P(X) &\equiv e^a R_a(X)[P_a(X)] \\ P(X) &=\equiv e^b R_b(X)[P_b(X)] \end{aligned}$$

et on trouv $exp(M) = P(M)$, mais ce polynôme n'est pas unique.

Remarque. Pour le calcul de puissances de matrices, on diviser X^k par un polynôme annulateur de u et on calcule le reste en fonction de quelques puissances de u seulement. Donc on gagne beaucoup en temps de calcul.

Question. Deux endomorphismes conjugués, ont le même polynôme minimal, que dire de la réciproque ?

Réponse. Si deux matrices ont le même polynôme minimal scindé à racines simples, elles sont diagonalisables. On prend A et B telles que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

elles ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables.

Question. Comment démontrer que les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique ?

Réponse. C'est par définition des valeurs propres. Ce n'est pas une conséquence de Cayley-Hamilton.

Question. Comment montrer que les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de la matrice ?

Question. Les racines du polynôme minimal sont comprises dans les racines du polynôme caractéristique. Il faut montrer que si a est valeur propre, alors a annule π_f.
Pour un vecteur propre x associé à la valeur propre a et $P(X)$ un polynôme, on a

$$P(f)(x) = P(a)x$$

car $f^n(x) = a^n(x)$. Et donc si P annule f, $P(a)$ est nul. C'est en particulier vrai pour le polynôme minimal.

Question. Que dire d'un endomorphisme semi-simple dont le polynôme caractéristique est scindé ?

Réponse. Il est diagonalisable, en effet le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique donc son polynôme minimal est scindé. Et il ne peut pas avoir de facteurs carrés par un théorème du plan, donc son polynôme minimal est scindé sans facteurs carrés. Donc le polynôme minimal est scindé à racines simples.

Question. Donner la définition de l'exponentielle de matrice. Á quelle condition ça converge ? (Et donc, à quelle condition c'est bien défini ?)

Réponse. Il faut l'espace complet. On revient à une question déjà posée. On peut rajouter que l'exponentielle est un polynôme en la matrice.

Question. Donner la décomposition de Dunford d'une matrice explicite symétrique réelle.

Réponse. Elle est diagonalisable. Sa décomposition de Dunford est $d =$ elle-même et $n = 0$.

Développements

Développements proposés :
- Décomposition de Frobenius, dans *Gourdon Algèbre*
- Décomposition de Dunford, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Codiagonalisation et conséquences
- Le théorème de Burnside, dans *Oraux X-ENS algèbre* 2
- Réduction des endomorphismes normaux, dans *Gourdon Algèbre*

Idées pour le plan

On se place sur E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.
Polynôme d'endomorphisme

- *Définition et structure de* $\mathbb{K}[u]$ dans *Objectif Agrégation* la définition de $\mathbb{K}[u]$, on ajoute la proposition qui dit que $KerP(u)$ et $ImP(u)$ sont stables par u et le lemme des noyaux.
- *Polynôme minimal* dans *Objectif Agrégation* la définition du polynôme minimal comme élément engendrant le noyau de l'injection qui définit $\mathbb{K}[u]$ et la décomposition de $\mathbb{K}[u]$ en utilisant le théorème chinois. Les remarques sur les polynômes minimaux des restrictions de u. La dimension de $\mathbb{K}[u]$.
- *Polynôme caractéristique* dans *Objectif Agrégation* la définition du polynôme caractéristique, l'invariance par le changement de base, dans *Gourdon* le théorème qui dit que les valeurs propres d'un endomorphisme sont racines de ses polynômes annulateurs. Dans le cas du polynôme caractéristique la réciproque est vraie, le théorème de Cayley-Hamilton et des exemples.

Polynôme annulateur et réduction

- *Diagonalisation et trigonalisation* dans *Objectif Agrégation* les conditions de diagonalistation et de trigonalisation des endomorphismes. Des exemples. Le théorème de diagonalisation simultanée. Dans *Objectif Agrégation* le théorème de réduction des endomorphismes normaux et l'application à la diagonalisation des matrices symétriques et antisymétriques.
- *Décomposition de Dunford* dans *Gourdon* le théorème de décomposition de Dunford, on insiste sur le fait que N et D sont des polynômes en u (développement). [Remarque, c'est fait en exercice dans *Objectif Agrégation*]
- *Invariants de similitude et décomposition de Frobenius* dans *Gourdon* la définition des invariants de similitude et le théorème de décomposition de Frobenius (développement).

Applications

- *Exponentielle d'un endomorphisme-Équations différentielles* dans *Mneimé-Testard* la définition de l'exponentielle de matrice, c'est un polynôme en la matrice et on dit pourquoi. Application dans *Gourdon, Analyse* à la résolution d'équations différentielles linéaires (on donne la forme de la solution).
- *Projection sur les sous-espaces caractéristiques* dans *Objectif Agrégation* la méthode de projection sur les sous-espaces caractéristiques en utilisant le lemme des noyaux.

Références

- Objectif Agrégation
- Gourdon, *Algèbre*
- Gourdon, *Analyse*
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*

Chapitre 21

125- Sous-espaces stables d'un endomorphisme ou d'une famille d'endomorphismes en dimension finie. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études de cas détaillées sont les bienvenues.

Question. Donner le schéma de la preuve du théorème de diagonalisation simultanée.

Question. Décrire les invariants de similitude d'un endomorphisme diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme est $P(x) = (X-1)(X-2)^2(X-3)$

Réponse. Les invariants de similitude sont $P_0 = 1, P_1 = X-2$ et $P_2 = (X-1)(X-2)(X-3)$. Le polynôme minimal de l'endomorphisme est alors P_2. Pour calculer les invariants de similitude d'une matrice quelconque de manière algorithmique, il faut trigonaliser la matrice $A - XI_n$ par l'algorithme du pivot de Gauss et ça permet de calculer le polynôme minimal en même temps que les invariants de similitude.

Remarque. On peut aussi parler de géométrie dans cette leçon en parlant des isométries affines qui stabilisent le plan euclidien en dimension 3.

Développements

Développements proposés :
- Décomposition de Frobenius, dans *Gourdon*
- Décomposition des endomorphismes normaux, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Décomposition de Dunford, dans *Gourdon* et de manière effective sur internet
- Équation de Hill-Mathieu, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème de Burnside, dans *Oraux X-ENS Algèbre* 2

Idées pour le plan

Définitions et premières propriétés
- *Définitions et premiers exemples* dans *Objectif Agrégation* la définition d'un sous-espace stable, des premiers exemples.
- *Endomorphismes induits* dans *Objectif Agrégation* les théorèmes sur les endomorphismes induits sur un sous-espace stable et le passage au quotient. Des applications.
- *Recherche de sous-espaces stables* dans *Objectif Agrégation* les sous-espaces stables pour les endomorphismes qui commutent. Les propriétés pour les

polynômes d'endomorphismes. Dans *Gourdon* la stabilité des sous-espaces stables, le fait que si ils sont en somme directe dans l'espace alors l'endomorphisme est diagonalisable et le théorème de réduction simultanée.
- *Dualité et sous-espaces stable* dans *Objectif Agrégation* la stabilité de l'orthogonal d'un sous espace stable par l'adjoint de l'endomorphisme, en application les invariants de similitude dans *Gourdon*.

Endomorphismes remarquables
- *Semi-simplicité* dans *Objectif Agrégation* la définition des endomorphismes semi-simples, le théorème fondamental, le cas des corps algébriquement clos les applications qui sont dans *Objectif Agrégation* et la décomposition de Dunford généralisée.
- *Endomorphismes normaux* dans *Gourdon* la définition des endomorphismes normaux et le théorème de réduction des endomorphismes normaux sur $\mathbb{R}$ (développement).
- *Sous-représentations* dans *Colmez* des rapides rappels sur les représentations de groupes puis la définition d'une sous-représentation, la somme directe de représentations, la notion de représentation irréductible et le théorème de Maschke.

Références

- Objectif Agrégation
- Gourdon, *Algèbre*
- Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*

Chapitre 22

126- Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010)*.* Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice.

Question. Donner des conséquences de l'écriture matricielle d'une équation différentielle sur la stabilité des solutions ?

Réponse. Il faut étudier le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice.

Question. Quelles sont les seules rotations diagonalisables ?

Réponse. Ce sont seulement plus ou moins l'indentité.

Question. Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Que dire des sous-groupes de $GL_n(K)$ qui vérifient $\forall g \in G, g^2 = id$?

Réponse. $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Tous les éléments sont diagonalisables. Et en plus, c'est un groupe abélien (exercice typique sur les groupes).

Question. Soit H hermitienne. Montrer que $Id - iH$ est inversible.

Réponse. Si H est diagonalisable, ses valeurs propres sont réelles. Or si $det(Id - iH) = 0$, ça signifie que $-i$ est valeur propre de H.

Développements

Développements proposés :
- Réduction des endomorphismes normaux, dans *Gourdon*
- Décomposition de Dunford, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Diagonalisation des autoadjoints
- Codiagonalisation et conséquences, dans *Gourdon* et *Oraux X-ENS algèbre 2*

Idées pour le plan

Dans toute la suite, on se place sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Éléments propres et polynômes d'endomorphismes
- *Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres* dans *Gourdon* la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre (et c'est stable par l'endomorphisme), les sous-espaces propres sont en somme directe.

- *Polynômes d'endomorphismes et idéal annulateur* dans *Objectif Agrégation* le théorème qui définit l'algèbre des polynômes en l'endomorphisme, la définition du polynôme minimal et le lemme des noyaux.
- *Polynôme caractéristique* dans *Gourdon* la définition du polynôme caractéristique, les remarques, le fait que les valeurs propres de l'endomorphisme sont les racines du polynôme caractéristique, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable divise le polynôme caractéristique, la dimension des sous-espaces propres et dans *Objectif Agrégation* le théorème de Cayley-Hamilton.

Diagonalisabilité

- *Définition* dans *Gourdon* la définition d'un endomorphisme diagonalisable, les remarques, le cas des polynômes caractéristiques scindés à racines simples.
- *Critères de diagonisabilité* dans *Gourdon*, *Objectif Agrégation* et *Grifone* concaténer les listes de conditions équivalentes pour la diagonisabilité d'un endomorphisme. Dans *Objectif Agrégation* des exemples généraux d'endomorphismes diagonalisables et dans *Grifone* un exemple particulier de matrice diagonalisable.
- *Conséquences topologiques* dans *Objectif Agrégation* ce qui vient de la diagonalisation dans le paragraphe *Topologie et endomorphismes diagonalisables*.

Diagonalisation simultanée

- *Théorème* dans *Objectif Agrégation* le théorème de diagonalisation simultanée et une application dans *Oraux X-ENS algèbre* 2
- *Conséquences* dans *Objectif Agrégation* les applications du théorème de diagonalisation simultanée. Quelles applications dans *Gourdon* aussi.

Théorèmes spectraux

- dans *Gourdon* les lemmes et le théorème de réduction sur $\mathbb{R}$ des endomorphismes nomaux (développement). Le cas sur $\mathbb{C}$ où on montre que c'est diagonalisable. Et les cas particuliers (matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes, endomorphismes unitaires, isométries...)

Décomposition de Dunford

- dans *Gourdon* la décomposition de Dunford (développement) et des applications : au calcul de l'exponentielle et un calcul pratique dans *Gourdon*.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Objectif Agrégation

Chapitre 23

127- Exponentielle de matrices. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est-elle dans l'image de $exp(M_2(\mathbb{R}))$? Qu'en est-il de la matrice blocs

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}?$$

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $exp(A)$ doit être connue. Les groupes à un paramètre peuvent leur place dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL_n(\mathbb{R})$. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.
Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique.
Les notions d'algèbre de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité.

Question. Tout élément de $GL_n(\mathbb{C})$ est une exponentielle. Pour $GL_n(\mathbb{R})$ c'est faux. Qu'en est-il des sous-groupes remarquables de $GL_n(\mathbb{R})$? Est-ce que les matrices orthogonales sont des exponentielles ?

Réponse. Pour O_n c'est clairement non, celles qui ont un déterminant égal à -1 par exemple. Pour SO_n oui, on réduit sous la forme diagonale par blocs et on a le résultat.

Question. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver un polynôme P tel que $P(M) = exp(M)$.

Réponse. Les valeurs propres de M sont $(1, 1, 0)$. Si M était nilpotente, le polynôme serait $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$.

On remarque que si M n'avait qu'une seule valeur propre λ on pourrait écrire $M = \lambda I_n + N$ avec N une matrice nilpotente et donc on aurait

$$exp(M - \lambda I_n) = P(N) = P(M - \lambda I_n)$$

avec P le polynôme précédent. Ainsi, on pourrait enfin écrire :

$$\begin{aligned} exp(\lambda I_n) exp(M - \lambda I_n) &= exp(M) \\ &= exp(\lambda I_n) P(M - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme qui convient est $Q(X) = P(X - \lambda)e^{\lambda}$.
Et si on a plusieurs sous-espaces propres, on utilise le théorème chinois. C'est ce qu'on fait pour la matrice M donnée dans l'exercice. On peut tout d'abord écrire son polynôme caractéristique

$$\chi_M(X) = (X - 1)^2 X.$$

Par algorithme d'Euclide étendu, on trouve les coefficients de Bezout : $X(X - 2) - (X - 1)^2 = 1$. On veut que le polynôme P vérifie le système de congruences suivant :

$$\begin{aligned} P &\equiv 1[X] \\ P &\equiv eX[X^2 - 1] \end{aligned}$$

car sur le sous-espace caractéristique de 0, $exp(M) = 1$ et sur le sous-espace caractéristique de 1, $exp(M) = e^1 \cdot [1 + (X - 1)]$ d'après ce qu'on a fait précédemment. Le polynôme $P = (X - 1)^2 - (X)(X - 2)eX$ convient mais n'est pas unique.

Question. Est-ce que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est une exponentielle ?

Réponse. Si c'était une exponentielle, ce serait en particulier un carré et donc il existerait N telle que $A = N^2$. On aurait alors $Sp(N) \subset \{\pm 1\}$ et donc N serait diagonalisable et donc A aussi. Ce qui n'est pas le cas. Comme A n'est même pas un carré, ce n'est pas une exponentielle.

Question. On note

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Est-ce qu'il s'agit d'une exponentielle sur $\mathbb{R}$?

Réponse. On montre tout d'abord que c'est un carré, en effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer le résultat suivant : $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une exponentielle si et seulement si A est un carré. Le sens direct est facile : il suffit de remarquer que si $A = exp(M)$ alors $A = \left(exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)^2$. Dans l'autre sens, on suppose que $A = N^2$, avec A et N inversibles, alors

$$\begin{aligned} A &= NN \\ &= N\bar{N} \end{aligned}$$

où $N = exp(P)$ et $\bar{N} = exp(\bar{P})$ pour $P \in \mathbb{C}$. Ainsi $A = exp(P)exp(\bar{P}) = exp(P + \bar{P})$ avec $P + \bar{P} \in M_n(\mathbb{R})$. Si A n'est pas inversible, N non plus.

Développements

Développements proposés :
- $exp(A)$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable, dans *Objectif Agrégation* ou *Gourdon* et *Oraux X-ENS algèbre* 2
- Surjectivité de l'exponentielle complexe $M_n(\mathbb{C}) \mapsto GL_n(\mathbb{C})$, dans *Tauvel*

Autres développements possibles :
- Codiagonalisation et conséquence, dans *Gourdon* et *Oraux X-ENS algèbre* 2
- Théorème de Liapunov, dans *Rouvière*
- Théorème de Cartan Von Neumann, dans *Mneimé-Testard*

Idées pour le plan

Définitions et généralités
- *Définitions et premières propriétés* dans *Gourdon* la définition de l'exponentielle d'une matrice, l'inégalité qui concerne la norme de l'exponentielle, l'inversibilité, l'exponentielle d'une somme de matrices qui commutent, dans *Mneimé-Testard* l'exponentielle est un polynôme en A, les formules $det(exp(A)) = exp(Tr(A))$
- *Calcul pratique, réduction* dans *Gourdon* la réduction de Dunford et une application au calcul de l'exponentielle d'une matrice dans les exercices. Dans *Objectif Agrégation* le théorème A diagonalisables $\Leftrightarrow$ $exp(A)$ diagonalisable (développement). Dans *Gourdon* dans les exercices, le théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{t\to\infty} e^{tM} = 0$. Ensuite, dans

Gourdon,la décomposition de Jordan et on explique que le calcul de l'exponentielle peut se faire par blocs.

Propriétés de la fonction exponentielle

- *Différentiabilité et inversion locale* dans *Mneimé-Testard* le théorème qui dit que l'exponentielle est $\mathcal{C}^1$ et même analytique, la valeur de la différentielle en 0, dans *Rouvière* la différentielle de l'exponentielle en tout point, dans *Mneimé-Testard* l'application qui dit que $GL_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits (et la reformulation), la définition du logarithme, pourquoi c'est bien défini et les propriétés qui suivent.
- *Injectivité, surjectivité* dans *Oraux X-ENS algèbre* 2 la proposition pour la surjectivité de l'exponentielle de $M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ (développement) avec son lemme et son corollaire. Dans *Objectif Agrégation* la proposition qui dit que l'image de $M_n(\mathbb{R})$ par l'exponentielle est l'ensemble des matrices qui admettent une racine carrée. On remarque que l'exponentielle n'est pas injective, et on peut redonner le théorème qui constitue le premier développement.

Application aux équations différentielles à coefficients constants

- *Équations différentielles linéaires à coefficients constants* dans *Demailly* on pose un système différentiel linéaire à coefficients constants, on donne la forme des solutions et le théorème de Liapunov (avec dessins en annexe). On peut évoquer le cas du système linéarisé, mais ça sort du cadre de la leçon.
- *Groupe à un paramètre* dans *Mneimé-Testard* la définition des sous-groupes à un paramètre et le théorème qui dit qu'ils s'expriment en fonction d'une exponentielle.

Références

- Gourdon, *Algèbre*
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*
- Tauvel, *Algèbre*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Objectif Agrégation
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 2

Chapitre 24

128- Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010)*.* Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan avec les noyaux itérés.

Question. On dit qu'une matrice A est unipotente si $A = I_n + N$ avec N nilpotente. Comment caractériser cette propriété avec le spectre ?

Réponse. Si A est unipotente, $A - I_n$ est nilpotente. On va utiliser la caractérisation des matrices nilpotentes.

Question. À propos de Dunford, quand f varie, est-ce que d varie continûment en f ?

Réponse. Les valeurs propres varient continûment en fonction de f. Mais on peut changer de base de diagonalisation. Donc d ne varie pas continûment en fonction de f. Un autre argument consiste à dire que si $n = 0$ alors f est diagonalisable. Or les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$ donc si d était continue, on aurait tout le temps $n = 0$.

Question. Est-ce que l'existence de racine carrée est vraie pour toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$? Et dans $GL_n(\mathbb{R})$?

Réponse. Si une matrice nilpotente avait une racine carrée, elle serait nilpotente aussi. Si on écrit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N = B^2$ on aurait (grâce à la dimension de l'espace) forcément $B^2 = 0$ ce qui n'est manifestement pas le cas.
Dans le cas de $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on montre que A n'a pas forcément de racine carrée (en dimension impaire $-I_n$ convient et en dimension paire le bloc

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

permet de répondre à la question.

Question. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

on a $\chi_A(X) = -X(X-2)^2$. Calculer le projecteur associé à E_2.

Réponse. On peut trouver une base mais y'a plus malin. On cherche U et V tels que $XU + (X-2)^2V = 1$ avec l'algorithme d'Euclide et on trouve les projecteurs.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Burnside, dans *Oraux X-ENS algèbre* 2
- Décomposition de Dunford, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Surjectivité de l'exponentielle matricielle (en application de Dunford) mais c'est peut-être un peu hors sujet

Idées pour le plan

Endomorphismes trigonalisables
- *Définitions et caractérisations* dans *Gourdon* la définition d'un endomorphisme trigonalisable, dans *Grifone* un exemple d'endomorphisme trigonalisable puis dans *Gourdon* le théorème qui dit qu'un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. La remarque sur les restrictions d'endomorphismes diagonalisables et sur les corps algébriquement clos. Dans *Grifone* un exemple explicite de matrice trigonalisable, la remarque qui dit qu'on peut calculer facilement la trace et le déterminant d'un endomorphisme trigonalisable en fonction de ses valeurs propres, le théorème de Cayley-Hamilton et dans *Objectif Agrégation* la liste détaillée des conditions équivalentes pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.
- *Sous-espaces stables et trigonalisation simultanée* dans *Gourdon* la proposition pour la stabilité des sous-espaces propres dans le cas d'endomorphismes qui commutent puis le théorème de trigonalisation simultanée (dans les exercices), dans *Objectif Agrégation* la somme et la composée de tels endomorphismes est aussi trigonalisable, et l'exercice sur le crochet de Lie (remplacer diagonalisable par trigonalisable).
- *Sous-espaces caractéristiques* dans *Gourdon* la définition des sous-espaces caractéristiques, le lemme des noyaux et dans *Objectif Agrégation* la décomposition en sous-espaces caractéristiques, on peut parler de calcul du polynôme minimal mais c'est un peu long.

Endomorphismes nilpotents
- *Définitions et premières propriétés* dans *Objectif Agrégation* la définition d'un endomorphisme nilpotent, de l'indice de nilpotence et des exemples. On peut citer le fait que l'ensemble des endomorphismes nilpotent est un cône, mais il faut savoir justifier pourquoi. Les propriétés qui sont dans *Objectif Agrégation* et dans *Gourdon* le fait qu'il existe un élément tel que la famille $(x, \cdots, A^{p-1}x)$ soit une famille libre.

- *Caractérisation de la nilpotence* dans *Objectif Agrégation* les caractérisations de la nilpotence, l'application qui dit que l'espace vectoriel engendré par les nilpotents sont les éléments de trace nulle puis dans *Oraux X-ENS algèbre* 2 le théorème de Burnside (développement).
- *Unipotents* dans *Objectif Agrégation* on peut parler des unipotents, mais ce n'est pas obligatoire.

Réduction d'endomorphismes

- *Décomposition de Dunford* dans *Gourdon* le théorème qui donne la décomposition de Dunford et son lemme (développement) on précise bien que les deux matrices obtenues dans la décomposition sont des polynômes en la matrice et une application au calcul pratique d'une exponentielle de matrice.
- *Réduction de Jordan* dans *Objectif Agrégation* le théorème de réduction de Jordan pour les nilpotents et ensuite pour les trigonalisables. Il y a aussi des remarques dans *Grifone* et des exemples.

Références

- Gourdon, *Algèbre*
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Objectif Agrégation
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 2

Chapitre 25

130- Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

Question. Soit L un opérateur linéaire tel que

$$\begin{aligned} L : f &\longmapsto Lf \\ f &\longrightarrow Lf(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \end{aligned}$$

où les $a_{i,j}$ forment une matrice $A(x)$. Montrer qu'on peut se ramener à une matrice symétrique définie positive.

Réponse. On pose $\tilde{L} : u \longmapsto \left(Lu : x \mapsto \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(\frac{a_{i,j}(x)+a_{j,i}(x)}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$. Alors $Lu(x) - \tilde{L}u(x) = 0$ si on suppose u de classe $\mathcal{C}^2$. Comme $L = \tilde{L}$ on peut bien se ramener à A matrice symétrique.

Question. Soit $A \in H_n$ non nulle. Montrer que $rg(A) \leq \frac{(Tr(A))^2}{Tr(A^2)}$.

Réponse. On a $Tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $Tr(A^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

Développements

Développements proposés :
- Réduction des endomorphismes normaux, dans *Gourdon*
- La méthode de relaxation pour les hermitiens, dans *Ciarlet*

Autres développements possibles :
- Ellipsoïde de John-Loewner, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3
- Lemme de Morse, dans *Rouvière*
- Surjectivité de l'exponentielle matricielle, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 2
- Inégalité de Kantorovitch

Idées pour le plan

On se place dans $(E; \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Généralités

- *Définitions* dans *Gourdon* les définitions de matrices symétriques, antisymétriques et hermitiennes et dans *Grifone* la remarque qui dit que les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels. Dans *Gourdon* la définition d'une matrice positive et d'une matrice définie positive.
- *Lien avec les endomorphismes, les formes bilinéaires symétriques et les formes hermitiennes* dans *Gourdon* la définition d'une forme bilinéaire, d'une forme quadratique, le lien avec les matrices et le changement de base. De la même manière, la définition d'une forme sesquilinéaire et d'une forme hermitienne, le changement de base. Ensuite, la définition dans *Grifone* de l'endomorphisme adjoint et la correspondance en termes de matrices (il y a un tableau récapitulatif bien fait à la fin de *Grifone*).
- *Quelques propriétés* Dans *Gourdon* $M_n(\mathbb{R})$ est somme directe des matrices symétriques et antisymétriques, $H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) + iA_n(\mathbb{R})$, ce sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (et pas complexes !) et la dimension. Dans *Gourdon* le fait que les valeurs propres des matrices hermitiennes sont réelles, positives ou strictement positives si la matrice est positive ou définie positive.

Réduction et théorie spectrale

- *Théorèmes spectraux* dans *Gourdon* le lemme et le théorème de réduction des endomorphismes normaux et en application dans *Gourdon* le théorème de réduction des matrices symétriques réelles et des matrices hermitiennes. En application, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3 la caractérisation de Sylvester des matrices définies positives et l'application au fait que l'ensemble des matrices symétriques réelles forme un ouvert de l'espace des matrices symétriques réelles.
- *Conséquences sur les formes quadratiques* dans *Grifone* le théorème de Silvester, la définition de la signature, des exemples dans *Gourdon*. Éventuellement, dans *Gantmacher* le théorème de comptage des racines d'un polynôme à l'aide des formes quadratiques.
- *Pseudo-réduction simultanée* dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3 le théorème de pseudo-réduction simultanée, en application le lemme de convexité logarithmique du déterminant et l'ellipsoïde de John-Loewner.
- *Valeurs propres* dans *Ciarlet* la propriété qui dit que les quotients de Rayleigh des matrices hermitiennes sont compris dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_n]$. En application, on peut parler de l'inégalité de Kantorovitch.
- *Réduction, version différentiable* dans *Rouvière* le lemme puis le théorème de Morse.

Décompositions

- *Racines carrées* dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 le théorème qui dit que toute matrice symétrique définie positive admet une racine carrée qui est un polynôme en la matrice.

– *Décomposition polaire* dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 le théorème de réduction polaire et si il y a de la place dans *Mneimé-Testard* des résultats de topologie d'espaces de matrices qu'on obtient grâce à cette réduction.

Applications

– *Matrice Hessienne* dans *Gourdon, analyse* la définition de la matrice Hessienne et le caractère d'extrêmum local en fonction de sa signature.
– *Algèbre linéaire numérique* dans *Ciarlet* la description de la méthode de relaxation et le théorème de convergence de la méthode de relaxation dans le cas des matrices hermitiennes définies positives (développement).

Références

– Gourdon, *Algèbre*
– Gourdon, *Analyse*
– Ciarlet, *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*
– Grifone, *Algèbre linéaire*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3
– Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*
– Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
– Gantmacher, *Théorie des matrices*. Éventuellement.

Chapitre 26

131- Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$ et ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (liens entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non-dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).
L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

Question. Donner une idée de la preuve du théorème de Sylvester.

Question. Décomposer en somme de carrés :

$$q(x, y, z) = xy + yz + zx$$

Développements

Développements proposés :
- Lemme de Morse, dans *Rouvière*
- Ellipsoïde de John-Loewner, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3

Autres développements possibles :
- Théorème de comptage des racines d'un polynôme à l'aide de formes quadratiques, dans *Gantmacher*
- Méthode de Gauss, dans *Grifone* (mais c'est plus intéressant de faire un exemple même si ce n'est pas assez long pour faire un développement)

Idées pour le plan

On se place sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.
Généralités
- *Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques* dans *Gourdon* la définition d'une forme bilinéaire symétrique, des exemples (dans les exercices) et la définition d'une forme quadratique, des exemples simples. On donne

l'identité de polarisation et dans *Grifone* ça réalise une bijection entre les formes quadratiques sur E et les formes bilinéaires symétriques sur $E \times E$. Dans *Grifone* les formes quadratiques sont des polynômes homogène de degré 2 dans n'importe quelle base. Et dans *Gourdon* les formules pour retrouver l'expression de la forme bilinéaire symétrique à partir de l'expression polynômiale.

- *Expressions matricielles* dans *Gourdon* l'écriture en dimension finie d'une forme bilinéaire symétrique et la formule de changement de base, l'écriture de la matrice d'une forme quadratique, l'isomorphisme entre les matrices symétriques et les formes bilinéaires symétriques. En conséquence, le théorème sur la dimension de l'espace des formes bilinéaires symétriques sur $E \times E$.
- *Rang et noyau d'une forme quadratique* dans *Grifone* la définition du rang d'une forme quadratique, la définition d'une forme quadratique dégénérée et non dégénérée et le noyau de la forme quadratique. L'exemple qui est donné dans *Grifone*.

Orthogonalité et isotropie

- *Orthogonalité* dans *Gourdon* la définition de deux vecteurs orthogonaux, de l'orthogonal d'une partie de E, de deux parties orthogonales, l'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel et les propriétés d'orthogonalité avec aussi les égalités de dimension qui sont un peu plus loin.
- *Isotropie* dans *Gourdon* la définition du cône isotrope, il contient le noyau, un contre exemple pour la réciproque puis dans *Grifone* la définition d'un sous-espace isotrope et les propriétés qui suivent. Des exemples dans les exercices.
- *Réduction des formes quadratiques* dans *Gourdon* la définition d'une base orthogonale pour la forme quadratique. L'existence d'une telle base et le corollaire qui permet de diagonaliser des matrices en base orthonormée. Dans *Gourdon* l'explication de la méthode de Gauss et la mise en oeuvre sur un exemple dans *Grifone*, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 le théorème d'orthonormalisation simultanée et en application l'ellipsoïde de John-Loewner (développement).

Classification des formes quadratiques

- *Introduction* dans *Perrin* la définition de deux formes bilinéaires équivalentes puis ce que ça veut dire en termes de matrices.
- *Sur* $\mathbb{R}$ dans *Grifone* le théorème d'inertie de Sylvester et le corollaire.
- *Sur* $\mathbb{C}$ *et* $\mathbb{F}_p$ dans *Grifone* le théorème de réduction des formes quadratiques sur un espace vectoriel complexe, le corollaire et dans *Perrin* le théorème de réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$.

Applications à l'analyse

- *Matrice hessienne* dans *Gourdon analyse* la définition de la matrice Hessienne et l'application à la recherche d'extrema locaux.

– *Réduction, version différentiable* dans *Rouvière* le lemme nécessaire au lemme de Morse puis le lemme de Morse (développement).

Références

– Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3
– Gourdon, *Algèbre*
– Gourdon, *Analyse*
– Grifone, *Algèbre linéaire*
– Perrin, *Cours d'algèbre*

Chapitre 27

132- Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au coeur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une itersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrie, algèbre, topologie, analyse, etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin, rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

Question. Et en dimension infinie, est-ce qu'un espace est toujours réflexif ?

Réponse. Non, penser par exemple à $L^1(0,1)$.

Question. Trouver un contre exemple avec deux fermés convexes qu'on ne peut pas séparer strictement.

Réponse. On prend A le convexe contenu au dessus du graphe de la fonction inverse pour les positifs et pour B la droite réelle :

$$A = \left\{(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 | y \leq 1/x\right\}$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\right\}$$

Question. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Quels sont les endomorphismes de E qui conservent les hyperplans vectoriels ?

Réponse. En utilisant la transposée, de tels endomorphismes doivent conserver toute droite, ainsi la transposée doit être diagonalisable et donc l'endomorphisme doit être diagonalisable.

Question. Dans $\mathbb{R}^3$ on note H_1 et H_2 les hyperplans engendrés par

$$H_1 = Vect\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$
$$H_2 = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Donner une base de $H_1 \cap H_2$.

Réponse. On note
$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
et
$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
et alors
$$\begin{aligned} (x,y,z) \in H_1 &\Leftrightarrow x+y+3z=0 \\ (x,y,z) \in H_2 &\Leftrightarrow x-y-z=0 \end{aligned}$$
ainsi
$$\begin{aligned} (x,y,z) \in H_1 \cap H_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2z \\ x=y+z \end{cases} \end{aligned}$$
et donc
$$H_1 \cap H_2 = Vect\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Développements

Développements proposés :
- Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$, dans *Audin* et *Perrin*
- Théorème de Hahn-Banach géométrique, dans *Tauvel*

Autres développements possibles :
- Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$, dans *Perrin*
- Un exemple d'isomorphisme entre $M_n(\mathbb{K})$ et son dual des applications
- Preuve du théorème des invariants de similitude, dans *Gourdon*

Idées pour le plan

Généralités

- *Formes linéaires* dans *Gourdon* la définition d'une forme linéaire, de l'espace dual, la notation des crochets de dualité. Dans *Oraux X-ENS,* 3 (ou dans *Objectif Agrégation*) le théorème de représentation de Riesz (qu'on met dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie). En exemple dans *Gourdon* les formes linéaires de $M_n(\mathbb{K})$ et le fait que les formes linéaire non nulles sont surjectives.
- *Hyperplan* dans *Gourdon* la définition d'un hyperplan, le fait que c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle et le fait que l'orthogonal d'un hyperplan est une droite vectoriel du dual de E. On cite la cotrigonalisation en application et on met le théorème. Dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 le fait que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ coupe $GL_n(\mathbb{K})$ et la caractérisation des homothéties comme étant les applications qui laissent stables tous les hyperplans.
- *Hahn-Banach* dans *Tauvel* le théorème de Hahn-Banach géométrique (développement) et un contre-exemple dans le cas où on n'a pas un ouvert au départ.

Dualité

- *Bases duales et antéduales* dans *Gourdon* la définition des formes linéaires coordonnées et l'existence de la base duale. Un exemple de changement de base en exercice dans *Gourdon* et des exemples de base duale dans *Grifone.* Dans *Gourdon* l'existence de la base antéduale.
- *Bidual* dans *Gourdon* la définition du bidual, il est canoniquement isomorphe à E et dans *Grifone* on dit pourquoi.

Applications transposée et orthogonalité

- *Orthogonalité* dans *Gourdon* les définitions des orthogonaux, les propriétés en dimension finie, le corollaire pour les équations de sous-espaces vectoriels en dimension finie et la remarque qui dit qu'un sous-espace vectoriel est égal à l'espace tout entier si et seulement si son orthogonal est nul.
- *Applications transposées* dans *Gourdon* la définition de la transposée, les propriétés sur le rang, les images et les noyaux, la transposée d'une application composée, la condition pour la stabilité d'un sous-espace vectoriel.

Générateurs de groupes de matrices

- *Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$* dans *Perrin* le théorème sur les générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$ avec juste avant les définitions des transvections et des dilatations.
- *Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$* dans *Audin* le théorème sur les générateurs de $O(E)$ et dans *Perrin* le théorème sur les générateurs de $SO(E)$ (développement).

Références

- Audin, *Géométrie*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Tauvel, *Géométrie*
- Gourdon, *Algèbre*
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3

Chapitre 28

133-Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

Remarques et questions

Question. Quand-est-ce qu'une matrice normale réelle admet un logarithme ?

Réponse. Pour répondre à la question, on utilise la réduction des matrices normales.

Remarque. A propos de la décomposition des endomorphismes normaux, il y a unicité à permutation des blocs près (on peut le montrer en liant les blocs aux valeurs propres complexes).

Développements

Développements proposés :
- Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$, dans *Audin* et *Perrin*
- Réduction des endomorphismes normaux, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Détermination de l'enveloppe convexe de $O(E)$
- Réduction des endomorphismes symétriques, dans *Gourdon*
- l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, dans *Mneimé-Testard*
- SO_3 est un groupe simple, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3

Idées pour le plan

On se place dans un espace vectoriel E réel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. On note n sa dimension.

Endomorphismes adjoints
- *Définitions et propriétés* dans *Grifone* la définition de l'adjoint et les propriétés.
- *Vocabulaire* dans *Gourdon* la définition d'un endomorphisme normal, et dans *Grifone* la définition des endomorphismes autoadjoints et orthogonaux.

Endomorphismes normaux
- *Premiers résultats* dans *Gourdon* les lemmes qui servent à la réduction des endomorphismes normaux.
- *Réduction des endomorphismes normaux* dans *Gourdon* le dernier lemme et le théorème de réduction dans le cas réel (développement). On dit que les endomorphismes symétriques et orthogonaux sont normaux et donc vérifient ce théorème.

Endomorphismes symétriques ou autoadjoints

– *Premières propriétés et réduction* dans *Gourdon* le fait que $M_n(\mathbb{K})$ est somme directe des matrices symétriques et antisymétriques, la définition d'une matrice positive et définie positive (pareil pour les endomorphismes). Dans *Gourdon* le théorème de réduction des endomorphismes symétriques (et on précise bien que les valeurs propres sont toutes réelles). En application, le fait qu'un endomorphisme est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
– *Applications de la réduction* le théorème de pseudo-réduction simultanée et en application la log-convexité du déterminant et l'ellipsoïde de John-Loewner, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3, dans *Grifone* l'obtention de la signature d'une forme bilinéaire symétrique. Dans *Oraux X-ENS, algèbre* 2 l'exponentielle induit un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 le théorème du minmax de Courant-Fischer et le théorème qui donne la racine carrée d'un automorphisme auto-adjoint positif. Si on veut, on peut parler de la réduction des matrices antisymétriques, mais c'est pas obligé.
– *Décomposition* dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 la décomposition polaire puis dans *Mneimé-Testard* des applications à la topologie des groupes de matrices.

Endomorphismes orthogonaux

– *Premières propriétés* dans *Gourdon* la définition du groupe orthogonal, c'est un groupe, la caractérisation matricielle, le groupe spécial orthogonal, c'est un sous-groupe distingué du groupe orthogonal. dans *Tauvel* la définition des réflexions et retournements et dans *Audin* et *Perrin* les générateurs de $0(E)$ et $SO(E)$ (développement).
– *Propriétés topologiques* dans *Mneimé-Testard* le fait que $O_n(\mathbb{R})$ est compact, le groupe SO_n est connexe par arcs et O_n a deux composantes connexes homéomorphes. La décomposition polaire est un homéomorphisme. Dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 la simplicité de SO_3.
– *Réduction* dans *Gourdon* le théorème de réduction des isométries d'un espace euclidien. L'application aux cas du plan et de l'espace.

Références

– Audin, *Géométrie*
– Perrin, *Cours d'algèbre*
– Gourdon, *Algèbre*
– Grifone, *Algèbre linéaire*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 2
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3
– Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*

– Tauvel, *Géométrie*

Chapitre 29

135- Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). La classification des isométries en dimension 2 ou 3 est exigible ainsi que le théorème de décomposition commutative. En dimension 3 : déplacements (translation, rotations, vissage) ; antidéplacements (symétries planes, symétries glissées, et isométries négatives à point fixe unique).

Remarque. Si on parle de polygones réguliers, en donner une définition qui est vraie.

Question. Les isométries du plan affine euclidien s'écrivent

$$z \longmapsto az + b$$
$$z \longmapsto a\bar{z} + b$$

avec $|a| = 1$. Comment reconnaît-on les symétries et les symétries glissées ?

Réponse. Une symétrie est une isométrie indirecte, donc de la forme : $z \longmapsto a\bar{z}+b$. On cherche les conditions sur a et b pour qu'il s'agisse d'une symétrie axiale non glissée. On veut donc l'existence de points fixes z_1 et $z-2$ tels que

$$\begin{cases} z_1 = a\bar{z}_1 + b \\ z_2 = a\bar{z}_2 + b \end{cases}$$

donc $z_1 = a(\bar{a}\bar{\bar{z}}_1 + \bar{b}) + b$ soit $a\bar{b} + b = 0$. Si $b = 0$ alors l'isométrie devient une symétrie axiale de la forme $z \longmapsto a\bar{z}$ et si $b \neq 0$ alors $a = -\frac{\bar{b}}{b}$.

Développements

Développements proposés :
- SO_3 est un groupe simple, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3
- Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$, dans *Audin* et *Perrin*

Autres développements possibles :
- Isométries préservant le cube et le tétraèdre, dans *Alessandri*
- Sous-groupes finis de SO_3 dans *Oraux X-ENS algèbre*

Idées pour le plan

On se place dans un espace affine euclidien (ϵ, E) de dimension finie n. On note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée.
Généralités

- *Définitions* dans *Mercier* la définition d'une application affine, la définition d'une isométrie, les groupes des déplacements et antidéplacements de l'espace affine. On rajoute des exemples qui sont dans *Mercier* et *Audin*. Dans *Mercier* le théorème qui dit que toute isométrie s'écrit de façon unique comme composée d'une translation et d'une isométrie qui a un point fixe.
- *Exemples et propriétés* dans *Mercier* quelques exemples simples et on définit l'ensemble des points invariants de l'application affine et on donne la décomposition commutative. Un peu plus loin dans *Mercier* le théorème qui dit que les isométries affines sont uniquement déterminées par la donnée de l'image de $n+1$ points affinement indépendants, en application des résultats sur les triangles isométriques.

Étude de $O(E)$

- *Réduction et générateurs* dans *Audin* le théorème de réduction des éléments de $O(E)$ avec aussi la forme matricielle et ensuite les générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$ (la fin est dans *Perrin*).
- *Lien avec les isométries affines* dans *Audin* le théorème qui donne les générateurs des isométries de l'espace affine ϵ.

Classification des isométries du plan et de l'espace

- *Dans le plan* dans *Mercier* la définition d'une rotation, dans le plan elle n'a qu'un seul point invariant qui est son centre,puis dans la définition d'une symétrie glissée (composition d'une reflexion et d'une translation) et le fait que les isométries du plan affine sont les translations, les rotations, les reflexions et les symétries glissées. On fait un tableau avec des schémas et l'ensemble invariant (plan, droite, point, vide). Dans *Combes* les dessins et les formes matricielles.
- *Dans l'espace* dans *Mercier* la définition d'une rotation affine, d'un vissage d'une reflexion glissée et d'une symétrie rotation. Ensuite, on fait le tableau qui donne la nature de l'isométrie en fonction de ses points invariants. Dans *Combes* les dessins et les formes matricielles. Dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 le fait que SO_3 est un groupe simple (développement).

Isométries conservant une partie

- *Le groupe diédral* dans *Mercier* la définition d'un polygone et d'un polygone régulier. Quelques théorèmes qui suivent pour caractériser la rotation qui laisse invariant le polygone régulier. Ensuite on donne $Is^+(P_n)$ et $Is^-(P_n)$ puis la définition du groupe diédral et ses propriétés.
- *Isométries préservant les polyèdres réguliers* dans *Mercier* le groupe d'isométries du cube : la liste des choses conservées, la définition du cube, la liste des rotations qui laissent le cube invariant, la liste des antidéplacements qui laissent le cube invariant et dans *Alessandri* le fait que c'est isomorphe à $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ensuite dans *Mercier* la définition du tétraèdre régulier, son

groupe des isométries est isomorphe à S_4 et la liste des rotations et retournements.

Références

- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3
- Audin, *Géométrie*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Mercier, *Cours de géométrie*
- Combes, *Algèbre et géométrie*

Chapitre 30

137- Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables).

Question. Comment voit-on sur le sous-espace affine engendré que les $n+1$ points sont affinement libres ?

Réponse. L'espace affine engendré sera de dimension n.

Question. Soit un repère affine (A, B, C) on considère les coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$. On a aussi des coordonnées barycentriques (p, q, r) dans le repère affine. On impose $p + q + r = 1$. Quel est le rapport entre (x, y) et (p, q, r) ?

Réponse. Soit un point M de coordonnées (p, q, r) dans le repère barycentrique et (x, y) dans le repère affine. On a alors

$$p\vec{MA} + q\vec{MB} + r\vec{MC} = \vec{0}$$
$$x\vec{AB} + y\vec{AC} = \vec{AM}$$

donc

$$\vec{AM} = x\vec{AM} + x\vec{MB} + y\vec{AM} + y\vec{MC}$$

donc

$$(x + y - 1)\vec{AM} - x\vec{MB} - y\vec{MC} = \vec{0}$$

et en identifiant, on obtient finalement :

$$\begin{cases} x + y - 1 = p \\ -x = q \\ -y = r \end{cases}$$

Question. On se donne l'équation d'une droite en coordonnées cartésiennes et en coordonnées barycentriques :

$$d : ax + by + c = 0$$
$$d : up + vq + wr = 0$$

Quel est la relation entre (a, b, c) et (u, v, w) ? Quelle condition donner au triplet (u, v, w) pour que d soit une droite ?

Réponse. Si un point $M = (x, y) = (p, q, r)$ est sur la droite, on a en reprenant l'exercice précédent :

$$\begin{cases} x + y - 1 = p \\ -x = q \\ -y = r \end{cases}$$

et en réinjectant les valeurs de (p, q, r) dans l'équation barycentrique de la droite, on obtient :

$$\begin{aligned} u(x+y-1)+v(-x)+w(-y)&=0 \\ (u-v)x+(u-w)y-u&=O \end{aligned}$$

on peut alors identifier et on obtient

$$\begin{cases} a = u - v \\ b = u - w \\ c = -u \end{cases}$$

Pour qu'une équation cartésienne définisse une droite, on doit avoir : $(a, b) = (0, 0)$ ici la condition $w = v = u$ ne donne pas une droite.

Question. Démontrer que les aires algébriques de MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Carathéodory, dans *Tauvel, géométrie*
- Théorème de Hahn-Banach géométrique, dans *Tauvel, géométrie*

Autres développements possibles :
- Inégalité de Kantorovitch

Idées pour le plan

On se place dans le cadre d'un espace affine E réel de dimension finie n.
Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie

- *Définitions et premières propriétés* dans *Mercier* la définition d'un système de points pondérés, de la fonction de Leibniz, du barycentre du système de points pondérés et les premières propriétés de la barycentration. Définition de l'isobarycentre. Les exemples des isobarycentres du triangle, du parallélogramme et du tétraèdre.
- *Lien entre sous-espace affine et barycentration* dans *Mercier* le théorème qui dit que le sous-espace affine engendré par une partie non vide est l'ensemble des barycentres des points de la partie et un exemple, ensuite on peut mettre le théorème qui dit qu'une partie de E est un sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentration,

- *Systèmes affinement libres* dans *Mercier* Dans *Mercier* les équivalences qui définissent une famille affinement libre puis la définition d'une telle famille.
- *Repérage* dans *Mercier* la définition d'un repère affine, du système de coordonnées barycentriques, le fait que deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels. La remarque qui suit (qui est dans le cas où on n'a pas un repère affine de E pour les points de départ).
- *Interprétation en termes d'aires* dans *Truffault* on pose un triangle et un point M qui n'est sur aucune des droites qui constituent les côtés. Ensuite on définit l'aire algébrique d'un triangle et on dit que les aires aglébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M. Des applications dans le triangle.
- *Applications* dans *Mercier* une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre et dans *Truffault* les théorèmes de Menelaüs et Céva.

Convexité

- *Convexité* dans *Tauvel* la définition d'une combinaison convexe, d'une partie étoilée, des exemples.
- *Enveloppe convexe* dans *Tauvel* la définition de l'enveloppe convexe d'une partie, en application le théorème de Lucas, la proposition pour la caractérisation de $Conv(A)$, l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée et le théorème de Carathéodory et son application (développement).
- *Points extremaux* dans *Tauvel* la définition des points extremaux, l'exemple des points extremaux de la boule unité d'un espace affine qui est la sphère unité de l'espace affine. Les conditions équivalentes pour qu'un point soit un point extremal et le théorème de Krein-Milman.
- *Résultats de séparation* dans *Tauvel* le théorème de Hahn-Banach géométrique (développement) et le contre-exemple dans le cas où le convexe n'est pas ouvert. La définition d'un hyperplan qui sépare deux parties et le théorème qui suit qui est une conséquence du théorème de Hahn-Banach géométrique.
- *Théorème de Helly* dans *Tauvel* le lemme qui précède le théorème de Helly puis le théorème de Helly.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Tauvel, *Géométrie*
- Mercier, *Cours de géométrie*
- Truffault, *Géométrie élémentaire*

Chapitre 31

140- Systèmes linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Le jury n'attend pas une *version à l'ancienne* articulée autour du théorème de Rouché-Fontené qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée.
La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !).
Par exemple, les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$. Le candidat doit pouvoir écrire un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes.
Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué.

Question. Quel est le lien entre la méthode de gradient et le système

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}\langle y, Ay\rangle - \langle b, y\rangle \end{aligned}$$

Question. Savoir donner les complexités des algorithmes cités.

Remarque. Dans le plan, on peut parler de conditionnement, de la méthode QR et des moindres carrés. On peut aussi parler des systèmes sur $\mathbb{Z}$.

Remarque. Il y a beaucoup d'applications théoriques : la classification des groupes abéliens de type fini, l'existence de bases, les entiers algébriques et l'algorithme du simplexe.

Développements

Développements proposés :
- Méthode de gradient à pas optimal, dans *Ramis-Warusfel*
- Méthode de relaxation pour les hermitiens, dans *Ciarlet*

Autres développements possibles :
- Décomposition de Bruhat, dans *Oraux X-ENS algèbre* 1

Idées pour le plan

On se place sur un corps $\mathbb{K}$
Généralités sur les systèmes linéaires

- *Définitions* dans *Grifone* la définition d'un système linéaire, l'expression matricielle et la notion de compatibilité, une condition sur l'espace vectoriel engendré par les colonnes pour que le système soit compatible. Dans *Ciarlet* la définition du conditionnement, le fait qu'il mesure la sensibilité de la solution du système linéaire vis-à-vis des variations sur les données A et b. Toujours dans *Ciarlet* l'explication de ce que signifie la résolution d'un système au sens des moindres carrés.
- *Système de Cramer* dans *Grifone* la définition d'un système de Cramer, il admet une et une seule solution. Leur forme et dans *Ciarlet* la complexité de l'algorithme.
- *Le cas général* dans *Grifone* un système de p équations en n inconnues de rang r et le théorème de Rouché-Fontené.

Systèmes échelonnés et résolutions directes

- *Systèmes échelonnés* dans *Grifone* la définition d'un système échelonné. On peut toujours se ramener à un système échelonné.
- *Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes* dans *Grifone* la liste des opérations élémentaires qui laissent un système invariant. Et dans *Voedts* l'expression matricielle des opérations élémentaires.
- *Méthode de Gauss* dans *Ciarlet* la méthode de Gauss, le théorème qui dit qu'elle marche toujours, un exemple dans *Grifone* et dans *Ciarlet*, la complexité de l'algorithme. Dans *Voedts* on cite les conséquences : calculs de déterminants, calculs d'inverses, le rang caractérise les matrices à équivalence près, générateurs de $GL_n(\mathbb{R})$.
- *Factorisation LU et factorisation de Choleski* dans *Ciarlet* le théorème de décomposition LU, la manière dont on résout après, sa complexiré. Ensuite le théorème de décomposition de Choleski et sa complexité.
- *Factorisation QR et matrices de Householder* dans *Ciarlet* la définition d'une matrice de Householder, le théorème qui suit et le théorème de factorisation QR d'une matrice.

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

- *Principe des méthodes itératives* dans *Ciarlet* l'idée générale des méthodes itératives, la condition sur la matrice B pour avoir convergence.
- *Méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation* dans *Ciarlet* on écrit $A = M - N$ et on écrit les équivalences pour arriver à $B = M^{-1}N$. Ensuite, on définit les matrices D, E et F et on donne, dans le cas des méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation, les formes de M et N dans un tableau. Ensuite le lemme et le théorème pour la convergence de la méthode de relaxation dans le cas des matrices hermitiennes définies positives (développement) et le théorème de convergence des autres méthodes : elles convergent ou divergent simultanément.

– *Méthodes de gradient* dans *Ramis-Warusfel* la méthode de descente pour le système linéaire, dans le cas où A est symétrique définie positive, la fonctionnelle admet un unique minimum qui vérifie $Ax = b$, l'idée générale des méthodes de descente, la méthode du gradient à pas optimal et l'estimation de l'erreur (développement).

Références

– Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et àl'optimisation*
– Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées. Volume* 1
– Grifone, *Algèbre linéaire*
– Voedts, *Cours de mathématiques*

Chapitre 32

145- Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités !

Question. On sait que S_n agit sur $\mathbb{C}[X_1, \cdot, X_n]_d$ (monômes de degré d), quelle est cette action ?

Réponse. il s'agit de : $\sigma : X_i \mapsto X_{\sigma(i)}$ c'est à dire la permutation des variables.

Question. Est-ce que les isomorphismes des groupes linéaires sont des conséquences du dénombrement ?

Réponse. En fait, ça aide : on a des injections qui deviennent des bijections grace à l'égalité des cardinaux.

Remarque. Ne pas confondre les nombres de Bell avec le nombre de partitions de n, c'est un problème différent.

Question. Soient des n-uplets $(x_1, \cdots, x_n), x_i \in \mathbb{N}$. On considère

$$A = Card\left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = S\right\}$$

où n et S sont des entiers positifs fixés. Calculer A.

Réponse. On considère la suite $(x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1)$. On cherche le nombre de $(n-1)$-uplets croissants tels que tous leurs termes soient inférieurs ou égaux à S. On considère

$$\begin{aligned} f : [\![1, n]\!] &\longrightarrow [\![0, S]\!] \\ i &\longmapsto f(i) = x_1 + \cdots + x_i \end{aligned}$$

f est croissante. On veut connaître le nombre de fonctions f de ce type, c'est un résultat qui doit figurer dans le plan : il y a $\binom{n+k-1}{k}$ applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Donc ici $A = \binom{s+n-1}{n-1}$.

Remarque. On peut aussi parler de problèmes de comptages d'arbres binaires.

Question. Comment compte-on les cardinaux de $GL_n(\mathbb{F}_q)$?

Question. Comment fait-on les partitions d'un entier en parts fixées ?

Question. On se place sur une grille $N \times N$ dans le plan. Comment va-ton du coin $(0, 0)$ au coin (N, N) en ne faisant que des pas vers le haut ou vers la droite ?

Réponse. On doit faire $2n$ pas au total : n vers la droite, n vers le haut. On doit choisir l'ordre dans lequel on les fait. Ce qui revient à $\binom{2n}{n}$ possibilités.

Question. Et si on ne veut pas descendre en dessous de la diagonale ?

Réponse. Ca revient aux nombres de Catalan. Pourquoi ? Par symétrie (on considère le symétrique lorsqu'on arrive à la diagonale) le nombre de chemins qui traversent la diagonale est égal au nombre de chemins qui arrivent au point $(N+1, N-1)$ c'est donc $\binom{2n}{n+1}$ et alors $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Question. Donner la preuve de la formule de Burnside.

Réponse. Il faut calculer de deux façons un cardinal.

Développements

Développements proposés :
- Partitions d'un entier en parts fixées, dans *Oraux X-ENS, analyse* 2
- Nombres de Bell (nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$), dans *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Autres développements possibles :
- Nombres de Catalan
- Nombres de polynômes irréductibes unitaires sur $\mathbb{F}_q$ dans *Gantmacher*
- Coloriage du cube
- Sous-groupes finis de SO_3
- Probabilité que deux nombres soient premiers entre eux

Idées pour le plan

Premières formules et premiers outils de dénombrement
- *Définitions et problèmes de base* dans *De Biasi* la définition d'un ensemble fini. On veut déterminer le cardinal de E, on donne ensuite le cas des p-uplets à valeurs dans des produits cartésiens d'ensembles finis et l'application aux nombre d'applications d'un n-ensemble dans un p-ensemble. On donne ensuite la définition des arrangements, des permutations, des exemples, la définition des coefficients binomiaux, les relations qu'ils vérifient, en application, la formule du binôme, le nombre de dérangement, le tirage non ordonné sans remise.
- *Quelques outils* on peut déjà dire que si deux ensembles sont en bijection, ils ont le même cardinal, mais ce n'est écrit nulle part. Ensuite, on parle dans *De Biasi* des principes de réunion d'ensemble fini (ce qu'il appelle addition) et du principe de récurrence (ce qu'il appelle multiplication) et on donne

le lemme des Bergers. En application, le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Dénombrement et théorie des groupes

- *Quelques principes* dans *Combes* la définition des classes d'équivalence dans un groupe pour un sous-groupe donné et le théorème de Lagrange puis la définition d'une action de groupe, la définition des orbites (encore avec une relation d'équivalence), la formule des classes, la formule de Burnside. En application le nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q$. On peut parler de la démonstration de A_n est simple comme d'un problème utilisant des arguments de cardinaux liés aux problèmes de groupes.
- *Quelques cardinaux et des conséquences* dans *Perrin* les cardinaux des groupes linéaires sur les corps finis et en application les isomorphismes exceptionnels.

Utilisation des séries entières et des séries génératrices

- dans *Saux-Picart* la définition d'une série génératrice, des exemples simples dans *De Biasi* puis dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 les nombres de Bell (développement), dans *Oraux X-ENS analyse* 2 le nombre de partitions d'un entier en parts fixées (développement) et dans *Saux-Picart* les nombres de Catalan.

Indicatrice d'Euler et fonction de Moebius

- *Indicatrice d'Euler* dans *Tauvel* la définition de la fonction caractéristique d'Euler, sa valeur sur les premiers et les puissances de premiers, c'est une fonction multiplicative, sa valeur pour tout n, et la propriété $\sum_{d|n} \phi(d) = n$. En exemple, le nombre d'inversibles d'un groupe cyclique particulier.
- *Fonction de Moebius* dans *Tauvel* la définition de la fonction de Moebius, la propriété $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ et le fait qu'elle est multiplicative. Les propriétés qui permettent de récupérer des fonctions avec les fonctions de Moëbius et d'Euler.

Références

- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 2
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 1
- De Biasi, *Mathématiques pour le capes et l'agrégation interne,* 3*ème édition*
- Saux-Picart, *Algorithmes fondamentaux*
- Combes, *Algèbre et géométrie*
- Perrin, *Cours d'algèbre*

Chapitre 33

146- Résultant. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il faut soigner la présentation et ne pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente $(U, V) \mapsto AU + BV$ qui lie le résultant et le PGCD de A et B.

Question. Est-ce que l'intégrité intervient, et où ?

Réponse. On peut se passer de l'intégrité pour définir le résultant mais pour les applications qui sont toutes sur des corps, ça parait plus raisonnable.

Remarque. Ne pas parler du déterminant d'une application linéaire mais du déterminant d'une matrice.

Question. Si on part d'un polynôme unitaire, est-ce qu'on peut donner le résultant en fonction des coefficients ?

Réponse. On a l'expression en fonction des racines. On utilise ensuite les relations coefficients-racines pour trouver l'expression du résultant en fonction des coefficients.

Question. Comment définit-on le résultant de deux polynômes constants ?

Réponse. La seule manière de le faire est de le poser égal à 1.

Développements

Développements proposés :

- Résultant de deux polynômes et applications, dans *Gourdon*
- Lemme de Kronecker, dans *Szpirglas*

Autres développements possibles :

- Théorème de Bezout

Idées pour le plan

Dans *Saux-Picart* on pose le cadre : A est un anneau commutatif intègre, $\mathbb{K}$ est un corps et on note $A_x[X]$ le sous-module des polynômes de degré $\leq d$. Introduction

- Dans *Szpirglas* la motivation pour le calcul de résultants.

Définitions et premières propriétés

- dans *Szpirglas* la définition de la matrice de Sylvester et dans la preuve l'application linéaire $(U, V) \mapsto AU+BV$, la matrice de Sylvester est la matrice de cette application dans une bonne base, dans *Goblot* la remarque sur ce qu'il vaut si la dimension est supérieure aux degrés des polynômes. Un exemple de résultant en petite dimension (à inventer) et une remarque qui dit que comme le résultant est polynômial en les coefficients des deux polynômes, il est continu en ces deux polynômes. Dans *Saux-Picart* les premières propriétés du résultant et dans *Gourdon* l'exercice sur le résultant et l'application qui suit (développement). Le corollaire qui dit qu'un polynôme n'a que des racines simples si et seulement si $Res(P, P') = 0$.

Expression et calcul du résultant

- *Expression en fonction des racines* dans *Lelong-Ferrand-Arnaudiès* la définition du résultant de deux polynômes généraux, la fait que c'est un polynôme irréductible et ensuite l'expression en fonction des racines des polynômes dans *Szpirglas* le corrolaire qui dit que le résultant est multiplicatif à droite sous certaines conditions.
- *Calcul par méthode d'abaissement du degré* dans *Saux-Picart* la proposition sur ce que donne le résultant quand on considère la division euclidienne d'un polynôme par l'autre et l'exemple qui suit.

Applications algébriques du résultant

- *Discriminant* dans *Szpirglas* la définition du discriminant d'un polynôme, le fait que dans un corps algébriquement clos un polynôme a une racine multiple si et seulement si son discriminant est nul, le discriminant d'un polynôme de degré 2 ou 3 et le théorème de Cayley-Hamilton.
- *Nombres algébriques* dans *Szpirglas* la définition d'un entier algébrique, la somme et le produit de deux entiers algébriques est algébrique et des exemples.
- *Transformation des équations algébriques* dans *Szpirglas* on pose le problème, la proposition qui suit, un exemple puis le lemme de Kronecker (développement).

Applications géométriques du résultant

- Dans *Szpirglas* la définition d'une courbe algébrique plane puis le théorème de Bezout, l'application aux coniques, des exemples.

Références

- Saux-Picart, *Algorithmes fondamentaux*
- Gourdon, *Algèbre*
- Szpirglas, *Algèbre pour la licence* 3
- Goblot, *Algèbre commutative*

Chapitre 34

148- Formes quadratiques réelles. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010)*.* La preuve de la loi d'inertie de Sylvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

Question. L'ensemble des matrices symétriques définies positives est étoilé en l'identité. Mais est-ce qu'il s'agit d'un ensemble convexe ?

Réponse. Oui. En effet, si on considère deux matrices A et B définies positives et un vecteur X non nul, pour tout $t \in [O, 1]$ on a

$$^tX\left((1-t)A + tB\right)X = (1-t)^tXAX + t^tXBX > 0.$$

Question. Si q est une forme quadratique définie positive, détailler pourquoi $N(q) = \sup_{\|x\|=1} q(x)$ est une norme.

Question. Si ϕ est une forme bilinéaire symétrique, est-ce que $\forall x, \phi(x,x) = 0 \Rightarrow \phi = 0$?

Réponse. Oui, par identité de polarisation.

Question. Écrire les formes quadratiques suivantes sous forme de carrés linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 - 3xy + 2yz \\ p(x,y,z) &= xy + yz + zx \end{aligned}$$

Réponse.

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 - 3xy + 2yz \\ &= (x - \frac{3}{2}y)^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2yz \\ &= (x - \frac{3}{2}y)^2 - (\frac{3}{2}y^2 - \frac{2}{3}z) + \frac{4}{9}z^2 \end{aligned}$$

q est donc une forme quadratique de signature $(2,1)$

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) &= xy+yz+zx \\
\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z) &= y+z \\
\frac{\partial p}{\partial y}(x,y,z) &= x+z \\
(x+z)(y+z) &= xy+xz+yz+z^2 \\
p(x,y,z) &= (x+z)(y+z)-z^2 \\
p(x,y,z) &= \frac{1}{4}((x+y+2z)^2-(y-x)^2)-z^2
\end{aligned}$$

p est donc de signature $(1,2)$.

Question. Soient λ et μ deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. On pose $u(x)=\lambda(x)\mu(x)$. Est-ce que u est une forme quadratique ? Montrer que si $dimE \geq 3, u$ est dégénérée. Écrire u comme carré de formes linéaires.

Réponse. $u(\alpha x)=\alpha^2 u(x)$ donc il s'agit bien d'une forme quadratique. $u(x)=0 \Rightarrow x \in Ker\lambda \cup Ker\mu$ la réunion de deux espaces de dimension supérieure ou égale à 2 ne peut pas être réduite à 0. Donc u est dégénérée.

$$q(x)=\frac{1}{4}\left[(\lambda(x)+\mu(x))^2-(\lambda(x)-\mu(x))^2\right]$$

qui est de signature

$$\begin{cases}(1,1) & \text{si } \{\lambda,\mu\} \text{ libre} \\ (1,0) & \text{si } \lambda=k\mu, k>0 \\ (0,1) & \text{si } \lambda=k\mu, k<0 \\ (0,0) & \text{si } \lambda=0 \text{ ou } \mu=0\end{cases}$$

Question. Soit q une forme quadratique positive et ϕ la forme hermitienne associée. Soit $g(x_1,\cdots,x_k)=det\,(\phi(x_i,x_j))_{i=1\cdots k}$. Montrer que $g(x_1,\cdots,x_k)\geq 0$ et que $g(x_1,\cdots,x_k)=0 \Leftrightarrow x_1,\cdots,x_k$ liée si q est définie positive. Que dire de ce résultat dans le cas où $k=2$?

Réponse. On sait que $(\phi(x_i,x_j))_{i=1\cdots k}$ est une matrice symétrique. Dans une bonne base on peut écrire :

$$q(y_1,\cdots,y_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 y_i^2, a_i \geq 0$$

et donc

$$\phi(y_1,\cdots,y_n,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x_i y_i$$

Si la famille $(x_1, \cdots, x_k)$ est liée, on peut (quitte à changer les variables) écrire

$$x_k = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1}$$

et alors

$$\phi(x_i, x_k) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \phi(x_i, x_j)$$

donc le déterminant est nul. Si $(x_1, \cdots, x_k)$ est libre, on peut l'orthonormaliser pour le semi-produit scalaire associé à ϕ. Il reste à voir comment la matrice de passage P change le déterminant.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_k \end{pmatrix}$$

et donc

$$g(x_1, \cdots, x_k) = det(P) g(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k)$$

avec $det(P) > 0$ et si q est définie positive $g(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k) > 0$. Ce qui nous donne le résultat.
Dans le cas $k = 2$ on a

$$g(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} q(x_1) & \phi(x_1, x_2) \\ \phi(x_1, x_2) & q(x_2) \end{vmatrix}$$

et donc $q(x_1, x_2) = q(x_1)q(x_2) - (\phi(x_1, x_2))^2$ et on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Question. Que dire des composantes connexes de $O(q)$ où q est une forme quadratique de signature (p, q) ?

Réponse. On suppose la forme quadratique non dégénérée : $p + q =$ dimension de l'espace. Si $q = 0$ l'espace est euclidien et le groupe orthogonal a deux composantes connexes. Si $p = 0$ c'est pareil. Dans les autres cas, il y aura quatre composantes connexes.

Développements

Développements proposés :
– Lemme de Morse, dans *Rouvière*
– Ellipsoïde de John-Loewner, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3
Autres développements possibles :

– Composantes connexes de formes quadratiques non dégénérées, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3
– Condition pour qu'il existe une base orthonormale de vecteurs isotropes pour une forme quadratique, dans *Meunier, agrégation interne de mathématiques* 3

Idées pour le plan

Généralités sur les formes quadratiques

– *Formes bilinéaires symétriques* dans *Gourdon* la définition d'une forme bilinéaire, l'écriture matricielle et le changement de base, la définition d'une forme bilinéaire symétrique et la matrice associée est symétrique. Dans *Grifone* la définition du rang, d'une forme quadratique non dégénérée, du noyau, la formule du rang pour les formes bilinéaires.
– *Formes quadratiques* dans *Gourdon* la définition d'une forme quadratique, la formule de polarisation et les formules qui donnent les polynômes de ϕ et q directement (règle de dédoublement des carrés dans *Grifone*), dans *Grifone* la définition du rang, noyau, matrice d'une forme quadratique. Dans *Grifone* la définition d'une forme quadratique définie. Dans *Gourdon* on met des exemples de formes quadratiques.
– *Formes quadratiques positives* Dans *Grifone* la définition d'une forme quadratique positive et d'une forme quadratique définie positive. Ensuite, on met des propriétés qui s'appliquent aux formes quadratiques positives : dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 l'exemple de forme quadratique définie positive et dans *Gourdon* les inégalités de Schwartz et Minkowski.

Orthogonalité, isotropie

– *Orthogonalité* dans *Gourdon* la définition de deux vecteurs orthogonaux, les propriétés des orthogonaux (il y en a sur deux pages dans *Gourdon*) et en application dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 l'inégalité d'Hadamard.
– *Isotropie* dans *Grifone* la définition du cône isotrope, des exemples, il contient le noyau et dans *Gourdon* un contre-exemple à la réciproque.
– *Groupe orthogonal* dans *Perrin* la définition d'une isométrie, la propriété qui dit que les isométries conservent la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique. Ensuite le théorème de réduction des isométries.

Réduction des formes quadratiques

– *Théorème de pseudo-réduction dans le cas réel* dans *Gourdon* l'existence de base orthogonales pour toute forme quadratique et la conséquence sur la diagonalisation des matrices symétriques réelles. On peut citer la méthode de Gauss pour obtenir des bases orthogonales (dans *Grifone*) ou écrire un exemple puis mettre le théorème de réduction de Sylvester et on définit la

signature de la forme quadratique. Toujours dans *Grifone* les conditions sur la signature pour avoir une forme quadratique définie positive, négative ou non dégénérée. Enfin, la remarque de *Gourdon* sur le fait que si on trouve deux sous-espaces vectoriels orthogonaux tels que q soit définie négative sur l'un et définie positive sur l'autre, alors on connaît la signature de q en fonction des dimensions de ces sous-espaces vectoriels.
- *Réduction simultanée* dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3 le théorème de pseudo-réduction simultanée, l'application à la log-convexité du déterminant puis l'ellipsoïde de John-Loewner (développement).

Applications
- *Classification des coniques* dans *Audin* la classification des coniques en fonction de la signature de la forme quadratique.
- *Réduction, version différentiable* dans *Rouvière* le lemme préliminaire et le lemme de Morse (développement).
- *Recherche d'extrema* dans *Gourdon, analyse* la définition de la matrice Hessienne et son application pour la recherche d'extrema locaux.

Références

- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 3
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Gourdon, *Algèbre*
- Gourdon, *Analyse*
- Grifone, *Algèbre linéaire*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Audin, *Géométrie*

Chapitre 35

149- Représentations de groupes finis de petit cardinal

Remarques et questions

Remarque. Pas de remarques du jury d'agrèg.

Développements

Développements proposés :
– Table de caractère de S_4 avec applications géométriques, dans *Peyré*
– Théorème de Frobenius et lemmes préliminaires, dans *Colmez*

Autres développements possibles :
– Table de caractère de $\mathcal{A}_5$
– Théorème de Molien

Idées pour le plan

Théorie générale

– *Définitions et premières propriétés* dans *Colmez*, la définition d'une représentation, en exemple la somme directe de représentations, la représentation de permutation, la représentation régulière. On définit la dimension d'une représentation et on se restreint aux représentations de dimension finie. On définit les caractères, on rappelle que ce sont des fonctions centrales, on définit $Hom_G(V_1, V_2)$, on donne le caractère de Hom_G et on définit l'isomorphie de deux représentations.
– *Décomposition des représentations* dans *Colmez* on définit une sous-représentation et une sous représentation irréductible. On donne le théorème de Maschke le lemme de Schur et les lemmes avant le théorème de Frobenius (développement). En corollaire le nombre de représentations irréductibles à isomorphisme près est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe.
– *Outils pour la construction des tables de caractères* dans *Colmez* on définit une table de caractère, on donne les théorèmes qui disent que deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère, qu'une représentation est irréductible si et seulement si le produit scalaire de son caractère est égal à 1 et que si une représentation est irréductible, elle apparait dans la décomposition de la représentation régulière avec comme multiplicité sa dimension. On donne ensuite la formule de Burnside et le nombre représentations de degré 1 est égal à l'indice du groupe dérivé.

Étude de groupes généraux

– *Groupes cycliques* dans *Peyré* la table de caractère des groupes cycliques (en expliquant un peu).

- *Groupes abéliens* dans *Peyré* la table de caractère des groupes abéliens en expliquant que le théorème de structure des groupes abéliens finis permet d'obtenir les représentations. On donne deux tables de caractère en exemple.
- *Groupes diédraux* dans *Peyré* on explique un peu la manière d'obtenir les tables de caractère des groupes diédraux et on donne les tables qu'on obtient.

En se restreignant aux petits cardinaux

- *Groupes symétriques et alternés* dans *Ramis-Warusfel* on donne la table de caractère de S_3 en donnant les caractères qui correspondent, puis dans *Peyré* la table de caractères de S_4 (développement) et dans *Ramis-Warusfel* la table de caractère de $\mathcal{A}_5$.
- *Le groupe des quaternions* dans *Peyré* on donne la table de caractères des quaternions.

Références

- Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*
- Ramis-Warusfel-Moulin, *Cours de mathématiques pures et appliquées, volume* 1
- Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*
- Alessandri, *Thèmes de géométrie, groupes en situation géométrique*

Chapitre 36

150- Racines de polynômes. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe

Remarques et questions

Question. À propos des suites de Sturm, est-ce qu'il en existe et comment on en fabrique pour des polynômes ?

Réponse. On utilise la dérivée du polynôme. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on veut que P_K ne s'annule pas sur $[a, b]$. On commence par supposer que P n'a pas de racine multiple, alors $P \wedge P' = 1$. On pose $P_0 = P$, $P_1 = P'$ et $P_{n+1} = -$le reste de le division euclidienne de P_{n-1} par P_n. On s'arrête au dernier polynôme non nul. On vérifie que c'est une suite de Sturm.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de structure des polynômes symétriques, dans *Ramis-Deschamps-Odoux, algèbre* 1
- Théorème de Kronecker, dans *Szpirglas*

Autres développements possibles :
- Ellipse de Steiner, dans *Tissier*
- Comptage de racines de polynômes et formes quadratiques, dans *Gantmacher*

Idées pour le plan

Dans toute la leçon, on se place sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Les racines de polynômes
- *Définitions et premières propriétés* dans *Gourdon* la définition d'une racine d'un polynôme et si a est une racine $X - a$ divise P, la définition d'une racine d'ordre h, la condition sur le polynôme dérivé et la conséquence sur la factorisation du polynôme. Un contre exemple dans le cas où on est dans un anneau et pas dans un corps, la conséquence qui dit qu'un polynôme de degré n a au plus n racines, si l'ensemble des racines est infini le polynôme est nul, et c'est faux si le corps est fini. Dans *Gozard* la définition d'un polynôme irréductible et la proposition sur l'irréductibilité des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Attention ! La définition de *Gozard* d'un polynôme irréductible est fausse dans le cas d'un anneau. Elle n'est vraie que dans le cas d'un corps. Pour avoir la véritable définition dans le cas d'un anneau, voir *Perrin* en adaptant la définition d'un élément irréductible d'un anneau aux anneaux de polynômes.

– *Aspect topologique* dans *Francinou-Gianella* le théorème de continuité des racines de polynômes et dans *Objectif Agrégation* le fait que la racine simple dépend localement du polynôme de manière $\mathcal{C}^\infty$ et l'application au fait que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples soit un ouvert.
– *Résultant et discriminant* dans *Szpirglas*la valeur du résultant en fonction des racines des polynômes puis la définition du discriminant d'un polynôme, les exemples dans les cas de polynômes de degré 2 et 3, l'expression du discriminant en fonction du résultant, la condition sur le discriminant pour que le polynôme ait une racine multiple.
– *Existence de racines* dans *Perrin* les choses sur les corps de rupture et les corps de décomposition : la définition d'un corps de rupture, l'existence et l'unicité à isomorphisme près, la définition d'un corps de décomposition, l'existence et l'unicité à isomporphisme près. Dans *Gozard* des exemples.

Les fonctions symétriques élémentaires

– Dans *Ramis-Deschamps-Odoux* la définition des polynômes symétriques, des polynômes symétriques élémentaires, la définition du poids et les théorèmes qui suivent, le lemme et le théorème de structure des polynômes symétriques (développement). Dans *Gourdon* les sommes de Newton et les relations coefficients racines.

Comptage des racines

– *Par l'analyse réelle* dans *Mignotte* la définition d'une suite de Sturm, on introduit le nombre de variations de signes de la fonction polynôme et le théorème de Sturm, la façon de fabriquer une suite de Sturm, le théorème de Budan-Fourier et la règle de Descartes.
– *Par l'analyse complexe* dans *Objectif Agrégation* le théorème des résidus, dans *Rudin* le théorème de Rouché et une application dans *Objectif Agrégation.*

Localisation des racines

– *Le cas réel* dans *Mignotte* la règle de Newton, la règle de Lagrange et le cas particulier de la règle de Descartes. (Dans *Mignotte* la localisation de racines s'appelle l'estimation de racines.)
– *Le cas complexe* dans *Mignotte* le théorème pour la localisation des racines complexes d'un polynôme, dans *Francinou-Gianella* la localisation des racines d'un polynôme complexe et dans *Szpirglas* le théorème de Kronecker (développement).

Références

– Ramis-Deschamps-Odoux, *algèbre* 1
– Szpirglas, *Mathématiques, algèbre* $L3$
– Gourdon, *Algèbre*

- Perrin, *Algèbre*
- Mignotte, *Mathématiques pour le calcul formel*
- Gozard, *Théorie de Galois*
- Objectif Agrégation
- Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre* 1
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*

Chapitre 37

151- Extensions de corps. Exemples et applications

Remarques et questions

Question. Donner un exemple d'extension non normale.

Réponse. L'extension $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$ n'est pas une extension algébrique. Ca ne peut donc pas être une extension normale. On peut aussi donner un exemple d'extension algébrique non normale en considérant $\mathbb{Q}\sqrt[3]{2}$: les conjuguées de $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ sont $\sqrt[3]{2}e^{\pm\frac{2i\pi}{3}} \in \mathbb{C}$. On a trois corps différents, donc on n'a pas une extension normale.

Question. Quels sont les sous-corps de $\mathbb{F}_{64} = \mathbb{F}_{2^6}$?

Réponse. Ce sont les $\mathbb{F}_{2^d}$ avec $d|6$.

Question. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Peut-on avoir des extensions finies de $\mathbb{K}$ de n'importe quel degré ?

Réponse. Dans le cas d'un corps fini $\mathbb{F}_p$ les extensions sont de la forme $\mathbb{F}_{p^n}$ et sont alors de degré n. Dans les cas des corps finis, il y a donc des extensions de tous degrés.
Si $car(\mathbb{K}) = 0$ on note P un polynôme irréductible de degré n et L un corps de rupture de P (c'est une extension de degré n). La question revient donc à savoir si il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur un tel corps. En général, ce sera faux puisque par exemple sur $\mathbb{R}$ les polynômes irréductibles sont de degré au plus 2.
Si on condidère maintenant un corps de caractéristique p (mais pas fini) on veut savoir si il existe des extensions de tout degré. Par théorème si le corps est algébriquement clos, ce sera faux : considérer la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ par exemple.

Question. Pour $\mathbb{Q}$, est-ce qu'il y a des extensions de degré arbitraire ?

Réponse. On sait que les corps cyclotomiques sont de degré $\phi(n)$. Sinon, on remarque que pour tout n le polynôme $X^n - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (par le critère d'Eisenstein).

Question. Donner une extension de corps dans laquelle le théorème de l'élément primitif est faux.

Remarque. Le corps ne sera ni un corps fini, ni un corps de caractéristique 0.

Réponse. On considère $\mathbb{F}_p(T)$. Le polynôme $X^p - T$ est irréductible et T est racine multiple, de mutiplicité p. On considère maintenant l'extension $\mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}})$ de $\mathbb{F}_p(T, U)$. On montre qu'elle est de degré p^2. On commence par admettre les deux égalités suivantes :

$$\left[\mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}}) : \mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U)\right] = p$$
$$\left[\mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U) : \mathbb{F}_p(T, U)\right] = p$$

on aura alors

$$\left[\mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}}) : \mathbb{F}_p(T, U)\right] = p^2$$

ce qui démontrera le résultat voulu.
Pour montrer les deux égalités précédentes, on doit montrer que $X^p - T$ et $X^p - U$ sont irréductibles dans les extensions considérées. Pour montrer que $X^p - T$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p(T, U)$ on doit montrer que $T^{\frac{1}{p}} \notin \mathbb{F}_p(T, U)$. Si on avait $T^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{F}_p(T, U)$ alors on aurait $T = \left(T^{\frac{1}{p}}\right)^p$ et donc on aurait l'existence de deux éléments Q, P tels que

$$\begin{aligned}
T^{\frac{1}{p}} &= \frac{Q(T,U)}{P(T,U)} \\
T &= \frac{Q^p(T,U)}{P^p(T,U)} \\
&= \frac{Q(T^p,U^p)}{P(T^p,U^p)} \\
TP(T^p,U^p) &= Q(T^p,U^p)
\end{aligned}$$

or dans la dernière égalité, les degrés des monômes en T à gauche et à droite doivent être égaux alors qu'à droite ils sont multiples de p et à gauche multiples de $p+1$. On a donc bien une extension de degré p^2.
Soit maintenant $x \in \mathbb{F}_p\left(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}}\right)$. Montrons que $deg_{\mathbb{F}_p(T,U)}(x) \leq p$.
On note Π_x le polynôme minimal de x sur $\mathbb{F}_p(T, U)$, on a alors $x^p \in \mathbb{F}_p(T, U)$ et le polynôme $X^p - x^p$ annule x tout en étant dans $\mathbb{F}_p(T, U)[X]$ avec $\Pi_x | X^p - x^p$ et $deg(\Pi_x) \leq p$.
Conclusion : si $\mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}})$ était monogène, alors il existerait $x \in \mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}})$ tel que $\mathbb{F}_p(T^{\frac{1}{p}}, U^{\frac{1}{p}}) = \mathbb{F}_p(T, U)(x)$. Or $deg_{\mathbb{F}_p(T,U)}(\Pi_x) \leq p$ ce qui est impossible.

Question. Soit K un corps de caractéristique 0 et $K \hookrightarrow L$ une extension finie. Notons $n = [L : K]$. Montrer qu'il y a n morphismes de corps $L \hookrightarrow \bar{K}$ où $\bar{K}$ désigne la clôture algébrique de K.

Développements

Développements proposés :

- Théorème de l'élément primitif dans le cas des corps finis et dans le cas des corps de caractéristique nulle, dans *Francinou-Gianella* et *Perrin.*
- Existence et unicité d'un corps fini et caractérisation des sous-corps, dans *Gozard* et *Perrin.*

Idées pour le plan

Tout au long de la leçon, on peut trouver des exemples dans *Francinou-Gianella*.
Corps et extensions de corps

- *Définitions et premières propriétés* dans *Gozard* la définition d'un corps puis dans *Perrin* la définition de la caractéristique d'un corps, c'est soit 0 soit un nombre premier. On ajoute qu'un corps de caractéristique 0 est infini. Dans *Gozard*, la définition d'une extension de corps, les remarques, des exemples. Dans *Perrin* le fait qu'un sous corps a une structre de $\mathbb{K}$ espace vectoriel, la définition du degré d'une extension et le théorème de multiplicativité des degrés. Dans *Gozard* des exemples.
- *Extensions algébriques* dans *Perrin* la définition d'un élément algébrique, des exemples, la définition avec l'homomorphisme ϕ et la définition du polynôme minimal, c'est un polynôme irréductible et on fait le lien entre son degré et le debré de l'extension. On peut donner des exemples simples de polynômes minimaux dans *Gozard*. Dans *Perrin* la définition d'extensions finies et d'extensions algébriques, toute extension finie est algébrique, la définition d'une extension engendrée, d'une extension monogène, le cas d'une extension monogène avec un élément algébrique et l'isomorphisme avec le quotient par le polynôme minimal. Dans *Gozard* page 38 la proposition qui concerne les extensions algébriques de type fini, dans *Perrin* l'ensemble des algébriques est un sous-corps.

Adjonction de racines

- *Polynômes irréductibles et extensions de corps* dans *Perrin* la définition d'un polynôme irréductible, le théorème qui dit qu'un polynôme est irréductible si et seulement si il n'a pas de racines dans les extensions du corps qui sont de degré assez petit, des exemples, la condition sur les degrés des extensions pour qu'un polynôme soit encore irréductible sur une extension, des exemples.
- *Corps de rupture* dans *Perrin* la définition d'un corps de rupture, des exemples dans *Gozard* et dans *Perrin* le fait qu'il existe et soit unique à isomorphisme près.
- *Corps de décomposition* dans *Perrin* la définition du corps de décomposition d'un polynôme, dans *Gozard* des exemples et dans *Perrin* l'existence et unicité à isomorphisme près. En application, on peut parler des polynômes cyclotomiques et de leur irréductibilité, dans *Gozard*
- *Clôture algébrique d'un corps* dans *Gozard* la définition d'un corps algébriquement clos, des exemples, tout corps algébriquement clos est infini, le théorème de d'Alembert-Gauss, la définition de la clôture algébrique d'un corps, l'exemple de $\mathbb{Q}$ et le théorème de Steinitz.

Applications

- *Constructions à la règle et au compas* dans *Gozard* la définition d'un point

constructible en un pas, des points constructibles, la définition d'un réel constructible, l'ensemble des réels constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée, des exemples et le théorème de Wantzel et son corrolaire.
- *Corps finis* dans *Perrin* la caractéristique d'un corps fini est un nombre premier, son cardinal est une puissance d'un nombre premier, la définition de l'homomorphisme de Frobenius, l'existence et l'unicité des corps finis et dans *Perrin* le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique avec dans *Gozard* la description des sous-corps d'un corps fini (développement) puis le théorème de l'élément primitif pour un corps fini et pour un corps de caractéristique nulle (développement). Enfin, dans *Gozard* le théorème qui permet de construire explicitement les corps finis en tant que quotient d'un corps fini par un polynôme irréductible.

Références

- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Gozard, *Théorie de Galois*
- Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, algèbre* 1

Chapitre 38

201-Espaces de fonctions. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque. A propos du théorème d'échantillonnage de Shannon : on peut réécrire la dernière inégalité comme une convolée discrète. Les éléments de BL^2 ont leur représentant continu qui tend vers 0 à l'infini. Et les fonctions de BL^2 sont analytiques (le montrer avec le théorème d'holomorphie sous l'intégrale).

Question. Comment on démontre le théorème de Montel ?

Question. Quelle est la définition d'un opérateur compact ?

Question. Comment on calcule la transformée de Fourier de la Gaussienne ?

Question. Faire le calcul pour le tout dernier exemple (le problème aux limites qu'on propose).

Question. Savoir faire la preuve de l'inversion de Fourier avec les distributions tempérées.

Développements

Développements proposés :
- L^p est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ dans *Brezis*
- densité des fonctions continues nulle part dérivable dans $C^0([0,1])$, dans *Zuily-Queffelec*

Autres développements possibles :
- Théorème d'échantillonnage de Shannon, dans *M. Willem Analyse harmonique réelle*
- Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein, dans *Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agrégation*
- Polynômes orthogonaux, dans *Objectif agrégation*
- Théorème de Montel, dans *Rudin* ou dans *Zuily-Queffelec*

Idées pour le plan

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on note (X, d) un espace métrique.
Espace des fonctions continues $C(X, \mathbb{K})$.
- *Premières propriétés* Dans *Hirsh-Lacombe* $C(X, \mathbb{K})$ est une algèbre unitaire commutative. Dans le cas où X est compact, c'est en plus un Banach. On suppose ensuite X compact dans toute la suite. Dans *Pommelet*, le critère de prolongement des applications uniformément continue et l'application qui est donnée juste après : la construction de l'intégrale de Riemann par les fonctions réglées.

- *Parties denses* : dans *Zuily-Queffelec* : l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ (développement) puis dans *Hirsh-Lacombe* les théorèmes de Stone-Weierstrass dans les cas $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ avec la définition d'une algèbre séparante et des applications : la densité des polynômes dans les fonctions continues sur un compact et la densité des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues et 2π-périodiques à valeurs complexes.
- *Parties compactes* Dans *Hirsh-Lacombe* ou *Zuily-Queffelec* la définition de l'équicontinuité et le théorème d'Ascoli. Des applications : dans *Hirsh-Lacombe*, la proposition sur la suite équicontinue de $C(X)$, et l'exemple d'opérateur compact qui est donné, dans *Zuily-Queffelec* le théorème de Montel, dans *Brezis* le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (sans l'énoncer : on le met après)

Espace des fonctions intégrables (tout dans *Brezis*).

- *Définitions et premiers résultats* Dans *Brezis* la définition d'une fonction L^1, la définition de la norme L^1, le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la définition des espaces L^p et de la norme L^p, l'inégalité de Hölder, le théorème qui dit que L^p est un espace vectoriel normé puis le théorème de Fischer-Riesz en développement (L^p est un Banach).
- *Convolution. Régularisation. Résultats de densité et de compacité* Dans *Brézis* le théorème qui dit que les fonctions continues à support compact sont denses dans les L^p ($p < \infty$). Puis le théorème sur la régularité de la convolée, la proposition-définition sur le support de la convolée, la propriété sur le support de la convolée, la proposition sur la dérivation de la convolée, la définition d'une suite régularisante, la convolée par une suite régularisante (convergence dans C^∞ et dans L^p), la densité des fonctions continues à support compact dans les L^p, le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Espace des fonctions de carré intégrable

- *Espace L^2, premières propriétés, rappels sur les Hilbert* dans *Objectif Agrégation* la définition des espaces L^2 en tant qu'espaces de Hilbert, le théorème de projection sur un sous-espace fermé et son application dans le cas L^2 : l'espérance conditionnelle. Le théorème de Riesz dans le cas L^2 et le théorème de Lax-Milgram et un exemple pour l'existence de bases Hilbertiennes : celle donnée par la théorie des séries de Fourier.
- *Transformation de Fourier sur L^2 et bases Hilbertiennes* Dans *Zuily* la définition de l'espace de Schwartz, la transformée de Fourier dans S, en exemple : la transformée de Fourier d'une gaussienne dans *Zuily-Queffelec*, la transformée de Fourier inverse dans S, quelques propriétés de la transformée de Fourier dans S puis le théorème pour la transformée de Fourier dans L^2 puis

des applications : dans *Objectif agrégation* les polynômes orthogonaux (base Hilbertienne), on peut aussi rajouter les valeurs propres de la transformée de Fourier dans L^2 et le théorème d'échantillonnage de Shannon.
- *L'espace* H^1 Dans *Brézis* la définition de l'espace H^1, c'est un Hilbert pour la norme H^1, la définition de H_0^1 et le théorème qui dit que si $u \in H^1$ alors $u \in H_0^1 \Leftrightarrow u = 0$ sur ∂I et l'inégalité de Poincaré et l'exemple de résolution de problème au limites qui suit.

Références

- Rudin, *Analyse réelle et complexe*
- Brezis, *analyse fonctionnelle*
- Objectif Agrégation
- Pommelet, *Analyse*
- Zuily, *éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
- Hirsh Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle.*

Chapitre 39

202- Exemples de parties denses et applications

Remarques et questions

Pas de remarques du jury d'agrèg en 2010.

Développements

Développements proposés :
- Densité dans $C^0([0,1])$ des fonctions continues nulle part dérivables, dans *Zuily-Queffelec*
- Densité des polynômes orthogonaux, dans *Objectif Agrégation*

Autres développements possibles
- Critère de Weyl pour les suites équiréparties, dans *Oraux X-ENS analyse*
- Théorème de Stone Weierstrass dans le cas réel, dans *Hirsh-Lacombe*
- Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein, dans *Zuily-Queffelec*
- théorème de Müntz, dans *oraux X-ENS*
- Banach-Steinhaus et application : existence d'une fonction continue dont la sérue de Fourier diverge en 0, dans *Gourdon, Analyse.*

Idées pour le plan

Introduction
- Dans *Gourdon, analyse* la définition de la densité et la caractérisation séquentielle dans le cas métrique et la définition d'un espace séparé.

Exemples de parties denses dans des espaces de dimension finie
- *Dans* $\mathbb{R}$ dans *Gourdon*, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. En application, le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité, et dans *Gourdon, Analyse* une caractérisation des fonctions convexes (en exercice dans le chapitre sur les fonctions convexes) Dans *Gourdon, analyse* la proposition sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$ (en exercice dans le chapitre sur les suites numériques). En application : $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, une condition pour que les $e^{2\pi i\theta}$ soient denses dans $\mathbb{U}$ et dans les *oraux X-ENS* le critère de Weyl pour les suites équiréparties.
- *Dans* $M_n(\mathbb{K})$ *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$: Dans *Gourdon, algèbre* le fait que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, en application : AB et BA ont même polynôme caractéristique, calcul de la différentielle du déterminant dans *Rouvière.* Dans *Objectif agrégation* les résultats sur $T_n(\mathbb{K})$ et $C_n(\mathbb{K})$, en application la remarque sur la décomposition de Dunford.

Exemples de parties denses dans des espaces de dimension quelconques
- *Prolongement de fonctions* : Dans *Gourdon, analyse* le théorème de prolongement des fonctions uniformément continues définies sur une partie dense et

en application l'unicité à isométrie près du complété d'un espace métrique, Dans *Pommelet*, l'application : construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées. Le théorème de Fourier Plancherel (prolongement de la transformée de Fourier à L^2) dans *Rudin*
- *Densité dans les espaces L^p* Dans *Rudin* l'ensemble des fonctions étagées, mesurables à valeurs complexes (etc) est dense dans L^p, les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p, dans *Brezis* C_c^∞ est dense dans L^p, en application : le lemme de Riemann Lebesgue *Rudin*, la séparabilité des L^p *Brezis*. (Si on trouve où c'est, le résultat qui dit que $L^p \cap L^q$ est dense dans L^q)
- *Stone Weierstrass et applications* Dans *Hirsh-Lacombe*, les deux théorèmes de Stone Weierstrass et des applications.

Bases Hilbertiennes
- *Espaces de Hilbert* Dans *Objectif agrégation* la caractérisation de la densité dans un Hilbert, la définition d'une base Hilbertienne, la caractérisation des bases Hilbertiennes, exemple classique : les séries de Fourier.
- *Polynômes orthogonaux* Dans *Objectif agrégation* la définition des fonctions poids, des exemples de familles de polynômes orthogonaux et le théorème pour la densité des polynômes orthogonaux (développement)

Théorème de Baire
- Dans *Zuily-Queffelec* Le théorème de Baire. En application : le théorème de Banach Steinhaus et l'existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point, (le théorème de l'application ouverte et le théorème de Tietze si il y a de la place), la non-existence de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{Q}$ et discontinues sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, densité dans l'espace des fonctions continues des fonctions continues nulle part dérivable (développement) et plein d'applications de *Gourdon, analyse*

Références

- Objectif Agrégation
- Gourdon, *Analyse*
- Gourdon, *Algèbre*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*
- Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
- Brezis, *Analyse fonctionnelle*

Chapitre 40

203-Utilisation de la notion de compacité

Remarques et questions

Question. Donner un exemple de compact en dimension infinie.

Réponse. On peut bien sûr penser à l'image d'un compact par une injection canonique continue. (la fonction nulle est un compact de n'importe quel espace fonctionnel).
Mais un truc non trivial ?
Penser à chercher un ensemble qui vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli (X un compact, et $A \subset C(X, Y)$ équicontinue et $\forall x \in X, \{f(x)|f \in A\}$ est bornée.
Un ensemble de fonctions r-lipschitziennes est équicontinu.

Question. Soit H un Hilbert et $T : H \mapsto H$ linéaire. On dit que T est compacte si $T(B(O, 1))$ est relativement compacte (i.e. $T(\bar{B}(0, 1))$ est compacte). Soit T compacte et S continue.

Montrer que $S \circ T$ et $T \circ S$ sont compacts.

Réponse. Soit x_n une suite de $B(0, 1)$, comme H est un Hilbert (qu'on suppose apparemment de dimension finie, sinon c'est impossible), il existe une suite extraite $x_{\phi n}$ qui converge vers x ($\|x\| \leq 1$) et comme S est continue $Sx_{\phi(n)} \to Sx$.
Comme T est compacte, $TB(O, \|S\|)$ est relativement compacte. Or $Sx \in B(O, \|S\|)$ car

$$\|Sx\| \leq \|S\|\|x\| \leq \|S\|.$$

Donc $TSB(0, 1)$ est relativement compacte.
Montrons maintenant que $STB(0, 1)$ est relativement compacte.
$TB(0, 1)$ est relativement compacte.
Soit $(x_n) \subset B(0, 1)$ Montrons que STx_n admet une sous-suite qui converge.
T compact, donc $Tx_{\phi(n)} \to y$ et comme S est continue $STx_{\phi(n)} \to Sy$.

Remarque. Remarques du jury d'agrèg :

- Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale sans proposer des exemples significatifs d'utilisation.
- Des exemples d'utilisation :
  - Stone Weierstrass
  - Point fixe
  - Etude qualitative d'équations différentielles

Développements

Prévus

- Ellipsoïde de John Loewner, dans *Oraux X-ENS Algèbre 3*
- Théorème de Sélection de Helly, dans *Oraux X-ENS Analyse 2*

Autres développements possibles :

- Théorème de Brouwer en dimension 2 dans *Rouvière*
- Représentation conforme de Riemann
- Cauchy-Peano
- Stone-Weierstrass, dans *Hirsh-Lacombe*
- Les deux théorèmes de Dini, dans *Gourdon*
- Théorème de Montel, dans *Rudin* ou *Zuily-Queffelec*

Idées pour le plan

Conséquences directes des définitions.

- *La définition de Borel-Lebesgue* Dans *Pommelet*, la définition puis des conséquences : dans *Gourdon* le théorème sur les idéaux de l'anneau $C(X, \mathbb{R})$ si X est un compact et dans *Hirsh-Lacombe* le théorème de Dini.
- *La propriété de Bolzano Weierstrass* Dans *Pommelet* la propriété et en conséquence : les propriétés simples qui sont à la suite dans *Pommelet* et en application le procédé diagonal, le théorème de Tycchonov dans *Hirsh-Lacombe* et le théorème de sélection de Helly (développement).

Fonctions continues sur un compact

- *Problèmes d'extremums* Dans *Gourdon* l'image d'un compact par une application continue est un compact, condition pour un homéomorphisme, une fonction continue sur un compact atteint ses bornes. En application : le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Rolle (toujours dans *Gourdon* mais un peu plus loin) l'ellipsoïde de John-Loewner (développement). Dans *Pommelet* l'application compacité et distances atteintes.
- *Théorème de Heine* Dans *Gourdon* le théorème de Heine, en application l'application de *Pommelet* qui dit que toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux et le second théorème de Dini dans *Gourdon* un peu plus loin.
- *Théorèmes de point fixe* Dans *Pommelet* le théorème de Courant Fischer, théorème de Brouwer dans *Rouvière* et le théorème de Schauder dans *Pommelet.*
- *Le théorème de Stone Weierstrass* Dans *Hirsh-Lacombe* les deux théorèmes et quelques applications (qui suivent immédiatement)

Compacité dans les EVN

- *En dimension finie* dans *Gourdon* les compacts en dimension finie. Application : théorème de Riesz *Hirsh-Lacombe* ou dans *Gourdon*
- *En dimension infinie* Dans *Brezis* la définition d'un opérateur compact, l'alternative de Fredholm et le résultat sur le spectre d'un opérateur compact.

Théorème d'Ascoli

- Dans *Hirsh-Lacombe* le théorème d'Ascoli. Et dans *Zuily-Queffelec* deux applications : le théorème de Montel et le théorème de Cauchy-Peano.

Références

- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Hirsch Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
- Gourdon, *Analyse*
- Brezis, *Analyse fonctionnelle*
- Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*

Chapitre 41

204- Connexité. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. Bien distinguer connexité et connexité par arcs.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Brouwer en dimension 2, dans *Rouvière*
- $SO(3)$ est un groupe simple, dans *Oraux X-ENS, algèbre*

Autres développements possibles :
- Le théorème sur la connexité des valeurs d'adhérences de certaines suites, dans *Gourdon*
- Surjectivité de l'exponentielle, non référencé

Idées pour le plan

Généralités.
- *Définitions et exemples* dans *Gourdon* la définition d'un espace connexe, des premiers exemples ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$), la définition d'une partie connexe d'un espace connee, des exemples (par exemple les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$.
- *Premières propriétés et stabilité* dans *Gourdon* l'image d'un connexe par une application continue est un connexe, la propriété qui dit qu'un espace est connexe si toute fonction continue de cet espace à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante, une partie comprise au sens de l'inclusion entre A et $\bar{A}$ avec A connexe est connexe, l'intersection d'une famille de connexes qui en coupent tous un, des contre-exemples dans *Hauchecorne*, dans *Gourdon* l'intersection d'une famille de connexes qui se coupent deux à deux puis le produit cartésien de connexes et dans *Gourdon* l'exercice sur les valeurs d'adhérence de certaines suites.
- *Composantes connexes* dans *Gourdon* la définiton de la relation d'équivlence *être dans la même partie connexe* puis la définition des composantes connexes comme les classes d'équivalence pour cette relation, donner un exemple d'un espace en plusieurs morceaux (à inventer).

Connexité par arcs et applications.
- *Définitions* dans *Gourdon* la définition d'un chemin er d'un connexe par arcs, des exemples de connexes par arcs, la propriété qui dit que connexe par

arcs entraîne connexe puis exemple d'un connexe non connexe par arcs dans l'exercice 5 page 44 de *Gourdon* ou dans *Hauchecorne*

– *Applications aux groupes matriciels* dans *Mneimé-Testard*, la propriété qui dit que les connexes ouverts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont connexes par arcs et en conséquence la connexité de $GL_n(\mathbb{C})$, les projecteurs de rang p dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $S0(n)$.

Applications à l'analyse

– *Analyse réelle*

1. *À propos de* $\mathbb{R}$ le théorème des valeurs intermédiaires, dans *Hauchecorne* la remarque comme quoi la réciproque d'un intervalle n'est pas forcément un intervalle, et dans *Gourdon* le théorème de Darboux.

2. *À propos des homéomorphismes* dans *Gourdon* la définition d'un homéomorphisme et la propriété comme quoi les homéomorphismes échangent les composantes connexes via l'exercice 8 p 47. Dire que montrer que deux parties n'ont pas les mêmes propriétés de connexité permet de montrer qu'elles ne sont pas homéomorphes. En exemple, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

3. *Dans* $\mathbb{R}^n$ dans *Gourdon* le théorème qui dit que si $\mathcal{U}$ est connexe et df est nulle sur $\mathcal{U}$ alors f est constante et dans *Rouvière* le théorème de Brouwer en dimension 2 (développement) et les lemmes préliminaires nécessaires.

– *Analyse complexe* dans *Objectif Agrégation* la formule de Cauchy, le théorème de prolongement analytique et principe du maximum et la formule des résidus (on définit proprement l'indice des points).

– *Théorie des groupes* dans *Mneimé-Testard* on parle de la décomposition polaire, on donne le théorème qui dit que si un sous-groupe est connexe et G/H est aussi connexe, alors G est connexe. Ensuite, on donne les théorèmes sur les ensembles connexes de matrices : $Gl_n^+(\mathbb{R})$ est connexe et $Gl_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes, $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe et l'ensemple des matrices de rang p est connexe. Enfin, dans *Oraux X-ENS* le groupe SO_3 est simple (développement).

Références

– Gourdon, *Analyse*
– Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
– Mneimé-Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*
– Gonnord-Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*

– Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* ?

Chapitre 42

205-Espaces complets. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Le théorème de Baire trouvera évidemment sa place, mais il fait l'illustrer par des applications.

Question. $C^1([a,b])$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est-il complet ?

Réponse. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$. Alors :

$$\exists g \in C([a,b]),\ \ f_n \underset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} g$$
$$\exists h \in C([a,b]),\ \ f_n' \underset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} h$$

On veut maintenant écrire f_n' en fonction de f_n. On a

$$f_n(t) = \int_a^t f_n'(x)\mathrm{dx} + f_n(a)$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = g(t) = \int_a^t h(x)\mathrm{dx} + g(a),$$

qui est dérivable et sa dérivée est égale à h.

Question. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, est-ce que son complété $(\hat{E}, \hat{d})$ est un espace vectoriel normé ?

Réponse. Oui.

Question. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $C_\alpha = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ bornée et α-Hölderienne$\}$ on pose

$$\|f\|_\alpha = f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Montrer que $(C_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est complet.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Fischer-Riesz - L^p est un espace de Banach, dans *Brezis*
- Densité dans $C^0([0,1])$ des fonctions continues partout dérivables nulle part, dans *Zuily-Queffelec*

Autres développements possibles :
- Théorème de Cauchy-Lipschitz, dans *Demailly*
- Théorème de Baire et une application, dans *Gourdon*
- Théorème de Banach-Steinhaus et application : existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point, dans *Gourdon*
- Théorème d'échantillonnage de Shannon, dans *Willem, analyse harmonique réelle*

Idées pour le plan

Généralités

- *Suites de Cauchy, espaces complets* Dans *Albert*, la définition d'une suite de Cauchy, la remarque qui dit qu'une suite convergente est de Cauchy, la définition d'un espace complet, l'exemple, dans *Gourdon* d'autres propriétés et exemples. Dans *Albert*, le théorème qui donne l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue, la définition d'un espace complet.
- *Propriétés des espaces complets* Dans *Albert* la suite des propriétés des espaces complets, les produits d'espaces complets, les espaces vectoriels normés de dimension finie sont des Banach, on annonce le résultat sur les espaces de fonctions continues à valeurs dans des Banach. Dans *Gourdon* le théorème qui dit qu'un espace est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente (dans *Pommelet* aussi).
- *Théorèmes importants* Dans *Albert* le théorème de prolongement uniformément continu, en application : la construction de l'intégrale de Riemann à l'aide des fonctions réglées dans *Hirsch-Lacombe*, le théorème de Plancherel dans *Rudin*, le théorème de point fixe de Picard dans *Albert* et en application le théorème de Cauchy-Lispschitz et le théorème de complétion d'un espace métrique avec en exemple $\mathbb{Q}$ toujours dans *Albert* (ou dans *Pommelet* pour le dernier).

Exemples d'espaces complets

- *Fonctions bornées* Dans *Albert* le théorème qui dit que les fonctions bornées et C^∞ à valeurs dans un Banach sont un espace complet. Des exemples.
- *Applications linéaires continues* Dans *Albert* les applications linéaires continues à valeurs dans un Banach est un espace de Banach. En application : le dual topologique est un espace de Banach.
- *Espaces L^P* Dans *Brezis* la définition des espaces L^p, l'inégalité de Hölder et le théorème de Riesz-Fischer qui dit que ce sont des espaces de Banach $\forall p \in [1, +\infty]$ (développement)
- *Espaces de Hilbert* Dans *Objectif Agrégation* la définition d'un Hilbert, l'exemple de L^2, les théorèmes de projection (sur un convexe fermé et sur un sous-espace fermé) et le théorème de Riesz.

Théorème de Baire et applications

- Dans *Gourdon, analyse* le théorème de Baire (ne pas parler d'espaces de Baire !) et les applications qui suivent. En particulier le développement : l'ensemble des fonctions continues dérivables nulle part est dense dans $C^0([0,1])$, dont la démonstration est faite dans *Zuily-Queffelec* et le théorème de Banach Steinhaus et l'application : existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point.

Références

- Albert, *Topologie*
- Gourdon, *Analyse*
- Hirsh-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*
- Brezis, *Analyse fonctionnelle*
- Objectif agrégation
- Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*

Chapitre 43

206- Théorèmes de point fixe. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la necessité des hypothèses.

Question. Si f est strictement convexe, est-ce que son minimum est unique ?

Réponse. Oui, en effet si f a deux points x et y qui réalisent son minimum, on a pour $t \in]0,1[$,

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$$

et donc on a une contradiction avec le fait que x et y réalisent le minimum de f.

Remarque. Il serait bon de connaître une application du théorème de Brouwer.

Question. A-t-on des résultats de continuité d'un point fixe par rapport à un paramètre ?

Réponse. Soit

$$\begin{aligned} \phi : E \times \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ (u,t) &\longmapsto \phi(u,t) \end{aligned}$$

on suppose ϕ continue par rapport à la seconde variable, contractante par rapport à la première variable. On note, pour chaque paramètre t, $x_0(t)$ le point fixe. Alors, en écrivant $x_t^{n+1} = \phi(x_t^n, t)$ on a

$$\|\phi(x_{t_1}^n, t_1) - \phi(x_{t_2}^n, t_2)\| \leq \epsilon |t_1 - t_2|$$

et il fait refaire la même preuve que pour le théorème de point fixe de Picard.

Question. Pourquoi est-ce que la solution de l'équation du pendule est définie sur $\mathbb{R}$?

Réponse. On a $u'' = -\sin(u)$ on peut utiliser le théorème des majorations à priori (f est $\mathcal{C}^1$ bornée) ou bien une méthode d'énergie.

Question. Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère

$$X = \{f \in E | \forall x \in [0,1], f(x) \in [-2,0]\}$$

et

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto T_f : x \mapsto \frac{1}{2}\int_0^x f(y) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \mathrm{dy} - x \end{aligned}$$

Montrer que X est fermé dans E puis que T admet un unique point fixe.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Stampacchia, dans *Brezis*
- Théorème de Brouwer en dimensions 2, dans *Gonnord-Tosel*

Autres développements possibles :
- Théorème de Cauchy-Lipschitz, dans *Demailly*
- Théorème ergodique de von Neumann, dans *Objectif Agrégation*
- Convergence de la méthode de relaxation pour les matrices hermitiennes définies positives, dans *Ciarlet*
- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ dans *Alessandri*

Idées pour le plan

Points fixes et complétude
- *Théorème de Picard* dans *Rouvière* le théorème du point fixe de Picard et les contre-exemples qui suivent pour montrer que toutes les hypothèses de l'énoncé sont indispensables. La remarque qui dit que le théorème est encore valable si on remplace la fonction par l'une de ses itérées (à condition que l'itérée en question soit alors contractante bien sûr).
- *Application : le théorème de point fixe à paramètre* dans *Rouvière* ou *Gourdon* le théorème de point fixe à paramètre et l'exemple qui suit.
- *Application aux équations différentielles* dans *Demailly* le théorème de Cauchy-Lipschitz, et un exemple dans lequel on n'a pas unicité au problème de Cauchy (c'est juste après le théorème de Cauchy-Arzela-Peano. Dans *Rouvière* des exemples qui se résolvent explicitement avec la méthode de démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.
- *Applications en calcul différentiel* dans *Rouvière* le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites, en disant que leur preuve utilise le théorème du point fixe de Picard.
- *Application en analyse hilbertienne : le théorème de Stampacchia* dans *Brezis* le théorème de projection sur un compact fermé, puis le théorème de Stampacchia et l'application au théorème de Lax-Milgram.

Points fixes et compacité
- *Dans* $\mathbb{R}$ dans *Rombaldi* les théorèmes d'existence de points fixes pour les applications continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les contre-exemples quand il manque des hypothèses aux théorèmes.
- *Applications lipschitziennes* dans *Gourdon* le théorème qui dit que dans un compact, une application strictement lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à 1 admet un unique point fixe (ce théorème est aussi dans *Rombaldi*

mais il n'est pas énoncé dans le cadre d'un espace métrique compact mais seulement dans le cas d'un espace normé compact) un contre-exemple dans le cas où l'espace de départ est seulement supposé complet. Dans *Rombaldi* le théorème qui dit que sur une partie convexe compacte, une application 1-lipschitzienne admet au moins un point fixe (faire une remarque comme quoi on n'a pas unicité en fait, par exemple prendre l'identité qui a une infinité de points fixes).
- *Applications continues* dans *Gonnord-Tosel* le lemme préliminaire au théorème de Brouwer en dimension 2 puis le théorème (développement). Ca serait bien de trouver une application.

Résolution approchée de $F(x) = 0$
- *Introduction* on explique comment on se ramène à résoudre $f(x) = x$ en posant $f(x) = \lambda F(x) + x$ et en adaptant λ pour obtenir les propriétés qu'on veut sur f pour pouvoir appliquer les théorèmes.
- *Points fixes attractifs et répulsifs* dans *Demailly* la classification des points fixes et en exemple du cas douteux, l'étude de la suite $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ dans *Oraux X-ENS* 1.
- *Exemple de la méthode de Newton* dans *Demailly* l'exemple de la méthode de Newton (dire qu'il s'agit d'un point fixe superattractif). Il y a plus de détails sur la vitesse de convergence dans *Rouvière*. Il faut faire un schéma en annexe. Dans l'idéal, il faut trouver des contre-exemples pour les cas où on enlève des hypothèses à Newton.
- *Résolution de systèmes linéaires par des méthodes itératives* dans *Ciarlet* on expose la résolution d'un système linéaire, et le théorème qui donne la convergence de la méthode dans le cas où la norme de la matrice B est strictement inférieure à 1. On pose les matrices D, E et F. Ensuite on donne les matrices M et N dans les cas des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation puis enfin le théorème de convergence de la méthode de relaxation dans le cas des matrices hermitiennes définies positives.

Références

- Brezis, *Analyse fonctionnelle*
- Gonnord-Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle*
- Gourdon, *Analyse*
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*

– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 1

Chapitre 44

207-Prolongement de fonctions. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque. Remarques du jury d'agrèg

– Les questions liées au prolongement analytique font partie de la leçon

Question. Dans le Hirsh-Lacombe, page 55
Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X, A \neq$ et $g : A \to \mathbb{R}$, C-Lipschitzienne. On pose $\forall x \in X, f(x) = \inf_{u \in A} \{g(u) + Cd(u, x)\}$.

Montrer que f est un prolongement de g encore C-Lipschitzien (avec même constante de Lipschitz).

Réponse. On commence par montrer que f est bien définie. On fixe $u_0 \in A$. Alors, $\forall u \in A$

$$\begin{aligned} |g(u) - g(u_0)| &\leq Cd(u, u_0) \\ g(u_0) &\leq g(u) + Cd(u, x)^{\circ} Cd(x, u_0) \end{aligned}$$

Donc l'infimum qui définit f est bien défini.

On montre maintenant que f prolonge g. Si $a \in A$

$$\begin{aligned} f(a) &= \inf_{u \in A} \{g(u) + Cd(u, a)\} \leq g(u) \\ |g(a) - g(u)| &\leq Cd(u, a) \\ g(a) &\leq g(u) + Cd(u, a) \text{ et ce } \forall u \in A \\ g(u) &\leq f(a) \\ g &= f_{|A} \end{aligned}$$

On montre maintenant que f est encore C-Lipschitzienne. Soient $x, y \in X$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq g(u) + Cd(u, x) \quad \forall u \in A \\ f(x) &\leq g(u) + Cd(u, y) + Cd(y, x) \\ f(x) &\leq f(y) + Cd(y, x) \end{aligned}$$

et par symétrie des rôles de x et y, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y).$$

Question. Calcul de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Réponse. Le calcul s'effectue de la manière classique en mettant $\Gamma(\frac{1}{2})$ au carré et en faisant un changement de variables en polaires. On trouve $\sqrt{\pi}$.

Question. Calculer
$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{dx}.$$
Question préliminaire : Calculer la transformée de Fourier de
$$g(x) = e^{-2\pi|x|} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Réponse. L'idée est d'utiliser la transformée de Fourier.
$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{2i\pi tz} \mathrm{dt} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi|t|} e^{-2i\pi tz} \mathrm{dt} \\
&= \int_{\mathbb{R}^-} e^{2\pi t(1-i\xi)} \mathrm{dt} + \int_{\mathbb{R}^+} e^{-2\pi t(1+i\xi)} \mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-i\xi)} + \frac{1}{2\pi(1+i\xi)} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\xi^2}
\end{aligned}$$
Et donc,
$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{dx} \\
&= \|\pi \hat{g}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \pi^2 \|\hat{g}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \pi^2 \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \pi^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi|x|} \mathrm{dx} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Développements

Développements présentés :
– Prolongement de la fonction Γ, dans *Zuily-Queffélec*
– Théorème d'Abel angulaire et théorème Taubérien faible, dans *Gourdon*
Autres développements possibles :
– Lemme de Borel, dans *Zuily-Queffélec* ou *Rouvière*
– Théorème de Plancherel, dans *Rudin*
– Théorème de Tiezte, dans *Zuily-Queffélec*

Idées pour le plan

Commencer avec la définition d'un prolongement.
Aspects topologiques

- *Prolongement ponctuel* dans *Gourdon* le prolongement par continuité en un point et des exemples (par exemple $x \sin(\frac{1}{x})$ ne se prolonge pas, $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ se prolonge par continuité, mais ils sont cachés dans *Pommelet*).
- *Un théorème de prolongement global* dans *Zuily-Queffelec* le théorème de prolongement de Tietze et, toujours dans *Zuily-Queffelec* mais dans un exercice un peu plus loin, l'application, qui dit que si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée, alors X est compacte.
- *Prolongement par densité* Dans *Pommelet* le prolongement des identités et le prolongement des applications uniformément continues et applications (construction de l'intégrale de Riemann, théorème de Plancherel dans *Rudin*, et unicité du complété d'un espace métrique).
- *Prolongement des applications linéaires* Hahn-Banach (analytique), dans *Brezis* et en application le corollaire qui suit et l'application qui est donnée dans *Pommelet.*

Aspects différentiels

- *Des choses sur la régularité* dans *Pommelet* le théorème sur le prolongement C^1, un contre exemple si la fonction n'est pas continue, l'existence de fonctions plateau (dans *Zuily-Queffélec* si on veut son expression) et le théorème de Borel dans *Zuily-Queffélec.*
- *Équations différentielles* dans *Zuily-Queffélec* les définitions de solution maximale, globale, l'existence d'une solution maximale, le critère de prolongement, le corollaire et un exemple.

Aspects analytiques

- *Rayon de convergence* Dans *Gourdon* la définition du rayon de convergence, comportement au bord du rayon de convergence : le théorème d'Abel angulaire et le théorème taubérien faible (développement) et le théorème taubérien de Hardy-Littlewood dans *Zuily-Queffélec* le théorème qui dit qu'il y a toujours au moins un point singulier sur la frontière du disque de convergence.
- *Fonctions holomorphes* dans *Objectif agrégation* le théorème des zéros isolés, le principe du prolongement analytique, et en application, le prolongement de la fonction Γ dans *Zuily-Queffélec.*

Références

- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Gourdon, *Analyse*
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*
- Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
- Objectif agrégation
- Brézis, *Analyse fonctionnelle*

Chapitre 45

208-Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.

Remarques et questions

Remarque. Remarques du jury d'agrèg

- La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée.

Question. On sait que $C([a,b],\mathbb{R},\|\dot{}\|_\infty)$ est complet. Un autre exemple de norme qui rende cet espace complet ?

Réponse. Il n'y a pas de choses évidentes en fait. Comme piste, on peut voir à considérer les fonctions continues comme des opérateurs.

Question. Faire un dessin qui montre qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Réponse. Comme les boules sont des voisinages de 0 ont peut inclure n'importe quel objet avec un homothétique du premier.

Question. Donner un exemple d'espace avec deux normes pas équivalentes.

Réponse. Il faut, évidemment, se placer en dimension infinie. On peut donner comme exemple :
$\mathbb{R}[X]$. La norme 1 et la norme ∞ ne sont pas équivalentes. En effet : en notant $P_n = 1 + \cdots + x^n$ on a :

$$\begin{aligned}
\|P_n\|_\infty &= \sup_{0\leq i\leq n} a_i \\
&= 1 \\
\|P_n\|_1 &= \sum_{i=0}^{n} |a_i| \\
&= n
\end{aligned}$$

Donc on ne peut pas avoir d'inégalité $\|P_n\|_1 \leq C\|P_n\|_\infty$ pour tout n.

Question (A propos du théorème de Riesz). On prend un Banach puis son dual. On prend la topologie faible sur le dual. La boule unité est alors compacte pour tout Banach. Est-ce qu'il s'agit d'une contradiction au théorème de Riesz ?

Réponse. Non. En effet, la topologie faible n'est pas associée à une norme.

Question. Donner une idée rapide de la démonstration de $(L^p)' = L^{p'}$. Et que se passe-t-il avec L^1 et L^∞ ?
L^p est séparable, saut pour $p = \infty$. Comment ça se montre ? Pourquoi est-ce-que L^∞ n'est pas séparable ?

Réponse. Cf Rudin.

Question (A propos des opérateurs compacts). Est-ce qu'on peut parler d'opérateurs compacts sur d'autres espaces que les Hilbert ? Donner un exemple d'opérateur compact.

Réponse. Oui, mais le théorème spectral est faux. Donc c'est moins intéressant dans le cadre de la leçon.
Les opérateurs à noyau sont des opérateurs compacts. Si $K \in L^2([0,1]^2, \mu \otimes \mu)$ et pour $f \in L^2([0,1])$,

$$K : f \mapsto \int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{dy} = Kf(x).$$

Par le théorème de Fubini, on a $K(x, \dot{}) \in L^2([0,1])$. Ce qui nous assure que K est bien définie.
Si, de plus, on considère $K \in C([0,1]^2)$ on obtient un opérateur de $C([0,1])$ dans lui-même. On va montrer que la boule unité est envoyée dans un compact pour montrer qu'il s'agit alors d'un opérateur compact. Pour caractériser les compacts des fonctions continues, on utilise le théorème d'Ascoli. D'où vient l'équicontinuité des Kf pour $\|f\| \leq 1$?

$$\begin{aligned} |Kf(x) - Kf(y)| &\leq \int_0^1 |K(x,t) - K(y,t)||f(t)|\mathrm{dt} \\ &\text{Et } K \text{ est uniformément continue sur } [0,1]^2 \\ &\leq \int_0^1 |K(x,t) - K(y,t)|\mathrm{dt} \end{aligned}$$

Donc K est uniformément continue sur le carré.

Développements

Développements proposés :
- L^pest un Banach, dans *Brézis*
- Banach Steinhaus et existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point, dans *Gourdon, analyse*

Autres développements possibles :
- Théorème d'échantillonnage de Shannon (Willem) *c'est des probas*

Idées pour le plan

Généralités (EVN, applications linéaires continues)

- *Espaces vectoriels normés* dans *Gourdon* la définition d'une norme et d'un espace vectoriel normé, des exemples de normes et d'espaces vectoriels normés dans *Gourdon* et *Pommelet*. Dans *Pommelet* la définition de normes équivalentes et le théorème qui suit (elles sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie), et l'exemple qui suit avec des normes pas équivalentes.
- *Applications linéaires continues* dans *Pommelet* les conditions équivalentes pour qu'une application linéaire soit continue et les exemples qui suivent, les deux propositions qui suivent aussi. La définition des normes des applications linéaires continues et des exemples : par exemple les normes sur les espaces de matrices dans *Mneimé-Testard*. Le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur des ensembles denses, adapté au cas des applications linéaires continues et les applications (construction de l'intégrale de Riemann et théorème de Plancherel dans *Rudin*) et le théorème de Hahn-Banach dans *Pommelet*.
- *Cas particulier de la dimension finie* dans *Gourdon* les propositions sur les espaces vectoriels normés de dimension finie et dans *Pommelet* le théorème de Riesz.

Espaces de Banach

- *Premières propriétés* dans *Gourdon* la définition d'un espace de Banach, le théorème qui dit que les applications linéaires continues à valeurs dans un espace de Banach sont un Banach, en conséquence le théorème qui dit que si la convergence absolue d'une série entraine sa convergence l'espace est complet (un sens est écrit dans *Pommelet*). Dans *Gourdon* la définition du dual topologique d'un evn et le fait que c'est un Banach.
- *Théorème de Baire et applications* dans *Gourdon* le théorème de Baire et les applications dont le théorème de Banach-Steinhaus et l'existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point (développement). On peut aussi rajouter le fait qu'un EVN qui admet une base dénombrable n'est pas complet et la densité dans $C^0([0,1])$ des fonctions continues partout et dérivables nulle part.
- *Espaces L^p* Dans *Brézis* la définition des espaces L^p, l'inégalité de Hölder et, théorème de Riesz-Fischer (développement) et la proposition pour le dual de L^p.

Espaces de Hilbert

- *Généralités*. Dans *Objectif Agrégation* la définition d'un espace préhilbertien et d'un espace de Hilbert. L'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'identité du parallélogramme, l'inégalité de Minkowski (l'inégalité triangulaire pour la norme associée au produit scalaire) et des exemples d'espaces de Hilbert. L'orthogonalité.

- *Applications linéaires sur un espace de Hilbert* dans *Objectif Agrégation*, la propriété de projection sur un sous-espace fermé. Le théorème de représentation de Riesz.
- *Bases Hilbertiennes* Dans *Objectif Agrégation* la définition et la caractérisation, tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne et un exemple avec les séries de Fourier et les polynômes orthogonaux.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Objectif Agrégation
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*
- Brézis, *Analyse fonctionnelle*
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*

Chapitre 46

213 - Espaces de Hilbert. Bases Hilbertiennes. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. En revanche, la possibilité de construire le-dit projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)e_n$ et $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)^2$ en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en justifiant la convergence.

Question. Quelles sont les hypothèses du prolongement analytique ?

Réponse. Si deux fonctions analytiques définies sur un ouvert connexe Ω sont égales sur un ensemble qui admet un point d'accumulation, alors elles sont égales sur Ω.

Question. Si $u_n \overset{\|\cdot\|}{\rightharpoonup} u$ est-ce qu'on a une inégalité ? Et comment on la démontre ?

Réponse. On a
$$\|u\| \leq \liminf_n \|u_n\|.$$
On écrit :
$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \langle u - u_n|u\rangle + \langle u_n|u\rangle \\ \|u_n\|^2 &\leq \langle u - u_n|u\rangle + \|u\|\|u_n\| \\ &\leq \liminf_n \|u_n\|\|u\|. \end{aligned}$$

Question. Soit
$$B^1(\mathbb{R}) = \{\Psi \in H^1 | x\Psi \in {}^2\},$$
muni de la norme
$$\|\Psi\|_{B^1}^2 = \|\Psi\|_{H^1}^2 + \|x\Psi\|_{L^2}^2,$$
Est-ce que, muni de cette norme, B^1 est un Hilbert ?

Réponse. B^1 est un espace vectoriel normé. On introduit le produit scalaire :
$$\langle\psi|\phi\rangle_{B^1} = \langle\psi|\phi\rangle_{L^2} + \langle\psi'|\phi'\rangle_{L^2} + \langle x\psi|x\phi\rangle_{L^2}.$$
Est-ce que c'est complet ?
H^1 est un Hilbert. Soit $(\psi_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans B^1. Alors (ψ_n) est une suite de Caulcy dans H^1 car $\|\psi_p - \psi_q\|_{H^1}^2 \leq \|\psi_p - \psi_q\|_{B^1}$. Soit $\psi \in H^1$ sa limite. Comme $(x\psi_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, on note $\tilde{\psi}$ sa limite. On veut montrer que $x\psi = \tilde{\psi}$.

On a $\psi_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}} \psi$ car $\psi_p \xrightarrow{L^2} \psi$ et donc $x\psi_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}} x\psi$. De même, comme $x\psi_p \xrightarrow{L^2} \tilde{\psi}$ on a $x\psi_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}} \tilde{\psi}$ donc $x\psi_p \overset{\mathcal{D}}{=} \tilde{\psi}$. Et on a la convergence dans L^2 ?
Comme $\tilde{\psi} \in L^2$, c'est une forme linéaire continue sur L^2 et par théorème de Riesz, $\exists \S u \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{\psi} = \langle u|\cdot\rangle$ et $u = x\psi$ convient donc $\tilde{\psi} \overset{L^2}{=} x\psi$.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Stampacchia, dans *Brézis*
- Densité des polynômes orthogonaux, dans *Objectif Agrégation*

Autres développements possibles :
- Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts dans un Hilbert, dans *Brézis* (chaud)
- Théorème d'échantillonnage de Shannon, dans *Willem*
- Théorème ergodique de Von Neumann, dans *Objectif Agrégation*

Idées pour le plan

Généralités (tout est dans *objectif agrégation* sauf quelques exemples qui sont dans *Hirsch-Lacombe*)
- *Définitions, premières propriétés* la définition d'un espace préhibertien et d'un espace de Hilbert. Des exemples d'espaces de Hilbert dans *Objectif Agrégation* et dans *Hirsch-Lacombe*. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'identité du parallélogramme.
- *Théorèmes de projection* Les théorèmes de projection sur un convexe fermé et sur un sous-espace, en conséquence le théorème de Hahn-Banach géométrique dans le cas Hilbert. L'orthogonal d'une partie et les propriétés. En application, un critère de densité.
- *Bases Hilbertiennes* Définition (on peut citer le procédé d'orthonormalisation), existence de bases hilbertiennes, différence entre une base algébrique et une base hilbertienne, caractérisation des bases hilbertiennes. En application : les polynômes orthogonaux (développement) et la base de L^2 donnée par les séries de Fourier.

Théorème de représentation de Riesz
- *Dual d'un espace de Hilbert* dans *Brézis* le théorème de représentation de Riesz, et on écrit qu'on peut donc identifier H et son dual. En application, on définit l'adjoint d'un endomorphisme continu.

- *Applications du théorème* dans *Objectif agrégation*, on peut parler du dual des L^p (mais il faut savoir justifier en quoi ça a sa place), citer le théorème de Hahn-Banach analytique dans le cas Hilbert et les théorèmes de Stampacchia (développement) et Lax-Milgram dans *Brézis*.
- *Convergence faible dans un espace de Hilbert* dans *Hirsch-Lacombe* la définition de la convergence faible et le théorème qui dit que de toute suite bornée de H on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Applications

- *Opérateurs compacts* dans *Brézis* la définition d'un opérateur compact, l'alternative de Fredholm et la décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts sur les espaces de Hilbert.
- *Séries de Fourier* Dans *Objectif Agrégation* on introduit les notations et on enchaine sur le paragraphe sur l'aspect hilbertien des séries de Fourier, et le théorème qui dit que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale dans L^2.

Références

- Objectif agrégation
- Hirsch-Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
- Brézis, *Analyse fonctionnelle*

Chapitre 47

214- Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

Question. Est-ce qu'il y a des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$, bijectives sans que leur inverse soit $\mathcal{C}^1$?

Réponse. Oui, il suffit que la différentielle s'annule en un point. Par exemple $x \mapsto x^3$.

Question. Avec le théorème d'inversion locale (pas global) pourquoi est-ce que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est localement un difféomorphisme en tout point n'est pas globalement un difféomorphisme en général ?

Réponse. On n'est pas forcément injectif : il peut y avoir des points doubles. On peut aussi considérer :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^x, \end{aligned}$$

qui est $\mathcal{C}^\infty$, sa dérivée ne s'annule jamais, mais elle n'est pas bijective : $e^0 = e^{2i\pi}$.

Question. On considère

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Est-ce que f est dérivable en 0 ? Est-ce qu'on a le droit d'utiliser le théorème d'inversion locale ? Est-ce que cependant, f est localement inversible en 0 ?

Réponse. On commence par montrer que f est différentiable en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1,$$

donc f est bien différentiable en 0. On calcule la dérivée de f pour montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ et que donc on ne peut pas appliquer le théorème d'inversion locale en O :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin\frac{\pi}{x} - \pi \cos\frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

on peut montrer en utilisant les suites $x_k = \frac{1}{k}$ et $\tilde{x}_k = \frac{2}{k}$ que f' n'est pas continue en 0. Ensuite, on montre que f n'est pas localement injective en 0 pour montrer que f n'est pas inversible en 0.

Développements

Développements proposés :
- Lemme de Morse, dans *Rouvière*
- Théorème des extrêmas liés, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Théorème de Hadamard Lévy, dans *Rouvière*

Idées pour le plan

Résultats généraux
- *Les théorèmes* : Dans *Rouvière* le théorème d'inversion locale, un exemple de cas où il s'applique (dans le début des exercices), en remarque le cas des fonctions $\mathcal{C}^k$ puis le théorème des fonctions implicites (remarque : $\mathcal{C}^k$ marche aussi) et les exemples qui suivent (faire les figures en annexe). Les deux théorèmes sont équivalents.
- *Résultats liés* : Dans *Rouvière* le théorème d'inversion globale, le théorème de changement de coordonnées, le théorème d'inversion globale holomorphe, la différentielle de la fonction implicite, le théorème du rang constant (dans les exos) et des exemples donnés dans *Rouvière* dans les exercices.

Applications
- *Le théorème des extrêmas liés* : dans *Gourdon* le théorème des extrêmas liés (développement), faire des remarques sur l'interprétation géométrique des multiplicateurs de Lagrange, dans *Rouvière* : si la fonction admet un extrêmum en a, tout arc paramétré de la courbe passant par cet extrêmum admet un exrêmum en t_0 tel que $\gamma(t_0) = a$. Ainsi $Df(a)v = 0$ pour tout vecteur v tendant en a à la surface. Si on a la bonne régularité de la surface (c'est bon) les vecteurs tangents en a à la surface forment un espace vectoriel. On veut donc que la restriction de $Df(a)$ à cet espace vectoriel soit nulle. Un exemple simple d'application du théorème des extrêmas liés dans *Rouvière* ou *Gourdon* et des applications moins triviales : dans *Rouvière* l'inéaglité de Hadamard, dans *Objectif agrégation* la diagonalisation des endomorphismes symétriques, dans *Gourdon* l'inégalité arithmético-géométrique.
- *En algèbre linéaire* : dans *Objectif agrégation* la racine k-ième d'une matrice, dans *Mneimé-Testard* les applications qui sont citées dans *Objectif Agrégation*, le comportement en 0 de l'exponentielle matricielle, le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.
- *Lemme de Morse* Dans *Rouvière* et application dans *Objectif agrégation* sur une condition suffisante de minimalité.

– *Équations aux dérivées partielles* dans *Rouvière*, l'équation de Burgers et la méthode de résolution.

Sous-variétés

– *Définitions* Dans *Rouvière* la définition de lisse et de sous-variété, des premiers exemples (donnés dans Rouvière) avec des dessins en annexe, et l'exemple du cône qui n'est pas une sous-variété. dans *Rouvière* le théorème des sous-variétés (en mettant $\forall a$ peut-être), et quelques exemples. Préciser quels théorèmes viennent du théorème d'inversion locale ou des fonctions implicites (c'est dit dans la preuve dans *Rouvière*)
– *Exemples* Dans *Rouvière* l'exercice sur les surfaces de $\mathbb{R}^3$, et les exemples sur les groupes de matrices, qui sont plus développés dans *Mneimé-Testard*. Dans *Mneimé-Testard* il y a un théorème plus général sur les sous-variétés dans les expaces de matrices, mais je ne sais pas si ça vaut le coup.

Références

– Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
– Gourdon, *Analyse*
– Objectif Agrégation
– Mneimé-Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*

Chapitre 48

215- Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il faudrait que les candidats à l'Agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur $d^k f(a)$ définissent des applications k-linéaires (sur quel espace ?). Il faut savoir calculer, sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction ou effectuer un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction.

Question. Dans le cas de la recherche d'extremum sur un ouvert en dimension 2, faire les schémas de ce qu'on peut obtenir.

Réponse. Il faut en fait considérer la matrice hessienne de la fonction, la diagonaliser et répondre en fonction des valeurs propres qu'on trouve.

Question. En quoi l'inversion est-elle intéressante ?

Réponse. L'inversion est conforme.

Question. Sur la différentielle, comment montre-t-on qu'une application ϕ conserve les angles ?

Réponse. Si ϕ est conforme, sa différentielle en chaque point est une similitude.

Question. Une question posée sur les cercles-ou-droites.

Question. Montrer la différentielle du déterminant.

Réponse. On la calcule pour une matrice inversible puis on raisonne par densité. Ou sinon, on peut le faire avec les applications dérivées partielles.

Question. Qu'est-ce que c'est qu'une sous-variété ?

Développements

Développements proposés :

- Théorème des extrêmas liés, dans *Gourdon*
- Lemme de Morse, dans *Rouvière*

Autres développements possibles :

- Théorème des fonctions implicites, dans *Gourdon*
- Théorème de Hadamard-Lévy, dans *Zuily-Queffélec*

Idées pour le plan

On pose le cadre : On se place sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Le but est d'approcher au voisinage d'un point une fonction par une fonction plus simple (voir *Rouvière* pour l'explication de la grande idée du calcul différentiel).
Généralités

- *Différentielle* Dans *Gourdon* la définition d'une application différentiable en un point, unicité de la différentielle en un point, définition de la différentielle. Définition de $\mathcal{C}^1$. Les exemples et remarques qui sont dans *Gourdon*. Dans *Rouvière* les exemples : différentielle du déterminant et différentielle de l'inverse. Dans *Gourdon* la différentielle d'une fonction composée.
- *Dérivées partielles* Dans *Gourdon* la définition de la dérivée selon un vecteur, les propriétés qui suivent : si f est différentiable, elle admet une dérivée partielle selon tout vecteur. Le contre-exemple qui est donné dans *Gourdon*. La définition des dérivées partielles, le théorème qui dit que si les dérivées partielles existent et sont continues, la fonction est $\mathcal{C}^1$ et le contre exemple qui est donné juste après. La définition de la jacobienne, et les dérivées partielles d'une composée. On peut donner en exemple la formule du laplacien en coordonnées polaires.
- *Dérivées d'ordre supérieur* dans *Cartan* des choses sur les dérivées k-ièmes : la définition de $\mathcal{C}^n$ l'identification de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_{n-1}(E, F))$ avec $\mathcal{L}_n(E, F)$, le fait que la différentielle soit une application n-linéaire symétrique. Dans *Rouvière* des choses plus précises sur la dimension 2 : le théorème de Schwarz et la définition de la matrice Hessienne. Dans *Cartan* on peut ajouter des exemples de fonctions plusieurs fois différentiables.
- *Plan tangent à une suface* Dans *Rouvière* la définition du plan tangent à une surface définie implicitement.

Accroissements finis et formules de Taylor

- *Le théorème des accroissements finis* Dans *Gourdon* le théorème des accroissements finis et les cas particuliers et dans *Rouvière* l'application qui donne la différentielle d'une limite d'une suite de fonctions différentiables dont les différentielles convergent uniformément.
- *Formules de Taylor* Dans *Rouvière* les formules de Taylor-Young et de Taylor avec reste intégral. En application, le lemme de Hadamard qui est dans *Gourdon*

Inversion locale et fonctions implicites

- *Les théorèmes* Dans *Rouvière* le théorème d'inversion locale et des applications dans *Objectif Agrégation* la racine k-ième d'un matrice et dans *Mneimé-Testard* le comportement en 0 de l'exponentielle matricielle et le fait qu'il n'existe pas de sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ arbitrairement petits. On peut aussi (si il y a la place) rajouter le théorème de changement de coordonnées dans *Rouvière* et mettre le lemme de Morse (développement). Ajouter ensuite le théorème des fonctions implicites, toujours dans *Rouvière*. En remarque : les deux théorèmes sont encore valables dans le cas $\mathcal{C}^k$.
- *Problèmes d'extremum* dans *Rouvière* le théorème sur le problème d'extremum libre et ensuite dans *Gourdon* le théorème des extrêmas liés, dans

Rouvière l'interprétation géométrique des multiplicateurs de Lagrange.

Références

- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Gourdon, *Analyse*
- Objectif Agrégation
- Cartan, *Calcul différentiel*

Chapitre 49

216-Etude métrique des courbes. Exemples

Remarques et questions

Remarque. Aucune remarque du Jury en 2011.
D'après F. Dal'Bo, il est important de ne pas oublier l'aspect géométrique du problème (ne pas se lancer tête baissée dans des calculs).
Il est impératif de prévoir une feuille d'annexe avec des schémas.

Question. Soient C_1 et C_2 deux courbes avec même courbure $\gamma_1 = \gamma_2$ et torsion $\tau_1 = \tau_2$. Montrer qu'il existe un déplacement de $\mathbb{R}^3$ qui envoie C_1 sur C_2.

Question. Démontrer que lorsqu'on paramètre par l'abscisse curviligne, on est dans un paramétrage normal.

Réponse. Soit f le paramétrage de la courbe et s l'abscisse curviligne.

$$(f \circ s^{-1})' = (s^{-1})' \times f'(s^{-1})$$
$$\|(f \circ s^{-1})'\| = \|(s^{-1})'\|.\|f'((s^{-1})')\|$$

Question. Donner le vecteur vitesse d'une courbe paramétrée. Justifier.

Réponse. A priori, la réponse sera $f'(t)$ sauf en les points singuliers. Il faut le vérifier. Soit

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R}^2 \quad C^\infty \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

et soit t_0 tel que $(x'(t_0), y'(t_0)) = (0, 0)$. Quelle est la tangente en t_0 ? On fait un développement limité au voisinage de t_0 :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hf'(t_0) + \frac{h^2}{2} f''(t_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + o(h^n)$$

Et soit k_0 le numéro du premier terme non nul du développement limité.
réponse non donnée

Question. Quel est le rapport entre la longueur et la distance ?

Réponse. On a $l(AB) \geq d(A, B)$ mais il faut le prouver clairement.

Question. Est-ce que les points où $f' = 0$ posent un problème lors de la définition de l'abscisse curviligne ?

Question. On prend une courbe paramétrée par le graphe d'une fonction $(x, f(x))$ telle que $f(0) = 0$ et telle que la tangente en 0 soit une droite horizontale. Quel est le rayon de courbure en 0 ?

Réponse. On utilise la formule :

$$\rho = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

Question. Est-ce que l'inégalité isopérimétrique est vérifiée avec une ellipse ? Aire d'une ellipse ? Périmètre d'une ellipse ?

Réponse. On prend comme paramétrage pour l'ellipse :

$$x(t) = a\cos t$$
$$y(t) = b\sin t$$

Il faut aussi justifier qu'il s'agit d'une ellipse et qu'une ellipse peut toujours être mise sous cette forme. A finir

Question. Donner une interprétation du cercle osculateur.

Développements

Développements proposés :
- L'inégalité isopérimétrique, dans *Zuily-Queffelec*
- L'étude de l'Astroïde, dans *Monier, Géométrie MP PSI PC PT*

Autres développements possibles :
- Le théorème fondamental dans $\mathbb{R}^3$, dans *Berger-Gostiaux*
- Le théorème des quatre sommets, dans *Berger-Gostiaux*

Idées pour le plan

Le cadre est $\mathbb{R}^n$ euclidien. Généralités
- *Vocabulaire* dans *Monier* la définition d'un arc paramétré la remarque sur l'interprétation cinématique, la proposition de changement de paramétrage, un paramétrage admissible, points réguliers et singuliers. Des exemples donnés dans les exercices.
- *Longueur* dans *Monier* la définition de l'abscisse curviligne, des exemples et la définition de la longueur d'une courbe, existence d'une repraramétrisation normale et exemple, inégalité isopérimétrique (développement).

Courbes planes ($n = 2$)
- *Fonctions polaires* dans *Monier* le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, exemples : droite, cissoïde, cardioïde, coniques. Avec schémas
- *Repère de Frénet, courbure* dans *Monier* la définition du repère de Frénet, de la courbure, du rayon de courbure, les formules de Frénet, dans *Berger-Gostiaux* la formule intrinsèque et la définition du cercle osculateur, le théorème des quatre sommets, le premier théorème fondamental. La spirale de Cornu ou Clothoïde en exemple dans *Monier*

- *Position de la courbe par rapport à sa tangente* avec des schémas dans *Audin*
- *Développées, développantes* dans *Monier* les définitions et application à l'Astroïde (développement).

Courbes gauches ($n = 3$)

- *Courbure* On garde la définition, mais un cercle et une hélice ont même courbure.
- *trièdre de Frénet-Serré* dans *Berger-Gostiaux* la définition du trièdre de Frénêt-Serré et de la torsion. Les formules qui les lient. Dans *Monier* des exemples (notamment les hélices).
- *Second théorème fondamental et application* dans *Berger-Gostiaux* le second théorème fondamental etl'application : une courbe gauche qui a une torsion et une courbure constante (non nulles) est une portion d'hélice.

Références

- Monier, *Géométrie MP PSI PC PT*
- Berger-Gostiaux, *Géométrie différentielle*
- Audin, *Geométrie*

Chapitre 50

217- Sous variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, etc) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. En ce qui concerne les surfaces de $\mathbb{R}^3$, les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométrique. Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

Question. Pourquoi est-ce que la valeur absolue n'est pas une variété de classe 0 ?

Réponse. Parce qu'une variété de classe 0 n'existe pas. Il faut être au moins de classe $\mathcal{C}^1$.

Développements

Développements proposés :
- Le théorème des extrema liés, dans *Gourdon*
- Deux exemples de sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$, dans *Rouvière*

Autres développements possibles :
- Théorème de Cartan von Neuman, dans *Gonnord-Tosel, Calcul différentiel*
- Inégalité d'Hadamard par les extrema liés, dans *Gonnord-Tosel, Calcul différentiel*
- Théorème de d'Alembert, dans *Lafontaine, introduction aux variétés différentielles*

Idées pour le plan

Définitions équivalentes, premiers exemples
- *Définitions et premiers exemples* dans *Rouvière* la définition de lisse et d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Des exemples donnés dans *Rouvière* et des contre-exemples (cône, $|x|$, $x^2 - y^3 = 0$, un exemple avec un point double. On les trouve aussi dans les exercices).
- *Définitions équivalentes* Dans *Rouvière* on donne le théorème des fonctions implicites. Ensuite on donne les trois définitions équivalentes des sous-variétés :

implicite, paramétrique et par le graphe. On donne des exemples à chaque fois : dans *Lafontaine* la sphère avec la représentation implicite, paramétrique et par le graphe (voir *Rouvière* pour passer des représentations implicites aux autres). Insister sur le fait que l'équivalence découle du théorème des fonctions implicites.

Espaces tangents, extrema

- *Espaces tangents* Dans *Lafontaine* la définition de vecteur tangent, le fait que les vecteurs tangents à une sous-variété de dimension p forment un espace vectoriel de dimension p et la définition de l'espace tangent, dans *Rouvière* et *Lafontaine* expliquer à quoi ça correspond dans le cas des différentes définitions (c'est plus facile dans *Rouvière* mais plus complet dans *Lafontaine*). En exemple, dans les exercices de *Rouvière* l'espace tangent de l'ellipse.
- *Extrema liés* dans *Lafontaine* le lien entre les extrema liés et la notion d'espace tangent et dans *Gourdon* le théorème des extrema liés (développement).

Exemples

- *Sous-variétés de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans *Mneimé-Testard* le théorème de Cartan von Neuman qui dit que tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbb{K})$, dans *Rouvière* (les exercices à la fin) le cas de O_n et son plan tangent. En développement : SO_n et les matrices de rang donné. Dans *Gourdon* le fait que SO_n est l'ensemble des éléments de SL_n qui minimisent la norme donnée par la trace (c'est une application du théorème des extrema liés)
- *Surfaces de* $\mathbb{R}^3$ dans *Lafontaine* l'exemple sur les surfaces de $\mathbb{R}^3$ (qui est aussi un exercice dans *Rouvière*).

Références

- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*
- Gourdon, *Analyse*
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*

Chapitre 51

218- Applications des formules de Taylor

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $\|f\|^{(k)} \leq 2^{k(n-k)/2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

Question. Comment on démontre Taylor avec reste intégral ?

Réponse. Par récurrence et en utilisant les formules d'intégration par parties.

Question. Quelques questions sur les polynômes de Bernoulli.

Question. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 3 en 0 pour une fonction de trois variables (et le tout bien explicitement en fonction des dérivées partielles).

Question. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \cdot e^2 + b \cdot e + c = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$.

Réponse. On remarque que alors $-b = a \cdot e + c \cdot e^{-1}$. On pose $f : x \mapsto ae^x + b \cdot e^x$ et on fait des développements avec la formule de Taylor entre 0 et 1 pour avoir le résultat.

Développements

Développpements proposés :

- Lemme de Morse, dans *Rouvière*
- Méthode de Newton, dans *Rouvière*

Autres développements possibles :

- Théorème central limite, dans *Zuily-Queffélec*
- Inégalitésde Kolmogorov, dans *Gourdon*
- Théorème de Bernstein, dans *Gourdon*
- Lemme de Borel, dans *Zuily-Queffélec*
- Décomposition effective de Dunford, dans *Risler-Boyer, Algèbre pour la licence* 3
- Formule d'Euler Mac Laurin, dans *Gourdon*

Idées pour le plan

Généralités

Pour ne pas perdre de place, écrire au début les notations avec le polynôme de Taylor et les restes.

– *Formule de Taylor pour les polynômes* la définition d'une fonction polynômiale, le théorème qui dit qu'une fonction est polynômiale si et seulement si son reste de Taylor est nul à partir d'un certain rang.
– *Formule de Taylor avec reste intégral* dans *Cartan*
– *Formule de Taylor Lagrange* dans *Cartan*.
– *Formule de Taylor Young* dans *Cartan* et application : existence de développements limités.

Applications en géométrie
– *Convexité, extrema* dans *Gourdon* le théorème qui dit qu'une fonction est convexe si et seulement si sa matrice Hessienne est définie positive sur l'ensemble de définition de la fonction. Dans *Rouvière* l'étude affine d'une surface : condition sur la Hessienne pour avoir un minimum local strict ou pas strict (c'est le théorème $7 \cdot 1$).
– *Étude affine locale d'une courbe plane* dans *Rouvière* l'aspect local des arcs au voisinage du paramètre t et les dessins des différents cas qui peuvent se produire.
– *Théorèmes d'inversion* dans *Rouvière* le théorème d'inversion locale, et des applications (par exemple la résolution locale d'équations) puis le théorème d'inversion globale et le théorème des fonctions implicites. On remarque que le théorème est aussi vrai dans le cas des fonctions $\mathcal{C}^k$ et en application on peut parler du paramétrage des sous-variétés (c'est juste après dans *Rouvière*).
– *Lemme de Morse* dans *Rouvière* le lemme préliminaire et le lemme de Morse (développement).

Applications en analyse et topologie
– *Équivalents et vitesse de convergence* Dans *Oraux X-ENS, analyse* 1 le théorème qui donne un équivalent des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ dans le cas où $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de O. Mais attention, le théorème n'est pas énoncé et les calculs restent à faire !
– *Théorème de Darboux* dans *Oraux X-ENS analyse* 1, la démonstration utilise le théorème des accroissements finis.
– *Inégalité de Kolmogorov* dans *Oraux X-ENS, analyse* 1 l'inégalité de Kolmogorov.
– *Lemme de Borel* dans *Zuily-Queffélec* on peut parler du lemme de Borel pour montrer qu'on peut trouver une fonction pour tout développement de Taylor.

Applications en analyse numérique
– *Méthode de Newton* dans *Rouvière* la méthode de Newton, en application, on peut mettre le calcul de racines carrées ou la méthode effective pour la décomposition de Dunford.
– *Intégration numérique* Dans *Crouzeix-Mignot* l'explication des méthodes de

quadrature (composées et les méthodes de Gauss) et des exemples : méthodes des rectanges, les trapèzes, de Simpson, on définit une méthode exacte et on donne le théorème de Peano pour la majoration d'erreur. On dit bien que ça utilise Taylor avec reste intégral et on peut donner en exemple l'ordre et l'erreur dans les méthodes citées précédemment.
- *Méthodes numériques à pas constant* Dans *Crouzeix-Mignot* la définition d'un méthode numérique à pas constant, la définition de la consistance et de la stabilité, le fait que ça implique la convergence. Et on dit bien que ces choses sont en général prouvées en faisant des développements limités.
- *Formule d'Euler Mac Laurin* dans *Gourdon* la définition des polynômes de Bernoulli et la formule d'Euler Mac Laurin qu'on peut voir comme une extension des formules de Taylor.

Applications en probabilités - Autour du théorème central limite
- dans *Ouvrard,* 2 le lemme préliminaire au théorème central limite puis le théorème central limite, en application, le test de χ-deux (si on a la foi)

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Cartan, *Calcul différentiel*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 1
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Crouzeix-Mignot,
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Ouvrard, *Probabilités,* 2

Chapitre 52

219- Problèmes d'extremums

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Bien faire la différence entre propriétés locales (caractérisations d'un extrêmum) et globales (existence).

Remarque. Á propos des extrêma liés, donner un exemple pratique d'utilisation (en fait, c'est compliqué et en vrai, en pratique ça ne s'utilise pas trop). Il y en a une dans *Gourdon* où on explique que les éléments de SO_n sont les éléments de SL_n qui minimisent la trace. Mais l'exercice n'est pas totalement évident, il faut être sûr de savoir le faire pour en parler (ceci dit, ça peut se réutiliser à plein d'endroits).

Remarque. Dire en quel sens il y a unicité dans *John-Loewner*.

Remarque. Par le théorème d'Ascoli, on peut construire des compacts non triviaux en dimension infinie. Les résultats d'existence d'extremum sur les compacts sont donc aussi vrais en dimension infinie.

Développements

Développements proposés :
- Ellipsoïde de John-Loewner, dans *Oraux X-ENS algèbre* 3
- Théorème des extrema liés, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :
- Méthode du gradient à pas optimal, dans *Ramis-Warusfel*

Idées pour le plan

Existence et unicité
- *Compacité* dans *Gourdon* la proposition 15 qui dit qu'une application continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. En application, la distance à deux parties, le théorème de point fixe. Des exemples dans *Rouvière.*
- *Convexité* dans *Objectif Agrégation* tout ce qu'il y a sur fonctions convexes et optimisation. Des exemples dans *Rouvière.*
- *Un exemple* dans *Oraux X-ENS algèbre* 3 la stricte convexité du déterminant puis le théorème sur l'ellispoïde de John-Loewner (développement).
- *Espace hilbertien* dans *Brezis* le théorème de projection sur un compact convexe puis le théorème de Stampacchia et le cas où a est symétrique (on a alors l'existence de l'infimum et sa caractérisation).

Localisation et calcul différentiel

– *Conditions du premier ordre* dans *Objectif Agrégation* la condition nécessaire de minimalité locale, un contre-exemple puis dans *Gourdon* le théorème de Rolle et le théorème de Darboux avec si possible des applications.
– *Conditions du second ordre* dans *Gourdon* la caractérisation des minima et maxima locaux à l'aide de la matrice Hessienne (parler des points selle aussi, et faire des dessins), des exemples dans *Objectif Agrégation* et dans *Objectif Agrégation* ce qui se passe à l'ordre supérieur.
– *Optimisation sous contrainte* dans *Gourdon* le théorème des extrema liés (développement) et l'application au fait que SO_n est l'ensemble des matrices de SL_n qui minimisent la trace (l'application est aussi dans *Objectif Agrégation*). Dans *Rouvière*, l'interprétation géométrique des multiplicateurs de Lagrange.

Optimisation numérique
– *Méthodes de descente* dans *Ciarlet* les généralités sur les méthodes de descente.
– *Cas particulier : méthode du gradient à pas optimal* dans *Ramis-Warusfel* le cas particulier de la méthode de gradient à pas optimal pour résoudre $Ax = b$.
– *Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires* dans *Ciarlet* la description générale des méthodes itératives, on dit que ça converge avec la condition sur la matrice B, puis on donne les matrices D, E et F et dans les cas des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation, les matrices M et N et le théorème de convergence de la méthode de relaxation pour les matrices hermitiennes définies positives, avec le lemme avant.
– *Méthode de Newton* dans *Rouvière* la méthode de Newton avec un dessin, l'explication et les résultats de convergence.

Références

– Gourdon, *Analyse*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 3
– Objectif Agrégation
– Brezis, *Analyse fonctionnelle*
– Ciarlet, *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*
– Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
– Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*

Chapitre 53

220- Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg). Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en oeuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Développements

Développements proposés :

- Liapunov, dans *Rouvière*
- Étude de l'équation de Hill-Mathieu, dans *Gourdon - Analyse*

Autres développements possibles

- Lokta Volterra dans *Madère, développements d'analyse*
- Théorème de Hadamard, dans *Zuily-Queffelec* (la preuve utilise des équadiffs)

Idées pour le plan

Théorie des équations différentielles.

- Étude de l'existence et unicité des solutions : Dans *Demailly* p126, on pose le problème de Cauchy. On donne un exemple tiré du *Demailly* : la particule dans un champ electromagnétique (p203). On définit les solutions, les solutions locales, maximales et globales. Puis le théorème de Cauchy-Peano-Arzela et un contre exemple à l'unicité d'une solution (toujours dans *Demailly*) puis le théorème de Cauchy-Lipschitz. Mettre un exemple d'une équation qui se résoud avec Cauchy-Lipschitz (à défaut d'un exemple dans un livre, $x' = x^2$ fonctionne).
- Quelques outils pour l'étude des solutions : Toujours dasn *Demailly* le lemme de Gronwall et la remarque qui dit que ça peut servir à démontrer Cauchy Lipschitz (mais savoir comment). Puis le principe des majorations à priori (qui est dans *Crouzeix-Mignot*) et des cas particuliers du théorème des majorations à priori (dans *Demailly*). Un exemple d'application du théorème de majorations à priori est en exo dans le Demailly (mais savoir le faire). Et sinin $y' = \sin(y)$ peut aller aussi, et c'est plus facile.

Étude de stabilité

- Définitions : Dans *Demailly* la définition de la stabilité d'un point d'équilibre et asymptique stabilité (p281) et avec des dessins !
- Le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants : Dans *Demailly*, p284 le théorème qui donne la stabilité des équilibres en fonction de la partie réelle des valeurs propres de la matrice. Et dans le cas de la

dimension 2, les dessins des comportements autour des points d'équilibre (p291).
- Le cas général : le théorème de Liapunov du *Rouvière*. Et un exemple d'utilisation du système linéarisé,

Quelques exemples d'études qualitatives
- L'équation de Hill Matthieu dans les différents cas, dans le *Gourdon, analyse* p360 entres autres.
- Le système de Lotka-Volterra. Dans *Madère, développements d'analyse* le théorème est p226 avec un dessin !
- Les équations à variables séparées : dans *Demailly*, on met le théorème dans le cas général et l'exemple qui suite et qui est traité en entier (mais c'est long alors fat pas le mettre entièrement, juste l'énoncé).

Méthodes numériques et Hamiltonien
- Cf cours de M. Pierre (partir d'un système simple avec la matrice

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et on applique les différentes méthodes : euler explicite, implicite et point milieu (cf *Crouzeix-Mignot* pour ça).

Références

- Demailly, *Analyse numérique des équations différentielles*
- Crouzeix Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Pour Liapunov.
- Madère, *Développements d'analyse* Pour Lotka-Volterra

Chapitre 54

221-Equations différentielles linéaires. Systèmes différentiels linéaires. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque. Remarques du jury d'agrèg :

- Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée.
- L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer.
- Dans le cas général, on peut évoquer les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.

Question (À propos de la structure de l'espace des solutions). Est-il vrai que l'espace des solutions est un sous-espace vectoriel de C^0 ? Pourquoi a-t-on

$$\begin{aligned} \phi_{t_0} : S &\to \mathbb{K}^n \\ Y &\mapsto Y(t_0) \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme ?
Pourquoi passe-t-on d'un SEV à un espace affine ?

Réponse. Dans le cas linéaire, l'espace des solutions est un sous-espace vectoriel de C^0 (sans condition initiale sinon on n'a qu'une seule solution) : Si f et g sont deux solutions de l'équation homogène, alors $f + \lambda g$ est aussi une solution de l'équation homogène.
L'application ci-dessus est une bijection par le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme c'est linéaire, c'est un isomorphisme.

Question. Être capable de parler du Wronskien.

Question (sur l'exponentielle). Remontrer que $exp(A)$ existe.
D'où vient la propriété : $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A.e^B$?
Pourquoi peut-on dériver $t \mapsto e^{tA}$?
Pourquoi a-t-on $exp(P^{-1}DP))P^{-1}exp(D)P$?
Est-ce que

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto exp(A) \end{aligned}$$

est surjective ?

Réponse. Pour la dernière question : non, car $exp(A)$ est toujours inversible.
La question $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A.e^B$ peut se faire avec des produits de Cauchy ou bien en utilisant le fait que : $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{A}{n})^n = e^A$.
$t \mapsto e^{tA}$ est un morphisme de groupes.
$\det e^A = exp(Tr(A))$ se fait avec les matrices diagonales, diagonalisables puis par densité (exp est continue, par convergence normale de la série entière).

Développements

Développements proposés :
- Étude de l'équation différentielle $y" + q(t)y = 0$. (Dans *Gourdon Analyse*)
- Théorème de stabilité de Liapounov (dans *Rouvière*)

Autres développements possibles :
- Théorème de Cauchy-Lipschitz (et application au cas linéaire) *Demailly*
- Un exemple de résolution d'une équadiff en utilisant le développement en série entière.
- Etude d'un système physique *Demailly*

Idées pour le plan

On commence par les introductions du Gourdon puis on prend le plan du Demailly.

Généralités
- *Existence et unicité globales* dans *Gourdon*, la définition propre d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre p. On montre comment on se rapporte à un problème d'ordre 1 pour ne plus traiter que ça par la suite. Ensuite le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire : on a juste besoin de supposer les applications continues, elles sont automatiquement global lipschitz et on a l'existence et l'unicité globale des solutions. Equivalence avec l'équation intégrale. Insister sur les différences avec le non linéaire et donner des contre-exemples dans lesquels on n'a par forcément existence globale ou unicité.
- *Structure de l'espace des solutions* dans *Pommelet* théorème d'isomorphisme d'EV pour montrer que l'espace des solutions est un EV. Principe de superposition des solutions. Dans *Gourdon*, définition du Wronskien et principales propriétés. En application, l'équation $y'' + q(t)y = 0$.
- *Résolvante*, dans *Demailly* Définition de la résolvante et théorème.

Résolution explicite
- *Cas des coefficients constants* Dans *Demailly*, problème homogène et sa solution, un théorème pour la dimension 2 dans *Gourdon*, méthode de variation de la constante dans *Demailly*.
- *Cas des coefficients variables* La méthode de variation des constantes fonctionnes. Techniques de calcul : Développement en série entière, abaissement de l'ordre, équations particulières. Et exemples.

Études qualitatives
- Étude de stabilité. Définition de la stabilité dans *Demailly* (attention, la définition de *Demailly* est fausse dans le cas non-linéaire). Théorème de Lia-

pounov dans *Rouvière* (et explicitation dans le cas linéaire : la différentielle est la matrice A elle-même).
- En dimension 2, coefficients constants : schémas en fonction des valeurs propres de la matrice A dans *Demailly*
- Cas particulier : Étude de l'équation $y'' + q(t)y = 0$ dans *Gourdon*

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Pommelet, *Cours d'analyse*

Chapitre 55

223-Convergence des suites numériques. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque. Pas de remarques du jury pour cette leçon en 2010.

Question. Parler un peu du *cas douteux* des points fixes d'une suite récurrente. Pour quelles valeurs de θ la suite $u_n = cos(n\theta)$ converge ?

Réponse. Voir ce qui est raconté dans *Demailly.*
Si $\theta = 2\pi k$ alors la suite est constante. Sinon ? On peut extraire des sous-suites qui convergent. La suite pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ ne converge pas.

Question. Que dire d'une suite réelle qui possède une seule valeur d'adhérence ?

Réponse. Elle converge vers cette valeur d'adhérence si elle est bornée. Si la suite n'est pas bornée, on ne peut rien dire :

$$\begin{aligned} u_{2n} &= 0 \\ u_{2n+1} &= n \end{aligned}$$

n'a qu'une seule valeur d'adhérence mais ne converge pas.

Question. Montrer que si une suite (u_n) est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence, elle converge.

Réponse. Si la suite converge, elle converge vers a la valeur d'adhérence de la suite. Supposons que (u_n) ne converge pas vers a. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N, |u_n - a| > \epsilon$$

Et donc on crée une sous-suite extraite $u_{\phi(n)}$ qui n'a pas a comme valeur d'adhérence. Or c'est encore une suite bornée de $\mathbb{R}$ donc elle admet $b \neq a$ une valeur d'adhérence qui est donc encore une valeur d'adhérence de u_n. Ce qui est impossible. Donc u_n converge.

Question. Soit $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$, $u_0 > 0$. Étudier la convergence. Donner un équivalent de cette suite.

Réponse. On montre facilement par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout n : u_0 est positif (strictement) et si u_n est supposé positif (strictement), alors u_{n+1} est positif (strictement). Et comme $1 + u_n^2 > 1$, pour tout n on a $u_{n+1} < u_n$ pour tout n. La suite est décroissante et minorée, elle converge.

On pose $v_n = u_n^a$ on a alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{v_n}{(1+u_n^2)^a} \\
&= \frac{v_n}{1 + au_n^2 + o(u_n^2)} \\
&= u_n^a(1 - au_n^2 + o(u_n^2)) \\
&= u_n^a - au_n^{2+a} + o(u_n^{2+a}) \\
u_{n+1}^a - u_n^a &= -au_n^{1+a} + o(u_n^{2+a}) \\
v_{n+1} &= v_n - v_n u_n^2 + o(1)
\end{aligned}$$

On prend $a = -2$ alors

$$v_{n+1} - v_n = 2 + o(1)$$

on pose $w_n = v_{n+1} - v_n$ alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} w_k \longrightarrow 2$ par Cesaro et donc $\frac{1}{n}(v_{n+1} - v_0) \longrightarrow 2$ et ainsi $\frac{v_n}{n} \longrightarrow 2$ et on peut conclure pour l'équivalent de u_n.

Développements

Développements proposés :
- Critère de Weyl, dans *Oraux X-ENS, analyse* 2
- Méthode de Newton, *Rouvière*

Autres développements possibles :
- Théorème taubérien fort
- Critère de Weyl
- Formule d'Euler-Mac Laurin et application au développement asymptotique de la série harmonique.
- Théorème taubérien faible et abel angulaire, *Gourdon, Analyse*

Idées pour le plan

Définitions et premières propriétés
- *Limites* dans *Gourdon* les définitions de : suite convergente, bornée, minorée, majorée. Théorème des gendarmes. Exemples.
- *Théorèmes de convergence* dans *Gourdon* si une suite est croissante et majorée elle converge, suites adjacentes. Et exemples dont convergence des séries alternées. Critère de Cauchy (il s'agit de suites numériques). Théorème de Cesaro.

- *Suites extraites, valeurs d'adhérence.* Définition, unicité de la limite des suites extraites pour une suite convergente. Bolzano-Weierstrass. Dans *Zuily-Queffelec*, définitions de la $limsup$ et de la $liminf$. Rapport avec les valeurs d'adhérence. Exemples. L'ensemble des valeurs d'adhérence est un fermé. Application : suites sous-additives.

Théorèmes de convergence plus compliqués et étude du comportement asymptotique.

- *Sommes de Riemann* dans *Gourdon*.
- *Théorèmes de détermination d'équivalent* dans *Gourdon* Définition de l'équivalent pour une suite. Théorème de sommation des équivalents. Applications : développement asymptotique.
- *Théorèmes taubériens* un théorème taubérien dans *Zuily-Queffelec*, Abel angulaire et le théorème taubérien faible dans *Gourdon*.
- Formule d'Euler Mac Laurin et application.

Étude des suites réucurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

- *Suites récurrences usuelles* Définition. Suites habituelles dans *Gourdon* et théorèmes de convergence.
- *Applications : Résolution d'équations* $F(x) = 0$ Théorème du point fixe de Picard et application algorithmique dans *Gourdon*. Méthode de Newton (développement) dans *Rouvière*, Méthode du gradient à pas optimal dans *Ramis*
- *Equirépartition* Critère de Weyl *Oraux X-ENS- Analyse 2* (développement)

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Zuily-Queffelec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*
- Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse* 2

Chapitre 56

224- Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples

Remarques et questions

Remarque. Pas de remarques du jury d'agrèg en 2010.

Question. Comment on démontre la formule de Stirling ?

Question. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge. Estimer la vitesse de convergence.

Question. Des exos pris dans les *Oraux X-ENS*

Développements

Développements proposés :
- Méthode de Newton, dans *Rouvière*
- Critère de Weyl, dans *Oraux X-ENS, analyse* 2

Autres développements possibles :
- Théorème de Raab-Duhamel

Idées pour le plan

Généralités
- *Définitions et premières propriétés* dans *Gourdon* la définition d'une suite convergente, divergente, le théorème des suites adjacentes et en application l'étude de la suite arithmético-géométrique (dans les exercices). Le théorème de Bolzano-Weierstrass, les relations de comparaison pour des suites et le théorème de Cesaro. Dans *Hauchecorne*, un contre-exemple au théorème de Cesaro.
- *Résultats sur les séries* Dans *Gourdon* le théorème de sommation des équivalents et dans *Hauchecorne* un contre exemple à ce théorème dans le cas où les séries ne sont pas à terme positif.
- *Vitesse de convergence et accélération de convergence* dans *Rombaldi* la définition de la vitesse de convergence, définition de l'ordre de convergence et explication d'une méthode d'accélération de convergence : la méthode de Richardson et éventuellement la méthode Δ^2 D'Aitken.

Suites récurrentes
- *Cas général* dans *Gourdon* le théorème sur la monotonie des suites récurrentes d'ordre 1. En exemple, les suites arithmétiques, géométriques et dans *Oraux X-ENS, analyse* 1 les suites sous-additives.
- *Suites homographiques* dans *Gourdon* le théorème sur les suites homographiques.

– *Récurrence linéaire à coefficients constants* dans *Gourdon* le théorème sur les suites récurrentes linéaires à coefficients constants.
– *Formule d'Euler Mac Laurin et développements asymptotiques* Pour faire des développements asymptotiques de suites, il est parfois utile d'utiliser la formule d'Euler Mac Laurin. Dans *Demailly* la définition des polynômes de Bernoulli et la formule d'Euler Mac Laurin.

Applications
– *Méthodes numériques* Dans *Rouvière* la méthode de Newton (développement) et dans *Demailly* la méthode de la sécante. Si il y a encore de la place, parler aussi de la méthode des trapèzes pour l'intégration numérique.
– *Suites équidistribuées* dans *Oraux X-ENS, analyse* 2, la définition d'une suite équidistribuée et le critère de Weyl (développement).
– *Probabilités* dans *Zuily-Queffélec* le théorème central limite et la loi forte des grands nombres. Si on a la foi, on rajoute l'estimation des grands écarts qui est dans *Lesigne*.

Références

– Gourdon, *Analyse*
– Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
– Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
– Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
– Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 2
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 1
– Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
– Lesigne, *Pile ou face*

Chapitre 57

226-Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$. L'étude des suites homographiques pose des problèmes si on se restreint à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il ne faut pas négliger la recherche préalable de sous-ensembles (intervalles) stables par f.

Développements

Développements proposés :
- Méthode de Newton, dans *Rouvière*
- Étude de la suite $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, dans *Oraux X-ENS, analyse* 1

Autres développements possibles :
- Théorème de Sarkowski, dans *Oraux X-ENS*
- Processus de Galton-Watson
- Méthode du gradient à pas optimal, dans *Ramis-Warusfel*

Idées pour le plan

Dépendance vis à vis de f
- *Cas des fonctions monotones* dans *Gourdon*, le théorème monotonie des suites réelles récurrentes d'ordre 1.
- *Cas des fonctions continues* dans *Gourdon* le théorème qui dit que si une telle suite converge, sa limite est un point fixe de f, dans *Oraux X-ENS, analyse* 1 le théorème qui dit que si f est continue, u_n converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. En exemple, l'exercice $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$ dans les exercices de *Gourdon*
- *Suites arithmétiques et géométriques* dans *Gourdon* le théorème sur les suites arithmétiques et géométriques .
- *Si f est une homographie* dans *Gourdon* le théorème sur les suites homographiques et dans *Rombaldi* un exemple d'étude de telle suite.
- *Récurrences linéaires à coefficients constants* dans *Gourdon* le théorème de récurrence linéaire à coefficients constants.
- *Si f est contractante* dans *Gourdon* le théorème de point fixe de Picard, en remarque le fait que c'est encore vrai si c'est f^p qui est contractante, et un exemple ($\sin(u_n)/2$ par exemple) en en application, le théorème de Cauchy-Lipschitz, dans *Demailly.*

Classification des points fixes

- *Le cas réel* dans *Demailly* les définitions de point fixe attractif, superattractif, répulsif. Des exemples, le cas douteux et les dessins. On peut faire l'étude de la résolution d'équation donnée après.
- *Le cas vectoriel* dans *Demailly* le lemme et le théorème du paragraphe critères d'attractivité, éventuellement la méthode de Newton-Raphson. En exemple, l'étude de la suite $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ (développement) dans *Oraux X-ENS, analyse* 1.
- *Orbites périodiques* dans *Oraux X-ENS, analyse* 1 la définition des orbites périodiques et le théorème de Sarkowski. est expliqué.

Méthodes numériques

- *Méthode de Newton et de la sécante* dans *Rouvière* la méthode de Newton dans $\mathbb{R}$ (développement) et dans *Demailly*, la méthode de la sécante et la méthode de Newton à plusieurs variables. Avec les dessins.
- *Méthode du gradient à pas optimal* dans *Ramis-Warusfel* ou dans *Ciarlet* l'explication de la méthode du gradient à pas optimal. Le résultat de convergence. Et le dessin qui va avec la méthode.
- *Résolution de systèmes linéaires* dans *Ciarlet* les méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires : Jacobi et Gauss-Seidel.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 1
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle et complexe*
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*

Chapitre 58

228-Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Un plan découpé en deux parties (I- Continuité II- Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Enfin, les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu), le théorème de Peano, etc sont les bienvenus.

Développements

Développements proposés :
- Densité dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ des fonctions continues dérivables nulle part, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème de majoration des dérivées, dans *Rombaldi*

Autres développements possibles :
- Construction de la fonction de Lebesgue, dans *Briane-Pagès*
- Le théorème de Weierstrass, dans *Zuily-Queffélec*
- Un exemples de fonction continue nulle par dérivable, dans *Gourdon*
- L'ensemble des points de continuité d'une fonction est une intersection dénombrable d'ouverts

Idées pour le plan

Généralités sur la continuité et la dérivabilité
- *Définitions et premières propriétés* dans *Rombaldi* la définition de la continuité d'une fonction, la caractérisation séquentielle et des exemples. La définition du prolongement par continuité et des exemples. puis dans *Gourdon* la définition de la dérivabilité, des dérivées d'ordre supérieur et les formules de dérivation des application composées et de Leibniz. Des exemples dans *Rombaldi*
- *Lien entre continuité et dérivabilité* dans *Rombaldi* le théorème qui dit que la dérivabilité implique la continuité. En contre exemple (fonction continue pas dérivable) un exemple simple puis l'exemple de fonction continue dérivable nulle part et le théorème qui dit que sur un compact, de telles fonctions sont denses dans l'ensemble des fonctions continues (développement).

Théorèmes fondamentaux
- *Théorème des valeurs intermédiaires* dans *Rombaldi* le théorème des valeurs intermédiaires et en application le théorème de Darboux dans *Pommelet*
- *Théorème de Rolle* dans *Gourdon* le théorème de Rolle et dans *Pommelet* l'application qui dit que si un polynôme est scindé, sa dérivée l'est aussi. Des contre exemples et exemples dans *Rombaldi*

- *Théorème des accroissements finis* dans *Gourdon* le théorème des accroissements finis et le théorème des accroissements finis généralisé. En conséquence, la règle de l'Hospital. En application dans *Rombaldi* l'application au sens de variation d'une fonction.
- *Formules de Taylor* dans *Gourdon* les formules de Taylor et en application, l'existence de développements limités, les développements en série entière, la majoration des dérivées (développement), l'inégalité de Kolmogorov dans *Rombaldi*

Suites de fonctions

- *Régularité d'une limite de suite de fonctions* dans *Gourdon* le théorème de continuité de la fonction limite, le théorème de dérivabilité de la fonction limite. Des contre-exemples dans *Hauchecorne*.
- *Théorème de Weierstrass* dans *Gourdon* le théorème de Weierstrass, insister sur le fait que c'est une conséquence des théorèmes précédents.

Exemples

- *Fonctions lipschitziennes et uniforme continuité* dans *Gourdon* la définition des fonctions lipschitziennes, elles sont uniformément continues. Et dans *Rombaldi* un exemple.
- *Fonctions monotones* dans *Pommelet* le théorème qui dit que les fonctions monotones sont dérivables presque partout (admis)
- *Fonctions convexes* dans *Gourdon* les propriétés des fonctions convexes, des applications.
- *Espaces de fonctions continues sur un compact* dans *Zuily-Queffélec* le théorème d'Ascoli et en application le théorème de Peano. (On peut aussi dire que ce théorème nous donne des parties compactes non triviales de dimension infinie)
- *Intégrales* dans *Hauchecorne* le théorème d'existence de primitives, le théorème de dérivation d'une intégrale, les théorèmes de continuité et de dérivabilité sous l'intégrale, des contre-exemples simples dans *Hauchecorne* et la fonction de Lebesgue dans *Briane-Pagès*.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Pommelet, *Cours d'anayse*
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
- Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

Chapitre 59

229-Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Les candidats sont invités à réfléchir à l'influence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Le jury souhaiterait que les candidats illustrent leurs propos et raisonnements sur les fonctions convexes par des dessins clairs. Il n'est pas déraisonnable de parler de fonctions à variations bornées.

Question. Prouver le théorème de diagonalisation simultanée des formes quadratiques.

Réponse. On admet que si A est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée. On prend le produit scalaire associé à A, $A^{-1}B$ est diagonalisable (car symétrique) pour le produit sclalaire associé à A. Montrons que $M = A^{-1}B$ est diagonalisable pour le produit scalaire donné par A, c'est à dire montrer que

$$\begin{aligned}\forall x, y, &\langle AMx, y\rangle = \langle Ax, My\rangle \\ \text{soit } &\langle Bx, y\rangle = \langle x, By\rangle,\end{aligned}$$

ce qui est bien le cas. On peut donc diagonaliser $A^{-1}B$ par rapport au produit sclaire donné par A, ce qui nous donne une diagonalisation de B.

Question. Des questions sur l'optimisation sous contrôle.

Question. Il est important de parler de fonctions convexes à plusieurs variables.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de sélection de Helly, dans *Oraux X-ENS, analyse* 2
- Ellipsoïde de John-Loewner, dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3

Autres développements possibles :
- Inégalité de Kantorovitch
- Le théorème des trois droites d'Hadamard, dans *Zuily-Queffélec*
- Méthode du gradient à pas optimal, dans *Ramis-Warusfel*

Idées pour le plan

Fonctions monotones
- *Définitions et premières propriétés* dans *Ramis-Deschamps-Odoux*, 3, la définition d'une fonction croissante, décroissante et constante. On donne en

exemple un exemple simple et la fonction de répartition dans *Ouvrard* 1. Ensuite, la monotonie de $f+g$, λf, $\frac{1}{f}$ et $f \circ f$ (la dernière est dans *Gourdon*, les autres ne sont nulle part). En application, l'étude de la suite $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ dans *Oraux X-ENS, analyse* 2.
- *Monotonie et continuité* dans *Pommelet* les propositions sur les fonctions monotones (points de discontinuité au plus dénombrables, existence de limites à droite et à gauche).
- *Monotonie et dérivabilité* dans *Ramis-Deschamps-Odoux*, le théorème qui donne la monotonie de la fonction en fonction du signe de la dérivée, et dans *Pommelet* le théorème qui dit qu'une fonction monotone est dérivable presque partout.
- *Suites de fonctions monotones - Suites monotones de fonctions* dans *Gourdon* les théorèmes de Dini, dans *Oraux X-ENS analyse* 2, le théorème de sélection de Helly et dans *Rudin* le théorème de convergence monotone.
- *Fonctions à variations bornées* dans *Gourdon* la définition des fonctions à variations bornées et le théorème qui dit que c'est la différence de deux fonctions croissantes. On peut en déduire que les fonctions à variations bornées sont dérivables presque partout, mais ce n'est écrit nulle part...

Fonctions convexes
- *Définitions et premières propriétés* dans *Rombaldi* la définition des fonctions convexes, les premières propriétés et des exemples.
- *Régularité et caractérisation des fonctions convexes* dans *Rombaldi* les propositions de régularité des fonctions convexes, des exemples
- *Fonctions convexes et différentiabilité* dans *Rombaldi* les résultats relatifs à la dérivabilité, la dérivée et la dérivée seconde des fonctions convexes. Des exemples. Dans *Gourdon* la généralisation en plusieurs dimensions.

Applications
- *Inégalités de convexité* dans *Rombaldi* les inégalités de convexité avec des exemples, dans *Gourdon*, l'inégalité arithmético-géométrique, l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Minkowski, dans *Ouvrard,* 2 l'inégalité de Jensen, si on a la foi, dans *Zuily-Queffélec* le lemme des trois droites de Hadamard.
- *Optimisation* dans *Oraux X-ENS, algèbre* 3 l'ellipsoïde de John-Loewner, et dans *Ciarlet* la méthode du gradient à pas optimal.

(Martingales)

Références

- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Gourdon, *Analyse*
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*

– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 2
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3
– Ouvrard, *Probabilités* 1
– Ouvrard, *Probabilités* 2
– Rudin, *Analyse réelle et complexe*
– Ramis-Deschamps-Odoux, *Cours de mathématiques,* 3· *Topologie et éléments d'analyse*

Chapitre 60

230-Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). L'étude de la convergence d'une série élémentaire par une hiérarchisation des méthodes et par la vérification des hypothèses correspondantes est appréciée du jury. Il faut soigner la présentation du plan et ne pas oublier les valeurs absolues lorsqu'on veut énoncer un théorème de convergence absolue (même remarque pour l'intégration). Le jury demande que les candidats ne confondent pas équivalents et développements asymptotiques. Les meilleurs pourront invoquer les méthodes classiques de renormalisation des séries divergentes.

Développements

Développements proposés :
- Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible, dans *Gourdon*
- Formule sommatoire de Poisson, dans *Zuily-Queffélec*

Autres développements possibles :
- Formule d'Euler Mac Laurin, dans *Gourdon*
- Un théorème de Gauss, dans *Oraux X-ENS* 2
- Règle de Raab Duhamel et des exemples, dans *Moisan-Verotte, Topologie et séries*

Idées pour le plan

Généralités
- *Définitions et premières propriétés* dans *Gourdon* la définition des sommes partielles et du reste d'une série. La définition de la convergence des séries, en exemple les suites arithmétiques et géométriques et le théorème qui dit que si une série converge, alors son terme général tend vers 0 et un contre exemple avec la série harmonique et dans les exercices le théorème qui dit que le terme général d'une série convergente à terme positif est en $0(\frac{1}{n})$. Dans *Hauchecorne*, un contre-exemple.
- *Critère de Cauchy et suites absolument convergentes* dans *Gourdon* le critère de Cauchy pour les séries et la définition des séries absolument convergente, comme on est dans un Banach, ça converge. Ca motive l'étude des séries à terme positif.

Séries à terme général positif
- *Théorèmes de comparaison* dans *Gourdon* les théorèmes sur les séries à termes positifs, des exemples de *Pommelet*, le théorème d'équivalence des

sommes partielles et des restes et en exemple dans *Pommelet* la somme sur les premiers, la comparaison série-intégrale, des exemples.
- *Critères de convergence* dans *Gourdon* le critère multiplicatif, la règle de Raab-Duhamel, la règle de d'Alembert et la règle de Cauchy. Des exemples dans *Voedts* et des contre-exemples dans *Hauchecorne*

Séries à terme général quelconque
- *Séries alternées* dans *Gourdon* le théorème des séries alternées et en exemple $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- *Séries doubles* dans *Hauchecorne* le théorème sur les séries doubles.
- *Transformation d'Abel* dans *Gourdon* le théorème de transformation d'Abel et un exemple.
- *Produit de Cauchy* dans *Hauchecorne* le produit de Cauchy, dans *Pommelet* aussi, avec un exemple.
- *Changement d'ordre et groupement de termes* dans *Gourdon* la définition d'une série commutativement convergente et le théorème qui suit. Dans *Oraux X-ENS analyse* 1 le théorème de Riemann et dans *Pommelet* le théorème de groupements de termes avec un exemple dans *Oraux X-ENS analyse* 1.

Utilisation de fonctions
- *Séries entières* dans *Gourdon* la définition des séries entières et du rayon de convergence. Ensuite, le théorème d'Abel angulaire et le théorème taubérien faible (développement)
- *Séries de Fourier* dans *Gourdon* la définition des coefficients de Fourier, le théorème de Parseval et le théorème de Dirichlet et la formule sommatoire de Poisson dans *Gourdon* mais la démonstration qu'on prend est dans *Zuily-Queffélec* (développement).
- *Formule d'Euler Mac Laurin* dans *Gourdon* la définition des polynômes de Bernoulli et la formule d'Euler Mac Laurin.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 1

Chapitre 61

232-Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner un vecteur.

Remarque. On peut aussi parler de la méthode des moindres carrés (mais il faut faire des choix parce que sinon c'est un peu long et il parait difficile d'enlever ce qui n'a pas trait aux systèmes linéaires).

Remarque. On peut aussi parler des méthodes de localisation des zéros de polynômes.

Développements

Développements proposés :
- Méthode de Newton, dans *Rouvière*
- Méthode du gradient à pas optimal, dans *Ramis-Warusfel*

Autres développements possibles :
- Méthode Δ^2 d'Aitken, dans *Pommelet* ou *Quarteroni*
- Méhtode de la sécante, dans *Demailly*
- Méthode de Newton pour les polynômes, dans *Chambert-Loir*
- Classification des points fixes, dans *Demailly*

Idées pour le plan

Principe des méthodes itératives
- *Introduction aux méthodes itératives* dans *Demailly* le petit paragraphe d'intro aux méthodes itératives pour expliquer comment en partant du problème $F(X) = 0$, on se ramène à $f(X) = X$ (il suffit de poser $f(X) = X + \lambda F(X)$ pour un λ bien choisi)
- *Théorème du point fixe* dans *Demailly* le théorème du point fixe de Picart et l'estimation de la vitesse de convergence. La généralisation si seulement l'une des itérées de la fonction considérée est contractante.
- *Points fixes attractifs et répulsifs* dans *Demailly* la définition des points fixes attractifs, répulsifs et superattractifs. Des exemples pour les cas douteux. En annexe, les comportement graphiques des itération de point fixe dans ces différents cas.

Approximation des fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- *Méthode de dichotomie* dans *Pommelet* le théorème des valeurs intermédiaires et l'explication de la méthode de Dichotomie. La vitesse de convergence vers la solution. Ca ne marche pas en dimension supérieure.

- *Méhdode de Newton en dimension* 1 dans *Rouvière* et *Demailly* l'explication de la méthode de Newton en dimension 1, la vitesse de convergence quadratique et l'équivalent donné dans *Rouvière* (développement). En annexe, le schéma de fonctionnement de la méthode de Newton.
- *Méthode de la sécante* dans *Demailly* l'explication de la méthode de la sécante, pourquoi elle est parfois plus indiquée que la méthode de Newton (éventuellement à l'oral si manque de place), l'estimation pour la convergence et en annexe le schéma de la méthode.

Approximation des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

- *Méthode de Newton-Raphson* dans *Demailly* l'explication de la méthode de Newton-Raphson et le théorème qui dit que ça converge et que le point cherché est un point fixe superattractif de la suite des itérations.
- *Méthodes de descente* dans *Objectif Agrégation* le principe général des méthodes de gradient puis dans *Ciarlet* la méthode du gradient à pas variable et dans *Ramis-Warusfel* la méthode du gradient à pas optimal (développement).
- *Résolution de systèmes linéaires* à l'oral, dire qu'il existe des méthodes exactes qui consistent à trouver des factorisations des systèmes qu'on considère puis dans *Ciarlet* les remarques générales pour les méthodes itératives de systèmes linéaires, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, la méthode de relaxation et les théorèmes de convergence qui vont avec.

Références

- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées, tome* 1
- Demailly, *Analyse numérique des équations différentielles*
- Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*
- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Objectif Agrégation

Chapitre 62

234- **Espaces** $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geq q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$).

Question. Comment montrer que $\|f\|_\infty \leq \liminf_{p \to \infty} \|f\|_p$? (Réponse dans *Briane-Pagès*).

Question. Sur un espace de probas, $p \geq q, L^p \subset L^q$ et $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

Réponse. On a

$$\begin{aligned} |f|_p &\leq |f|^q \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} + \mathbb{1}_{\{|f|\leq 1\}} \\ \|f\|_p^p &\leq \int_\Omega |f|^q \mathrm{d}\mu + \mu\{|f| \leq 1\} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ca peut aussi se faire avec Hölder, voir *Briane-Pagès*.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Riesz-Fischer, dans *Brézis*
- Polynômes orthogonaux, dans *Objectif Agrégation*

Autres développements possibles :
- Dual de L^p, dans *Brezis*
- Théorème d'échatillonnage de Shannon, dans *Zuily-Queffélec*

Idées pour le plan

Généralités
- $\mathcal{L}^p$ dans *Briane-Pagès* la définition des espaces $\mathcal{L}^p$, l'application dans le cas de la mesure de comptage, les inégalités de Hölder et Minkowski.
- *L^p et convergence dans les espaces L^p* dans *Briane-Pagès* la définition de l'équivalence qui sert à définir les espaces L^p puis la définition des espaces L^p (sans oublier l'infini !). Dans *Brezis* le théorème de convergence dominée L^1 et dans *Briane-Pagès* un contre-exemple quand on n'a pas domination, puis le lemme de Fatou et ensuite le fait que c'est un espace vectoriel et que la norme qu'on a définie est bien une norme puis le théorème de Riesz-Fischer (développement). Dans *Brezis* le corollaire au théorème de Riesz-Fischer.

- *Cas particulier de L^2* dans *Objectif Agrégation* la définition des fonctions poids, le fait que $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert (on écrit son produit scalaire) et le théorème sur les polynômes orthogonaux (existence et unicité), des exemples dans le cas de quelques poids classiques, le fait que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ (développement) et l'application pour trouver une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Relations entre les espaces L^p

- *Inclusion et densité* dans *Briane-Pagès* les relations d'inclusion entre les espaces L^p quand la mesure est finie. Dans *Brezis* la densité des fonctions continues à support compact dans les L^p, dans *Brezis* le fait que les fonctions étagées intégrables sont denses dans les L^p,
- *Dualité* dans *Brezis* le théorème de représentation de Riesz pour les L^p ($1 < p < \infty$), le lemme avec les fonctions L^1_{loc}, le fait que c'est séparable et réflexif (donner la définition de la réflexivité si besoin), le cas de L^1 c'est séparable mais pas réflexif, on dit que $(L^\infty)'$ n'est pas L^1 mais qu'il le contient strictement et ensuite le fait que ce n'est ni réflexif, ni séparable.

Produit de convolution et transformation de Fourier

- *Produit de convolution* dans *Brezis* la définition du produit de convolution, l'inégalité de la norme L^p du produit de convolution avec le produit des normes des termes qui interviennent, les propriétés sur le support du produit de convolutio, sur la continuité du produit de convolution (sous certaines hypothèses, sur la dérivée du produit de convolution. Dans *Objectif Agrégation* la définition d'une identité approchée, le théorème d'approximation par convolution avec une suite régularisante.
- *Séries de Fourier* dans *Objectif Agrégation* la définition des coefficients de Fourier, des sommes partielles, les e_n forment une famille orthonormale et totale de $L^2(\mathbb{T})$, l'égalité de Parseval, le lemme de Riemann-Lebesgue et la définition de σ_N et des noyaux, leur écriture en tant que produit de convolution et le théorème de Féjer.
- *Transformation de Fourier* dans *Briane-Pagès* la définition de la transformée de Fourier sur L^1, les propriétés, quelques propriétés sur la régularité des transformées de Fourier, l'espace de Schwartz, la transformée de Fourier d'un produit de convolution, l'injectivité et la formule d'inversion. La transformée de Fourier-Plancherel.

Références

- Brézis, *Analyse fonctionnelle*
- Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*
- Objectif Agrégation

Chapitre 63

235-Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque. Pas de remarques du jury d'agrèg en 2010.

Question. Est-ce qu'il y a une différence entre suites et séries de fonctions ?

Réponse. Non, dans le cas des séries, on s'intéresse à la convergence de la suite des sommes partielles.

Question. Les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ sont-elles denses dans L^p ?

Réponse. Oui.

Question. Quelle est la différence entre le noyau de Fejer et le noyau donné par la série de Fourier habituelle ?

Réponse. Le noyau de Fejer est positif et c'est une approximation de l'unité. Le noyau donné par la série de Fourier n'est pas forcément positif.

Question. Redémontrer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Question. Soit $f \in {}^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$x \longmapsto \int_0^x f(t)\mathrm{dt}$$

est continue

Réponse. On pose $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbb{1}_{[0,x]}\mathrm{dt}$ et on utilise le théorème de continuité sous le signe $\int$ car $|f(t)\mathbb{1}_{[0,x]} \leq |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$.

Question. Donner l'idée de la preuve du théorème central limite.

Remarque. On peut aussi parler de semi-intégrabilité. Et il faut être capable de faire la preuve pour $\frac{\sin x}{x}$.

Développements

Développements proposés :
- Prolongement de la fonction Γ dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème de Riesz-Fischer (L^p est un Banach) dans *Brezis*

Autres développements possibles :
- Théorème de Fejer, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov
- Théorème sur la convergence de la convolution avec une identité approchée

Idées pour le plan

Théorèmes fondamentaux

- *Fonctions positives* dans *Briane-Pagès* le théorème de Beppo-Levi, le lemme de Fatou et des applications des deux théorèmes (dans les exercices et le chapitre précédent)
- *Convergences dominées* dans *Briane-Pagès* le théorème de convergence dominée et des exemples, on cite les théorèmes de continuité et de dérivation sous l'intégrale sans forcément les écrire, le théorème d'inversion de somme et d'intégrale, dans *Zuily-Queffélec* le théorème de Vitali (dans le paragraphe sur la convergence presque sûre).
- *Espaces L^p* dans *Brézis* la définition des espaces L^p, l'inégalité de Hölder, le théorème de Riesz-Fischer (développement) et le théorème qui donne la condition pour une convergence presque sûre.

Régularisation

- *Produit de convolution et identités approchées* dans *Objectif agrégation* (ou au pire dans *Brézis*) la définition du produit de convolution, l'inégalité en norme p du produit de convolution, la définition d'une identité approchée et le théorème de convergence des identités approchées. En application, les théorèmes qui donnent la densité de certains espaces dans d'autres.
- *Applications aux séries de Fourier* dans *Zuily-Queffélec* la définition des coefficients de Fourier, le lemme de Riemann-Lebesgue, la définition des noyaux de Dirichlet et de Fejer, les propositions qui vont avec et le théorème de Fejer et des applications.

Autres applications

- *Fonctions holomorphes* dans *Zuily-Queffélec*, le théorème d'holomorphie sous l'intégrale et en application, le prolongement de Γ (développement).
- *Probabilités* dans *Zuily-Queffélec* les définitions de convergence en probabilité, presque sûre et en loi. Les applications : loi faible des grands nombres, des implications de convergence, la loi forte des grands nombres et le théorème central limite.

Références

- Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*
- Zuily-Queffélec, *Ananlyse pour l'agrégation*
- Brezis, *Analyse fonctionnelle*
- Objectif Agrégation

Chapitre 64

236- Illustrer par des exemples quelques calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles

Remarques et questions

Remarque. On peut défendre le développement sur la méthode de Gauss en disant que c'est exact pour les polynômes. Mais de toute manière, si on fait une partie sur le calcul approché d'intégrales, ça a sa place.

Remarque. Il faut mettre explicitement la formule de changement de variables en plusieurs variables dans le plan.

Question. Soit $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive. Calculer

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} \mathrm{dx}$$

Réponse. On peut tout d'abord se rappeler que q est diagonalisable en base orthornormée : il existe une base orthornormée telle que

$$q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$$

et donc on peut écrire

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2)} \mathrm{dx_1} \cdots \mathrm{dx_n}$$

on fait le changement de variables $t_i = \sqrt{\alpha_i} x_i$ et on utilise Fubini, l'intégrale devient :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \cdots \alpha_n}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-t_i^2} \mathrm{dt_i}.$$

La connaissance de l'intégrale qui intervient à la fin (normalement sa valeur est dans le plan, sinon il faut savoir la calculer rapidement) permet de conclure.

Question. Soit

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^+$$

on a

$$\hat{f}(x) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.$$

L'objet de l'exercice est le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \mathrm{dy}.$$

Réponse. On note $\hat{g}(y) = e^{-\alpha y}\mathbb{1}_{y>0}$, on peut alors réécrire I et utiliser le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y)\hat{f}(y)\mathrm{dy} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y)\mathrm{dy}. \end{aligned}$$

En notant $h(y) = \hat{g}(y)$ on peut calculer la transformée de Fourier de h et ensuite vérifier que h vérifie bien les hypothèses du théorème pour appliquer l'inverse de la transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} \hat{h}(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ity}e^{-\alpha y}\mathbb{1}_{y\geq 0}\mathrm{dy} \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-(it+\alpha)y}\mathrm{dy} \\ &= \left[\frac{1}{-(it+\alpha)}e^{-(it+\alpha)y}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{-1}{-(it+\alpha)} \end{aligned}$$

et comme $h \in L^2$ on a $\hat{\hat{h}}(t) = h(-t)$ donc

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(y)f(-y)\mathrm{dy}.$$

Remarque. On peut aussi citer (et donner un exemple d'utilisation) la formule de Green-Riemann, mais à priori ça n'est pas obligatoire.

Développements

Développements proposés :
– Méthode de Gauss, dans *Demailly*
– Formule des compléments, dans *Amar-Matheron*

Autres développement possible
– Calcul de l'intégrale de Fresnel, dans *Oraux X-ENS analyse* 3
– Un beau calcul d'intégrale avec le théorème des résidus, dans *?*

Idées pour le plan

Méthodes de base

- *Primitives* dans *Gourdon* le théorème qui dit que $\int_a^b f'(t)\mathrm{dt} = (b) - f(a)$ et quelques exemples de primitives usuelles et ensuite les primitives de fractions rationnelles et les primitives de fonctions en sin et cos (mais pas les règles de Bioche qu'on met après). À chaque fois, des exemples qui sont dans les exercices.
- *Intégration par parties* dans *Gourdon* la formule d'intégration par parties et en exemple le calcul des intégrales de Wallis et l'exemple de la fonction Γ avec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- *Changement de variables* dans *Gourdon* la formule de changement de variables en dimension 1 avec comme application les règles de Bioche et un exemple, et la formule de changement de variables en dimension supérieure. Les exemples de passage en coordonnées polaires, sphériques et cylindriques et des exemples de calculs, dont $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{dx}$ (intégrale de Gauss).
- *Théorème de Fubini* dans *Gourdon* le théorème de Fubini et en application le calcul de l'intégrale de Fesnel.

Utilisation de l'analyse complexe

- *Utilisation du prolongement analytique* dans *Objectif agrégation* le théorème de prolongement analytique et l'application au calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne.
- *Utilisation du théorème des résidus* dans *Objectif agrégation* la définition de l'indice d'un point par rapport à une courbe fermée, la définition du résidu et le théorème des résidus. En application, la formule des compléments dans *Amar-Matheron* (développement).

Autres méthodes

- *Utilisation de suites et de séries* dans *Gourdon* on donne deux exemples de calculs d'intégrales à l'aide de suites et de séries : le calcul de l'intégrale de Dirichlet et le calcul de $I(\rho) = \int_0^\pi \ln(1-2\rho cos\theta+\rho^2)\mathrm{d}\theta$ en expliquant en quoi ça utilise des sommes de Riemann. On peut aussi utiliser les interversions de séries et intégrales (c'est dans *Gourdon* aussi).
- *Utilisation des théorèmes de régularité des intégrales à paramètres* dans *Zuily-Queffélec* les théorèmes de continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres et des exemples de calculs d'intégrales en utilisant ces méthodes.
- *Inversion de Fourier* dans *Zuily* la définition de la transformée de Fourier (dans S) et les propriétés, le théorème de Plancherel et une application.

Calcul approché d'intégrales

- *Méthodes composées* dans *Crouzeix-Mignot* l'explication des méthodes composées et des exemples : rectangles à gauche, rectangles à droite, formule des trapèzes dans *Demailly* (schémas à mettre en annexe).
- *Méthodes de Gauss* dans *Crouzeix-Mignot* l'explication des méthodes de Gauss, insister sur le fait qu'elles sont exactes pour les polynômes de degré

suffisemment petit et dans *Demailly* la méthode de Gauss (développement).

Références

- Crouzeix-Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Gourdon, *Analyse*
- Objectif Agrégation
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
- Amar-Matheron, *Analyse complexe*

Chapitre 65

238-Méthodes de calcul approché d'intégrales et d'une solution d'une équation différentielle

Remarques et questions

Remarque. Quand cette leçon traitait uniquement du calcul approché d'intégrales, il était important de parler des méthodes de Monte-Carlo. Maintenant ce n'est peut-être plus la peine mais il faut être prêt à répondre à des questions sur le sujet. Si on l'énonce, le mettre en dimension quelconque car c'est vraiment dans les cas de la dimension supérieure ou égale à 3 que cette méthode est bien plus efficace que les autres.

Question. Qu'est-ce qui nous donne l'existence de la base de polynômes orthogonaux ?

Réponse. C'est le procédé de Gram-Schmidt. Il suffit d'orthonormaliser les polynômes de la base canonique pour le nouveau produit scalaire. On a même l'unicité avec ce procédé si on impose que la base soit échelonnée en degré.

Question. Que faut-il préférer entre Euler implicite et Euler explicite ?

Réponse. Euler implicite et Euler explicite sont tous deux d'ordre 1. Lorsqu'une méthode converge, la deuxième aussi. Ceci dit, Euler implicite est plus stable bien qu'il faille résoudre une équation non linéaire pour le mettre en oeuvre. Si on n'est pas dans le cas d'un problème raide, il vaut mieux utiliser Euler explicite et Euler implicite sinon.

Remarque. Il faut mentionner la méthode de Simpson dans les méthodes de quadrature.

Remarque. Pour les calculs d'intégrales, on peut rajouter la méthode de Newton-Gauss qui est basée sur la formule d'Euler Mac Laurin.

Remarque. On peut utiliser l'extrapolation de Richardson pour accélérer la convergence : c'est la méthode de Romberg qui est une méthode d'ordre infini pour les fonctions périodiques.

Remarque. Dans la partie résolutions d'équations différentielles, on peut aussi parler de problèmes aux limites qui se résolvent en utilisant une méthode de tir ou des approximations aux différences finies.

Développements

Développements proposés :
- Méthode de Gauss, dans *Demailly*
- Théorème de Cauchy-Arzela-Peano par la méthode d'Euler explicite, dans *Demailly*

Autres développements possibles :
- Méthode de Runge-Kutta, dans *Demailly*
- Méthode d'intégration de Romberg, dans *Demailly*

Idées pour le plan

Méthodes de calcul approché d'intégrales

- *Méthodes composées* dans *Crouzeix-Mignot* le principe des méthodes composées puis dans *Demailly* les définitions des méthodes de quadrature élémentaires et composées, de l'ordre d'une méthode de quadrature et en exemple les méthodes des rectangles à gauche, à droite, du point milieu, des trapèzes et la méthode de Simpson avec leurs ordres respectifs (1,1, 1, 1 et 3) et le théorème de convergence des méthodes de quadrature composées.
- *Méthode de Gauss* dans *Crouzeix-Mignot* le principe des méthodes de Gauss puis dans *Demailly* la définition de l'erreur et la description de la méthode de Gauss avec le théorème (développement) et des exemples simples.
- *Méthode de Monte-Carlo* dans *Ouvrard* la loi forte des grands nombres de Kolmogorov-Khintchnine et en application la méthode de Monte-Carlo. Bien dire que ça ne s'applique en pratique qu'en dimension supérieure ou pour les fonctions très irrégulières.

Méthodes de calcul approché de solutions d'équations différentielles

- *Introduction* dans *Demailly* on pose le problème de Cauchy, l'équivalence avec la résolution d'une équation intégrale et on définit une méthode à un pas.
- *Ordre, consistance, stabilité, convergence* dans *Demailly* la définition de l'ordre d'une méthode à un pas, de l'erreur de consistance, de la consistance, de la stabilité et de la convergence d'une méthode, le théorème qui dit que stabilité et consistance impliquent convergence. Les théorèmes pour la consistance, l'ordre et la convergence en fonction de Φ toujours dans *Demailly*
- *Exemples de méthodes* On donne les formules pour Euler explicite, Euler implicite et Euler point milieu, on peut parler de problèmes raides pour justifier l'utilisation d'Euler implicite et on donne leur ordre. On peut aussi rajouter Runge-Kutta d'ordre 4.
- *Application de la méthode d'Euler explicite* dans *Zuily-Queffélec* le théorème d'Ascoli et dans *Demailly* les lemmes pour le développement et enfin le théorème d'existence (Cauchy-Arzela-Peano) (développement).

Références

- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Crouzeix-Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Ouvrard, *Probabilités,* 2

Chapitre 66

239-Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

Remarques et questions

Question (À propos de la régularisation et de la convolution). Comment montre-t-on que $L^1 \star L^p \to L^p$?

Réponse. Il faut écrire l'inégalité de Hölder par rapport à la mesure $f\mathrm{d}\mu$ pour $g \cdot 1$. Pour pouvoir appliquer l'inégalité de Hölder, la mesure de l'espace pour $f\mathrm{d}\mu$ doit être finie, ici c'est le cas car $f \in L^1$. On a :

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \int_\Omega f(y)g(x-y)\mathrm{dy} \\ &\leq \left(\int_\Omega g^p(x-y)\mathrm{dy}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_p^p &\leq \int_\Omega |f \star g(x)|^p \mathrm{dx} \\ &\leq \int_\Omega \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \left(|g(x-y)|^p \mathrm{dy}\right) f(x)\mathrm{dx} \\ &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}^p \\ &\leq \|f\|_{L^1}^p \|g\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

Question. Une question à propos des compacts des espaces L^p.

Question. Pourquoi estèce que la transformée de Fourier d'une mesure caractérise la mesure ?

Réponse. Une mesure existe uniquement quand elle intègre une fonction. Les mesures n'ont pas beaucoup de masse à l'infini, elles sont donc essentiellement déterminées sur un compact. Sur un compact, on peut approcher toute fonction continue par des séries trigonométriques. L'approximation exponentielle est donnée par la transformée de Fourier.

Question. Soient f et g telles que $f \underset{x\to b}{\sim} g$. On pose

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int_x^b f(t)\mathrm{dt} \\ \tilde{g}(x) &= \int_x^b g(t)\mathrm{dt}. \end{aligned}$$

Montrer que $\tilde{f}(x) \underset{x\to b}{\sim} \tilde{g}(x)$.

Réponse. On sait que
$$f(x) - g(x) \underset{x\to b}{=} g(x)\epsilon(x)$$
avec $\epsilon(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} 0$ et donc on peut écrire :
$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x) &= \int_x^b (f(y) - g(y))\,\mathrm{dy} \\ &= \int_x^b g(y)\epsilon(y)\mathrm{dy}.\end{aligned}$$
On voudrait pouvoir appliquer l'inégalité de la moyenne. Pour ça on voudrait prendre ϵ décroissant. Sans rien changer à ce qui a été fait précédemment, on peut choisir ϵ tel que $|f(y)-g(y)| \leq |g(y)|\epsilon(y)$ ce qui nous laisse la possibilité de choisir ϵ décroissant. Ainsi on peut écrire :
$$\begin{aligned}|\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)| &\leq \int_x^b |g(y)|\epsilon(y)\mathrm{dy} \\ &\leq \epsilon(x)\int_x^b |g(y)|\mathrm{dy}\end{aligned}$$
Question. Soit
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x}\mathrm{dx}.$$
Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
Réponse. On remarque tout d'abord que F est bien définie. On note
$$f(x,t) = \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x}$$
alors on a
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -e^{-tx},$$
en se plaçant sur $K = [a, +\infty[$ avec $a > 0$ on a $\forall t \in K$ et $\forall x$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq e^{-ax} \in L^1$$
donc $\forall t \in]a, +\infty[, F(\cdot)$ est dérivable en t et
$$F'(t) = \int_0^{+\infty} -e^{-tx}\mathrm{dx} = \frac{1}{t}$$
Elle est aussi C^1 (se montre encore facilement avec le théorème. Donc
$$F(t) = \ln(t) + C$$
Et comme $F(1) = 0$, on trouve que $C = 0$.

Développements

Développements proposés :
- Prolongement de la fonction Γ, dans *Zuily-Queffélec* et *Objectif Agrégation*
- Formule d'inversion de Fourier et application, dans *Zuily*

Autres développements possibles :
- Formule des compléments, dans *Amar-Matheron*
- Prolongement de la fonction ζ de Riemann, dans *Zuily-Queffélec*
- Résolution d'un problème de Dirichlet sur un cercle, dans *Rudin*
- Méthode de la phase stationnaire, dans *Zuily-Queffélec*
- Méthode de Laplace, dans *Zuily-Queffélec*

Idées pour le plan

Régularité et premiers exemples
- *Continuité* dans *Zuily-Queffélec* le théorème de continuité sous le signe intégrale dans le cas des intégrales absolument convergentes et des intégrales semi-convergentes. L'exemple de la fonction Γ si on veut, et un autre exemple qui est après. Un contre-exemple dans *Hauchecorne.* (Il y a d'autres exemples dans les exercices de *Gourdon.*)
- *Dérivabilité* dans *Zuily-Queffélec* le théorème de dérivabilité sous l'intégrale dans le cas des intégrales absolument convergentes et semi-convergentes. En exemple le calcul de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}, n \in \mathbb{N}^*$. Un contre-exemple dans *Hauchecorne* (il y a d'autres exemples dans les exercices de *Gourdon*).

Holomorphie
- *Holomorphie sous l'intégrale* dans *Objectif Agrégation* la formule de Cauchy puis dans *Zuily-Queffélec* le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale dans le cas des intégrales absolument convergentes et semi-convergentes, dans *Objectif Agrégation* le théorème de méromorphie sous le signe intégrale.
- *Exemples* dans *Objectif Agrégation* et *Zuily-Queffélec* l'exemple de la fonction Γ (développement) puis des exemples de choses qu'on calcule par prolongement analytique comme la transformée de Fourier de la Gaussienne dans *Objectif Agrégation*

Convolution
- *Définition* dans *Brézis* la définition et les propriété de la convolution.La définition des suites régularisantes et les propriétés. On termine par le fait que les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ sont denses dans les L^p.
- *Critère de compacité forte dans les L^p* dans *Brézis* le théorème d'Ascoli et le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

transformée de Fourier et de Laplace

- *Transformée de Fourier* Dans *Zuily* la définition de $\mathcal{S}$ et de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$, les principales propriétés et le fait que c'est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (développement) avec le lemme nécessaire. Dans *Barbe-Ledoux*, la définition des fonctions caractéristiques, le fait qu'elles caractérisent la loi, des exemples de fonctions caractéristiques de certaines lois et la formule d'inversion de Fourier.
- *Transformée de Laplace* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la transformée de Laplace d'un vecteur aléatoire, la théorème comme quoi elle est analytique et la formule qui va avec, la formule pour la transformée de Laplace d'une convolution de probabilités et l'inversion de la loi de Laplace.

Étude asymptotique des intégrales à paramètres (si il y a de la place)
- *Méthode de Laplace* dans *Zuily-Queffélec* l'explication de la méthode de Laplace
- *Méthode de la phase stationnaire* dans *Zuily-Queffélec* l'explication de la méthode de la phase stationnaire.

Références

- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Objectif Agrégation
- Gourdon, *Analyse*
- Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
- Hauchecorne, *Les contre exemples en mathématiques*
- Brezis, *Analyse fonctionnelle*
- Barbe-Ledoux, *Probabilité*

Chapitre 67

240- Transformation de Fourier. Applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Cette leçon ne peut se résumer à une collection de relations algébriques (analyse algébrique de la transformée de Fourier). Elle nécessite, pour s'inscrire dans le contexte de l'analyse, une étude minutieuse et une réflexion sur les hypothèses et les définitions des objets manipulés. L'extension de la transformée de Fourier aux distributions tempérées trouvera sa place ici.

Remarque. Pour la transformée de Fourier, c'est mieux de tout énoncer en dimension n. On peut aussi parler de transformée de Fourier discrète et du théorème d'échantillonnage de Shannon.

Question. Calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne.

Question. Quelle est la transformée de Fourier de la loi de Cauchy avec une densité de paramètre a ?

Développements

Développements proposés :
- Formule sommatoire de Poisson, dans *Zuily-Queffélec*
- Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$, dans *Zuily*

Autres développements possibles :
- Théorème d'échantillonnage de Shannon, *Willem*

Idées pour le plan

Transformée de Fourier dans L^1 et L^2
- *Définitions et premières propriétés* dans *Briane-Pagès* la définition de la transformée de Fourier d'une fonction de L^1, les propriétés qui suivent, le théorème de Riemann-Lebesgue, les propriétés de régularité de la transformée de Fourier, les propriétés pour la dérivée de la transformée de Fourier, la tranformée de Fourier d'un produit de convolution, dans les exercices des exemples et la formule sommatoire de Poisson (développement).
- *Injectivité et formule d'inversion* dans *Briane-Pagès* l'injectivité de la transformée de Fourier sur L^1, les lemmes et la formule d'inversion de Fourier pour les fonctions L^1. Un exemple où on fait le calcuil à l'envers, la transformée de Fourier deux fois. Dans *Zuily* le théorème de Paley-Wiener pour la localisation du support de la transformée de Fourier.

– *Transformée de Fourier-Plancherel* dans *Briane-Pagès*, le premier lemme, la définition et les propriétés de la transformée de Fourier-Plancherel, la convolution de deux transformées de Fourier-Plancherel.

Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

– *Transformation de Fourier dans* $\mathcal{S}$ dans *Zuily* un rapide rappel de ce qu'est $\mathcal{S}$ et de ses propriétés, la défintition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ le lemme et la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$ (développement), les propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$.
– *Transformation de Fourier dans* $\mathcal{S}'$ dans *Zuily* la définition de $\mathcal{S}'$, des exemples, la défintion de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$, les propriétés, des exemples et remarques. On rappelle que L^1 et L^2 sont contenus dans $\mathcal{S}'$ et donc qu'on peut retrouver les résultats de la première partie avec ces propriétés.

Applications

– *Résolution de l'équation de la chaleur* dans *Di Menza* l'équation de la chaleur dans l'espace entier et les étapes de la résolution, la forme de la solution, parler de l'effet régularisant et si il y a la place, des estimations en temps pour les solutions. On peut parler du problème non homogène aussi.
– *La transformée de Fourier en probabilités* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la fonction caractéristique d'une loi, le fait que ça caractérise les lois, des exemples de fonctions caractéristiques, la formule d'inversion de Fourier, la dérivée d'une fonction caractéristique.

Références

– Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
– Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
– Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*
– Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*
– Barbe-Ledoux, *Probabilité*

Chapitre 68

241-Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Remarques et questions

Remarque. Pas de remarques du jury d'agrèg en 2010.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Banach-Steinhaus et application : existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point, dans *Gourdon*
- Théorème de sélection de Helly, dans *Oraux X-ENS, analyse* 2

Autres développements possibles :
- Formule sommatoire de Poisson, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème de Fejer, dans *Zuily-Queffélec*

Idées pour le plan

Convergence
- *Liens entre les convergences* dans *Gourdon* la définition de la convergence absolue, normale, simple et uniforme et les relations entres ces notions. Dans *Zuily-Queffélec*, la définition de la convergence presque sûre. Dans *Gourdon*, les deux théorèmes de Dini.
- *Résultats sur les suites extraites* dans *Gourdon* la définition d'une suite extraite et le théorème de Weierstrass. Dans *Oraux X-ENS, analyse* 2, le théorème de sélection de Helly (développement), dans *Brezis* le corollaire du théorème de Riesz-Fischer qui dit qu'on peut extraire une sous-suite qui converge presque sûrement dans le cas de la convergence en L^p. Dans *Hauchecorne* des contres-exemples.
- *Régularité de la limite* Dans *Gourdon* le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, un contre-exemple, le théorème de dérivabilité d'une suite de fonctions, un contre-exemple.
- *Intégrabilité* dans *Briane-Pagès* le théorème de Beppo-Levi, le lemme de Fatou, des exemples (et éventuellement des contre-exemples)
- *Inversions de limites* dans *Briane-Pagès* le théorème d'intervertion de $\sum$ et $\int$. Des contre-exemples et des exemples dans *Gourdon.*

Séries entières et Holomorphie
- *Séries entières* dans *Gourdon* la définition des séries entières, du rayon de convergence, le théorème qui dit qu'il y a convergence normale à l'intérieur du disque de convergence, les problèmes au bord (en général on ne peut rien dire) et le théorème d'Abel angulaire et le théorème taubérien faible (tout es aussi dans *Objectif agrégation*).

- *Lien avec les fonctions holomorphes* dans *Objectif agrégation* la définition des fonctions analytiques, le théorème des zéris isolés, le principe du prolongement analytique et le lien entre holomorphie et développement en série entière. Le théorème de la limite holomorphe.

Séries de Fourier

- *Définitions* dans *Objectif agrégation* la définition des coefficients de Fourier, des sommes partielles et des différents noyaux.
- *Convergence des séries de Fourier* L'égalité de Parseval, le théorème de Féjer et le théorème de Dirichlet. En contre exemple, dans *Gourdon* et l'application : existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point.

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- Objectif agrégation
- Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*

Chapitre 69

242- Utilisation en probabilités du produit de convolution et de la transformation de Fourier ou de Laplace

Remarques et questions

Remarque. Dans le plan, il est important de préciser qu'on admet le théorème de Levy-Khintchine.

Remarque. Si on n'est pas à l'aise, on n'est pas obligés de parler de lois infiniment divisibles.

Remarque. Dans les exemples de fonctions caractéristiques, en choisir un et faire le calcul.

Question. Qu'est-ce qu'une loi de probabilités arithmétique ?

Réponse. Une variable aléatoire réelle est arithmétique si elle prend ses valeurs dans un réseau. C'est à dire si $X \in a + b\mathbb{Z}$ avec $a \leq 0$ et $b > 0$. Cette propriété peut être caractérisée sur les fonctions caractéristiques, montrons que $\exists c \neq 0$ tel que $|\phi_X(c)| = 1$. On a

$$\phi_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{it(a+bk)}\mathbb{P}(X = a + bk)$$

soit encore

$$\begin{aligned}
\phi_X(\frac{2\pi}{b}) &= \mathbb{E}\left(e^{2i\pi\frac{X}{b}}\right) \\
&= e^{2i\pi\frac{a}{b}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ki\pi\frac{a+bk}{b}}\mathbb{P}(X = a + bk) \\
&= e^{2i\pi\frac{a}{b}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi k}\mathbb{P}(X = a + bk) \\
&= e^{2i\pi\frac{a}{b}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = a + bk) \\
&= e^{2i\pi\frac{a}{b}}
\end{aligned}$$

Et la réciproque est vraie en utilisant l'inégalité de Jensen qui devient une égalité dans ce cas.
Si il existe c tel que $|\phi_X(c)| = 1$ alors $|\mathbb{E}\left[e^{icX}\right]| \leq 1$ or $|\phi_X(c)| = 1$ il y a donc égalité dans Jensen. Et donc $arg(e^{ick}) = cste$. Donc X est arithmérique : $cX = cste + 2k\pi$.

Développements

Développements proposés :
– Théorème des évènements rares de Poisson, dans *Ouvrard* 2

– Théorème central limite, dans *Zuily-Queffélec*

Autres développements possibles :

– Théorème des grandes déviations de Bernoulli
– Théorème de Bernstein

Idées pour le plan

Caractérisation de la loi d'un vecteur aléatoire

– *Transformée de Fourier* dans *Barbe-Ledoux*, la définition de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire, le théorème d'injectivité, des exemples de fonctions caractéristiques, la formule d'inversion de Fourier et encore des exemples. Ensuite, le théorème de calcul des moments, l'application dans le cas analytique et le théorème des moments. On dit bien que la réciproque est fausse.
– *Transformée de Laplace* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la transformée de Laplace, le théorème qui dit que la transformée de Laplace est analytique sur un voisinage de 0 et sa forme. Un contre-exemple pour le théorème des moments dans les exercices (les moments ne caractérisent pas une loi de probabilités).

Transformée de Fourier, produit de convolution et indépendance

– *Caractérisation de l'indépendance* dans *Barbe-Ledoux* la caractérisation de l'indépendance de variables aléatoires réelles par leur fonction caractéristique. En application, la caractérisation des vecteurs Gaussiens si les composantes sont deux à deux non corrélées et un contre-exemples dans les exercices, dans lequel on ne considère pas le vecteur Gaussien, mais seulement ses composantes Gaussiennes.
– *Loi et transformée de Fourier de la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes* si on veut, dans *Rudin* la définition de la convolution de deux mesures, puis dans dans *Barbe-Ledoux* la loi de la somme de deux variables aléatoires réelles, les propriétés de la convolution, la proposition pour la fonction caractéristique de deux variables aléatoires réelles indépendantes et des exemples.
– *Variables aléatoires gaussiennes et indépendance* dans *Ouvrard* 2 la caractérisation des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes avec le théorème de Bernstein.

Étude du comportement asymptotique

– *Lien entre convergence en loi et convergence des fonctions caractéristiques* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la convergence en loi (il y a une condition qui fait intervenir les fonctions caractéristiques) et dans *Ouvrard* le théorème de Levy pour la convergence en loi qui dit qu'il y a convergence en loi si la

limite simple de la suite de fonctions caractéristiques est continue en 0.
- *Théorèmes limites* dans *Barbe-Ledoux* la loi faible des grands nombres et le théorème central limite (développement). Ensuite, dans *Ouvrard* le théorème de Poisson et le théorème des évènements rares (développement). Si on trouve où c'est, on peut parler d'intervalles de confiance, de statistiques et d'approximation de lois.

Références

- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Barbe-Ledoux, *Probabilité*
- Ouvrard, *Probabilités* 2
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*

Chapitre 70

243- Convergence des séries entières. Propriétés de la somme. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Il est dommage de ne parler que de dérivabilité par rapport à une variable réelle quand on énonce (ou utilise) ensuite ces résultats sur les fonctions holomorphes.

Remarque. À propos des fonctions holomorphes : si une fonction holomorphe est sur un domaine qui contient 0, elle est développable en série entière autour de 0.

Remarque. On peut aussi parler des nombres de Bernoulli, des processus de Galton-Watson, de fonctions génératrices.

Développements

Développements proposés :
- Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible, dans *Gourdon*
- Partitions d'un entier en parts fixées, dans *Oraux X-ENS analyse* 2

Autres développements possibles :
- Théorème taubérien fort, dans *Gourdon*
- Nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ (nombres de Bell), dans *Oraux X-ENS algèbre,* 1

Idées pour le plan

Généralités
- *Définition du rayon de convergence et premières propriétés* dans *Gourdon* la définition des séries entières, du rayon de convergence, le lemme d'Abel. Des exemples dans *Gourdon* en donnant les développements en série entière de fonctions usuelles. Dans *Pommelet* la convergence normale de la série sur tout compact à l'intérieur du disque de convergence.
- *Détermination du rayon de convergence* dans *Gourdon* les règles de D'Alembert et de Cauchy, des contre-exemples dans *Gourdon* et *Hauchecorne*, dans *Pommelet*, la méthode de comparaison des fonctions, la formule de Hadamard, des exemples dans *Pommelet.*
- *Opérations sur les séries entières* dans *Gourdon* les propriétés de la somme et du produit de deux séries entières, des contre-exemples dans *Hauchecorne.*

Propriétés de la somme sur le disque de convergence
- *Régularité* dans *Gourdon*, la continuité de la série entière à l'intérieur du disque de convergence. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en fait. Dans *Objectif Agrégation* le fait que la série entière est une fonction holomorphe. Des exemples.

- *Analycité* dans *Pommelet* le fait qu'une série entière définit une fonction analytique sur le disque de convergence, l'expression de la somme en fonction des dérivéees k-ièmes en tout point du disque de convergence. Puis dans *Objectif agrégation* les théorèmes des zéros isolés et du prolongement analytique. Des exemples (par exemple le prolongement de la fonction Γ) et dans *Pommelet* l'application qui dit que toute série entière admet au moins un point singulier au bord du disque de convergence. (Ce qui motive la partie suivante) dans *Gourdon* la formule de Cauchy puis l'égalité de Parseval.

Étude du comportement de la somme sur la frontière du disque de convergence

- Dans *Hauchecorne* plein d'exemples de comportements au bord du disque de convergence puis dans *Gourdon* le théorème d'Abel angulaire puis le théorème taubérien faible (développement). On peut aussi mettre le théorème taubérien fort.

Développement de fonctions en séries entières

- *Développement en série entière des fractions rationnelles* dans *Gourdon* le paragraphe qui explique comment développer en série entière les fractions rationnelles. Un exemple. En application, dans *Oraux X-ENS analyse* 2 le nombre de partitions d'un entier en parts fixées (développement).
- *Séries entières et équations différentielles* dans *MéthodiX* la méthodologie pour résoudre une équation différentielle à l'aide de développements en série entière (dire que ça peut aussi permettre de trouver le développement en série entière de certaines fonctions usuelles en trouvant une équation différentielles qu'elles vérifient), dans *Oraux X-ENS analyse* 4 des exemples d'équations avec leurs solutions puis dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 les nombres de Bell (développement possible).

Références

- Gourdon, *Analyse*
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- MethodiX, *Analyse*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 1
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 2
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 4
- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Objectif Agrégation

Chapitre 71

245- Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être parfaitement comprise. La notation $\int_\gamma f(z)\mathrm{dz}$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) !

Question. Donner une transformation $D \longrightarrow D$ holomorphe non biholomorphe.

Réponse. On peut considérer une homothétie contractante, et c'est une application du lemme de Schwartz.

Question. Pourquoi est-ce que toute fonction holomorphe est analytique ?

Réponse. On peut la dériver car il y a convergence normale sur l'intérieur du disque de convergence.

Remarque. Quand on dit que la différentielle d'une fonction holomorphe est une similitude directe, il faut se rappeler de la définition d'une similitude. C'est soit $z \mapsto az+b$ soit $z \mapsto a\bar{z}+b$. Et le fait que la différentielle doit être $\mathbb{C}$-linéaire impose qu'il s'agit d'une similitude directe (la différentielle d'une fonction holomorphe est une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Elle ne peut prendre que la forme d'une similitude directe ou indirecte avec $b = 0$ car $\forall z \in \mathbb{C}, \phi(z) = z\phi(1)$. Et comme elle est $\mathbb{C}$-linéaire, elle ne peut pas être une similitude indirecte).

Développements

Développements proposés :
- Prolongement de la fonction Γ dans *Zuily-Queffélec* et *Objectif Agrégation*
- Formule des compléments, dans *Amar Matheron*

Autres développements possibles :
- Automorphismes du disque

Idées pour le plan

Généralités sur les fonctions holomorphes
- *Définitions et premières propriétés* dans *Amar-Matheron* la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité, des exemples. La somme, le produit et la composée de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables le sont aussi, l'exemple des polynômes. Dans *Amar-Matheron* l'exemple de la détermination du logarithme. Dans *Objectif Agrégation* la définition des fonctions analytiques, les fonctions analytiques sont holomorphes.

- *Holomorphie et différentiabilité* dans *Amar-Matheron* les équivalences entre le fait que la différentielle d'une fonction holomorphe soit une similitude directe et les autres conditions. Les corollaires et les équations de Cauchy-Riemann, et les corollaires. Un exemple de fonction holomorphe et de sa dérivée.
- *Interprétation géométrique : Applications conformes et holomorphie* dans *Objectif Agrégation* la définition de l'angle orienté entre deux courbes, la définition d'une application conforme, le lemme qui suit (qui dit que les isomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires qui conservent les angles orientés sont les similitudes directes) et ensuite les applications conformes en z sont certaines fonctions holomorphes. Dans *Amar-Matheron* éventuellement des applications du théorème de représentation conforme de Riemann.

Propriétés des fonctions holomorphes

- *Formule de Cauchy* dans *Pommelet* la définition d'un chemin fermé, dans *Rudin* la définition de l'indice d'un point par rapport à une courbe, l'exemple du cercle, d'autres exemples dans *Objectif Agrégation*, le théorème de Cauchy pour un triangle puis le théorème de Cauchy sur un convexe avat de donner la formule de Cauchy dans un ensemble convexe et le théorème de Morera.
- *Conséquences de la formule de Cauchy* dans *Amar Matheron* le théorème qui dit qu'une fonction holomorphe est développable en série entière au voisinage de chacun de ses points. Ensuite, on donne la formule de la moyenne et l'inégalité de Cauchy, et les conséquences dans *Rudin* pour la convergence uniforme de suites de fonctions holomorphes, et le théorème de Liouville. Dans *Amar-Matheron* le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale. On peut donner l'exemple de la fonction Γ (développement 1, première partie).
- *Prolongement analytique* dans *Amar-Matheron* le principe des zéros isolés puis le théorème de prolongement analytique et des exemples avec la fonction Γ (développement 1, deuxième partie) et le calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne dans *Zuily* ou *Objectif Agrégation*.
- *Principe du maximum* dans *Amar-Matheron* le principe du maximum, les variantes et conséquences puis en application le lemme de Schwarz.

Fonctions méromorphes

- *Singularités* dans *Objectif Agrégation* le théorème de développement en série de Laurent, la forme des coefficients, la définition des différentes singularités, le théorème de Picard et un exemple de singularité essentielle. Dans *Amar-Matheron* la définition d'une singularité isolée, d'une singularité éliminable et des exemples dans les exercices, le théorème de Casoratti-Weierstrass puis la définition d'une fonction méromorphe. Dans *Objectif Agrégation* le théorème de méromorphie sous le signe somme et l'exemple de la fonction Γ (développement 1 troisième partie).

– *Théorème des résidus* dans *Amar-Matheron* la définition des résidus, le théorèpe des résidus et l'application au calcul d'intégrales : mettre la formule des compléments (développement 2) et d'autres exemples dans *Cartan*
– *Dénombrement des zéros et des pôles* dans *Amar-Matheron* le fait que les pôles d'ordre fini de f sont des pôles simples de la dérivée logarithmique de f, le principe de l'argument puis le théorème de Rouché.

Références

– Objectif Agrégation
– Pommelet, *Cours d'analyse*
– Amar-Matheron, *Analyse complexe*
– Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
– Rudin, *Analyse réelle et complexe*
– Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*

Chapitre 72

246- Séries de Fourier. Exemples et applications

Remarques et questions

Remarque (Remarques du jury d'agrèg 2010). Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur les notions de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série de Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier.

Remarque. Dans L^1 les coefficients de Fourier définissent une fonction de manière unique.

Remarque. Si $c_n(f) = o(\frac{1}{n^2})$, on a la convergence normale des sommes partielles. Avec le théorème de régularité, on a la convergence uniforme de la série de Fourier si f est $\mathcal{C}^2$.

Question. Un exemple de calcul. Soit

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(t) \end{aligned}$$

qu'on considère étendue par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$. Calculer ses coefficients de Fourier.

Réponse. Comme la fonction est paire, on aura juste les coefficients de Fourier en cosinus qui interviendront. Pour $n \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \cos(nt)f(t)\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \cos(nt)\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left[\sin(nt)\right]_{-\epsilon}^{\epsilon} \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin(n\epsilon) \\ a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(t)\mathrm{dt} \\ &= \frac{2\epsilon}{\pi} \end{aligned}$$

et donc, si il y avait convergence de la série de Fourier vers la fonction, on aurait :

$$f(t) = \frac{2\epsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n\epsilon)}{n\pi}\cos(nt)$$

on pose

$$S_N(f)(t) = \frac{2\epsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2\sin(n\epsilon)}{n\pi}\cos(nt)$$

$S_N(f)$ converge en tout point de continuité de f. Pour $t = \epsilon$ on a

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &= \frac{2\epsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2\sin(n\epsilon)}{n\pi}\cos(n\epsilon) \\ &= \frac{2\epsilon}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n\epsilon)}{n\pi} \end{aligned}$$

Par théorème de Dirichlet, on a alors : $S_N(f)(\epsilon) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et en prenant $\epsilon = \frac{x}{2}$ on a l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Question. Un autre calcul de coefficients de Fourier. Soit $a \notin \mathbb{Z}$ et sur $[-\pi, \pi]$, $f(t) = e^{iat}$ qu'on étend à $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique. Calculer ses coefficients de Fourier.

Réponse. On prend $n \in \mathbb{N}$ et on calcule les coefficients de Fourier complexes :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)t}\mathrm{dt}, \quad a - n \neq 0 \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(a-n)}\left[e^{i(a-n)t}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin\left((a-n)\pi\right)}{\pi(a-n)} \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi(a-n)}\sin(a\pi). \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{k=-N}^{k=N} \frac{(-1)^k}{\pi(a-k)} \sin(a\pi) e^{ikx} \\
&= \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \sum_{k=-N}^{k=N} \frac{(-1)^k}{a-k} e^{ikx} \\
&= \frac{\sin(a\pi)}{\pi} + \sum_{k=-N}^{k=N} \left[\frac{(-1)^k}{a-k} e^{ikx} + \frac{(-1)^{-k}}{a+k} e^{-ikx} \right] \\
S_\infty(f)(x) &= \frac{\sin(a\pi)}{\pi} + 2 \frac{a \sin(a\pi)}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}
\end{aligned}$$

on applique Dirichlet :

$$S_N(f)(\pi) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \cos(a\pi)$$

et on a alors une formule pour la cotangente :

$$\pi cotan(a\pi) = \frac{a}{\pi} + 2 \frac{a}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^2 - n^2}$$

Développements

Développements proposés :

- Théorème de Banach-Steinhaus et application : existence d'une fonction dont la série de Fourier diverge en un point, dans *Gourdon*
- Formule sommatoire de Poisson, dans *Gourdon* et *Briane-Pagès*

Autres développements possibles :

- Théorème de Fejer, dans *Zuily-Queffélec*

Idées pour le plan

Définitions et préliminaires

- *Définitions* dans *Gourdon* la définition des coefficients de Fourier et de la série de Fourier. On donne les relations entre a_n, b_n et les c_n et on parle du cas des fonctions paires et impaires. Dans les exercices de *Gourdon* on peut donner les coefficients de Fourier de certaines fonctions et quelques autres exemples dans les *Oraux X-ENS analyse* 2.
- *Propriétés des coefficients de Fourier* dans *Zuily-Queffélec* la liste des propriétés des coefficients c_n de Fourier puis le lemme de Riemann-Lebesgue.

– *Convolution et identités approchées* dans *Objectif Agrégation* la définition de la convolution de deux fonctions L^1 sur le tore, l'inégalité en norme L^1 du produit de convolution, ceci munit l'espace L^1 du tore d'une structure d'algèbre non unitaire. Ensuite, la définition d'une identité approchée, un exemple d'identité approchée, le théorème d'approximation par la convolution avec une identité approchée. On obtient des résultats de densités d'espaces de fonctions très régulières dans les L^p.

Problèmes de convergence

– *Convergence au sens de Cesaro* dans *Objectif Agrégation* et *Zuily-Queffélec* la définition des sommes partielles et les différents noyaux. Les résultats sur ces noyaux puis le théorème de Fejer, des applications aussi dans *Zuily-Queffélec* avec notamment le théorème de Weierstrass.
– *Convergence ponctuelle* dans *Objectif Agrégation* le théorème de convergence des sommes partielles, le théorème de Dirichlet, le théorème de convergence normale. Dans *Zuily-Queffélec* des exemples de développements en série de Fourier puis dans *Gourdon* le théorème de Banach Steinhaus et l'application : il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point. Dans les exercices de Gourdon, on donne un exemple d'une telle fonction.
– *Théorie* L^2 dans *Objectif Agrégation* le fait que $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert, sa base Hilbertienne est composée des e_n ($\sin(nt)$ est aussi une base hilbertienne, mais ce n'est écrit nulle part) puis l'égalité de Parseval.

Applications

– *Régularité* dans *Zuily-Queffélec* les propositions qui relient la régularité des fonctions à la décroissance de leurs coefficients de Fourier.
– *Calcul de sommes* dans *Gourdon* l'exercice qui fait calculer des séries de Fourier pour obtenir les valeurs de certaines sommes (si tout va bien, on a donné les coefficients de Fourier plus haut en exemple). L'exercice suivant qui permet de récupérer le développement en série de la cotangente (détailler un peu la manière de procéder).
– *Formule sommatoire de Poisson* dans *Zuil-Queffélec* la formule sommatoire de Poisson et l'application qui suit (développement).
– *Résolution de l'équation de la chaleur* dans *Oraux X-ENS* 4 l'équation de la chaleur et sa résolution via les séries de Fourier (historiquement, c'est pour ça que les séries de Fourier on été introduites).

Références

– Gourdon, *Analyse*
– Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
– Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*

– Objectif Agrégation
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 2
– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS analyse* 4

Chapitre 73

247- Exemples de problèmes d'interversion de limites

Remarques et questions

Question. Redémontrer que $\Gamma(n+1) = n!$.

Question. Calculer $\Gamma(1/2)$.

Question. Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne.

Développements

Développements proposés :

- Nombres de Bell (nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$), dans *Oraux X-ENS algèbre* 1
- Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible, dans *Gourdon*

Autres développements possibles :

- Prolongement de la fonction Γ, dans *Zuily-Queffélec* et *Objectif Agrégation*
- Problème de la ruine du joueur

Idées pour le plan

Résultats généraux sur les suites et séries de fonctions

- *Limites et continuité* dans *Pommelet* le théorème de prolongement de la convergence uniforme de fonctions continues sur A à $\bar{A}$, puis dans le chapitre interversion de limites, le cas de la convergence simple (avec les contre-exemples qui sont écrits), le cas de la limite uniforme de fonctions continues, le théorème d'interversion des limites, des contre-exemples dans *Hauchecorne*.
- *Limites et dérivation* dans *Pommelet* la dérivation terme à terme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le contre-exemple qui est donné, et d'autres contre-exemples dans *Hauchecorne*. Dans *Gourdon* le théorème pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, on peut parler du théorème de Weierstrass et dans *Objectif Agrégation* la limite uniforme de fonctions holomorphes. Dans *Gourdon* le lemme de Schwartz pour l'interversion des dérivées des fonctions $\mathcal{C}^2$ de plusieurs variables. Un contre-exemple dans *Hauchecorne*.

Les limites et l'intégration

- *L'intégrale de Riemann* dans *Pommelet* la construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.
- *Le théorème de Beppo-Levi et ses conséquences* dans *Briane-Pagès* le théorème de Beppo-Levi, le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée. Des exemples.

- *Intégrales dépendant d'un paramètre* dans *Zuily-Queffélec* les théorèmes de continuité, de dérivation et d'holomorphie sous le signe intégrale. Des contre-exemples dans *Hauchecorne* et et l'exemple de la fonction Γ dans *Zuily-Queffélec* et *Objectif agrégation.*
- *Intégrales doubles* dans *Pommelet* le théorème de Fubini, un contre-exemple dans *Hauchecorne* et des exemples avec la convolution et dans *Zuily-Queffélec* l'inversion de Fourier.

Les limites et les séries

- *Conséquences directes des théorèmes de continuité et dérivabilité des limites* dans *Pommelet* les théorèmes de continuité et dérivabilité des suites et séries de fonctions, reliés au premier paragraphe en explicitant la suite des sommes partielles. L'application aux séries entières en remarque parce qu'il y a convergence uniforme à l'intérieur du disque de convergence et en application des comportements au bord du disque de convergence, le théorème d'Abel Angulaire et le théorème taubérien faible (développement). Des contre-exemples dans *Hauchecorne.*
- *Séries doubles* dans *Gourdon* les théorèmes sur les séries doubles et un contre-exemple dans *Hauchecorne.* L'application aux nombres de Bell dans *Oraux X-ENS algèbre* 1 (développement).

Références

- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*
- Gourdon, *Analyse*
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1
- Pommelet, *Cours d'analyse*
- Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*
- Objectif Agrégation
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

Chapitre 74

249-Suites de variables de Bernoulli indépendantes

Remarques et questions

Question. Comment construire une variable aléatoire de loi $B(1,p)$ avec $p \neq \frac{1}{2}$ à partir de $B(1, \frac{1}{2}$?

Question. Comment construire $\mathcal{E}(\lambda)$ à partir d'une loi uniforme ?

Réponse. La fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F_\lambda(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

on prend la fonction inverse

$$\begin{aligned} G_\lambda(t) &= \inf(x|F_\lambda(x) \geq t) \\ &= \inf(x|1 - e^{-\lambda x} \geq t) \\ &= \int (x|e^{-\lambda x} \leq 1 - t) \\ &= \inf(x|x \geq -\frac{1}{\lambda}\log(1-t)) \\ &= -\frac{1}{\lambda}\log(1-t) \end{aligned}$$

on résout $F_\lambda(t) = x$ et on trouve t, donc

$$-\frac{1}{\lambda}\log(1-u) \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

où $u \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.

Question. Soit $X_j \sim \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1} \sim 2\mathcal{B}(1, \frac{1}{2}) - 1$ indépendantes. Pour tout n, on pose

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} X_i = Y_{n-1} + 2^{-n} X_n$$

Quelle est la loi de cette variable aléatoire ? Montrer que Y_n converge presque sûrement et dans L^2 vers une certaine variable aléatoire.

Réponse. On a :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1} \\ &= \frac{X_1}{2} \\ Y_2 &= Y_1 + \frac{1}{4}X_2 \\ &= \frac{1}{4}(\delta_{\frac{-3}{4}} + \delta_{\frac{-1}{4}} + \delta_{\frac{1}{4}} + \delta_{\frac{3}{4}}) \end{aligned}$$

Y_n sera alors la loi uniforme sur les diadiques d'ordre n.

$$|Y_{n+1} - Yn \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k}|x_k| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$$

La convergence dominée et la convergence presque sûre entraînent la convergence L^2. Y_n est de Cauchy et donc converge presque sûrement. On peut donc appliquer la convergence dominée sur L^2 (Y_n est majorée par 1).

Question. Montrer que $\frac{\sin(t)}{t} = \prod_{j=1}^{\infty} \cos(\frac{t}{2^j})$.

Question. C'est une application du théorème de Levy avec l'exercice précédent.

Question. Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ et P la probabilité donnée par la loi d'une suite de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$, Q celle donnée par la loi d'une suite de Bernouilli de paramètre $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que P et Q sont étrangères.

Réponse. Soit $\omega \in \Omega, \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$, $X(\omega) = \omega_i$. Soit P telle que $\forall i, P(X_i(\omega) = 1) = \frac{1}{2}$ et Q telle que $\forall i, Q(X_i(\omega) = 0) = p) = p$. Alors

$$P(\{\omega | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\}) = 1$$

et

$$Q(\{\omega | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p\}) = 1$$

donc

$$Q(\{\omega | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\}) = 1$$

Développements

Développements proposés :
- Théorème central limite, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème des évènements rares de Poisson, dans *Ouvrard* 2

Autres développements possibles :
- Estimation des grands écarts, dans *Lesigne*
- Ruine du joueur, dans *Ouvrard* 2
- Théorème de Polya, dans *Promenade aléatoire, Benaïm- El Karoui*
- Loi du log itéré

Idées pour le plan

Construction de suites de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes

- *Indépendance* dans *Ouvrard* 1 la définition de l'indépendance, d'évènements et de variables aléatoires. Des exemples.
- *Définitions* dans *Ouvrard,* 2 la définition des lois de Bernouilli, ça modélise un tirage à pile ou face.
- *Construction d'une suite finie* dans *Ouvrard* 2 le problème du joueur qui lance une pièce n fois et le fait qu'on obtient une suite finie de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
- *Construction d'une suite infinie* dans *Ouvrard* 2 le but qui consiste à construire une suite infinie de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, on fait le lien avec le paragraphe d'avant en disant que la généralisation n'est pas évidente, puis on définit les développements diadiques des réels, on fait la remarque qu'ils ne sont pas uniques et on donne la convention pour avoir l'unicité, on dit que le développement diadique fait une suite de variables aléatoires indépendantes, le le corollaire et une remarque sur sa démonstration, ensuite les compléments sur la modélisation du jeu de pile ou face au moyen d'un espace de suites.

Construction de variables aléatoires à partir de variables aléatoires de Bernoulli

- *Des variables aléatoires discrètes* dans *Ouvrard* 1 la définition de la loi binomiale puis la remarque sur la loi géométrique. À la fin de *Ouvrard* 1 l'approximation de Poisson (et le théorème de Poisson) puis le théorème des évènements rares de Poisson (développement) dans *Ouvrard* 2. Dans les exercices de *Ouvrard* 1 des exemples d'utilisation.
- *Le cas de la gaussienne* dans *Ouvrard* 1 le théorème central limite (développement) l'approximation de la loi binômiale par la gaussienne, le corollaire, le théorème de Moivre-Laplace, un exemple numérique (donné) et l'application aux sondages dans les exercices.

Applications

- *En statistiques* dans *Ouvrard* 1 la définition de la convergence en probabilité, la loi faible des grands nombres puis le théorème de Bernouilli.
- *En théorie des martingales* dans *Ouvrard* 2 on expose le problème de la ruine du joueur et on explique un peu la résolution et les résultats.
- *En chaînes de Markov* dans *Barbe-Ledoux* on donne la définition d'une chaîne de Markov puis on donne des exemples de marches aléatoires avec des lois de Bernoulli.
- *OPTIONNEL- Estimation des grands écarts* dans *Lesigne* ce qui est à propos des estimations des grands écarts.

Références

- Ouvrard, *Probabilité* 1
- Ouvrard, *Probabilités* 2
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Barbe-Ledoux, *Probabilité*
- Lesigne, *Pile ou face*

Chapitre 75

250- Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications

Remarques et questions

Question. Quelle est la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(n, \sigma^2)$?

Réponse. On sait que $\phi_{\mathcal{N}(\prime,\infty)} = e^{-\frac{t}{2}}$. On a, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\phi_X &= \phi\sigma N + m \\
&= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \mathbb{R}\left(e^{it(\sigma N + m)}\right) \\
&= e^{itm}\mathbb{R}\left(e^{it\sigma N}\right) \\
&= e^{itm}\phi_N(t\sigma) \\
&= e^{itm}e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Remarque. On peut énoncer la loi faible dans le cas où les variables aléatoires sont seulement indépendantes deux à deux.

Remarque. Il n'est pas utile de remettre dans la leçon les propriétés des différentes convergences. Mais il faut les connaître.

Remarque. Il faut aussi citer la loi forte des grands nombres.

Remarque. Il peut être intéressant de parler de statistiques et d'intervalles de confiance.

Remarque. On peut aussi parler d'approximation de lois (c'est à la fin de *Ouvrard* 1).

Remarque. Dans un cadre non identiquement distribué, le théorème central limite est le théorème de Lindeberg-Levy.

Remarque. On peut aussi parler du test du χ-deux.

Développements

Développements proposés :
- Théorème central limite, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème de Bernstein (polynômes), dans *Zuily-Queffélec*

Autres développements possibles :
- Estimation des grands écarts, dans *Lesigne*
- Equidistribution dans un compact, dans *Zuily-Queffélec*

Idées pour le plan

Loi des grands nombres

- *Loi faible des grands nombres* dans *Ouvrard* 2 l'inégalité de Tchebytchev, le théorème de Bernoulli, la loi faible des grands nombres, puis en application le théorème de Bernstein (développement) dans *Zuily-Queffélec*, ensuite le théorème de Khintchine.
- *Loi forte des grands nombres* dans *Ouvrard* 2 la loi forte des grands nombres, un exemple dans *Barbe-Ledoux*, un exemple de variable aléatoire qui suit la loi faible des grands nombres sans suivre la loi forte, le théorème de Kolmogorv-Khintchine et les applications, notamment en statistiques en mettant les définitions des échantillons, des fonctions de répartition empirique, théorème de Glivenko-Cantelli et dans *Rivoirard* la construction d'estimateurs par la méthode des moments. On a encore l'application à la méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales dans *Ouvrard* 2 et on précise qu'en pratique, cette méthode n'est efficace qu'en grande dimension (par contre, elle est alors très efficace). Et dans *Zuily-Queffélec* on parle de nombres normaux et du théorème qui va avec.

Théorème central limite

- *Énoncé* dans *Zuily-Queffélec* la définition de la convergence en loi et quelques conditions équivalentes, le théorème de Levy, les comparaisons des différents modes de convergence puis le lemme du théorème central limite et le théorème central limite (développement), des exemples d'utilisation (avec des lois binomiales par exemple) dans *Barbe-Ledoux* et les commentaires. On donne aussi le théorème central limite poissonnier.
- *Applications* dans *Ouvrard* 2 le théorème des évènements rares de Poisson (c'est une conséquence de Levy), puis le théorème de Karl-Peardon et l'application au test du χ-deux. Des exemples qui suivent. Dans *Rivoirard* la définition d'un intervalle de confiance, des méthodes de construction d'estimateurs du maximum de vraisemblance et un exemple.

Références

- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Ouvrard 2, *Probabilités*
- Barbe-Ledoux, *Statistiques en action*
- Rivoirard, *Statistiques en action*

Chapitre 76

251- Indépendance d'évènements et de variables aléatoires. Exemples

Remarques et questions

Question. Quel lien y-a-t-il entre la notion d'indépendance de deux tribus et la notion d'indépendance d'une famille de variables aléatoires réelles ?

Réponse. Il y a un lien ! Pour chaque variable aléatoire, on prend la tribu engendrée, les variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si les tribus sont indépendantes.

Question. Soit (X, Y) un vecteur gaussien tel que Y a une variance non nulle. Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$ et la loi conditionnelle de $(X|Y)$ (loi conditionnelle de X sachant Y).

Réponse. On suppose que $\mathbb{E}(X|Y) = (m_1, m_2)$. Comme (X, Y) est gaussien, il a une densité qu'on connait. Donc $(X|Y)$ est à densité donnée par $\frac{(X,Y)}{\text{marginale de } X}$. Ici on peut faire mieux. Si des variables aléatoires gaussiennes sont indépendantes, elles ont une covariance nulle. On va écrire X sous la forme d'une somme de variables aléatoires :

$$X = Z + \beta Y$$

avec Z et Y qui sont indépendantes. On peut alors calculer la covariance de Z et Y :

$$\begin{aligned} Cov(Z, Y) &= cov\,(X - \beta Y, Y) \\ &= \mathbb{E}\left[((X - \beta Y) - \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y)\right] \end{aligned}$$

on prend $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ et alors

$$\begin{aligned} cov(Z, Y) &= \mathbb{E}\left((X - \beta Y)Y\right) \\ &= \mathbb{E}(YX) - \beta \mathbb{E}(Y^2) \\ \beta &= \frac{\mathbb{E}(XY)}{Var(Y)} \end{aligned}$$

et donc on a bien Y et Z indépendantes car $cov(Y, Z) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Y) &= \mathbb{E}(Z|Y) + \beta \mathbb{E}(Y|Y) \\ &= \mathbb{E}(Z) + \beta Y \\ &= \beta Y \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $(X|Y)$ est une gaussienne de variance de qu'on a montré. (Z est bien une variable gaussienne).

Développements

Développements proposés :

- Théorème de Bernstein pour les polynômes, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème central limite, dans *Zuily-Queffélec*

Autres développements possibles :

- L'indépendance d'évènements n'est pas toujours intuitive, dans *Ouvrard* 2*, exercice* 9.6
- Théorème des évènements rares de Poisson, dans *Ouvrard* 2*, page* 311
- Nombres normaux, dans *Zuily-Queffélec*
- Loi de Poisson et indépendance, dans un exercice appelé indépendance de *Cotrell*

Idées pour le plan

Généralités

- *Définitions et exemples* dans *Barbe-Ledoux* la définition de l'indépendance de deux évènements, l'exemple du jet de dés, la définition d'une famille d'évènements indépendants, d'une famille de tribus indépendantes, un ou deux exemples, la définition d'une famille de variables aléatoires indépendantes et des exemples ;
- *Critères d'indépendances* dans *Barbe-Ledoux* les critères d'indépendances avec la loi du vecteur aléatoire qui doit être égal au produit des marginales, un exemple, la caractérisation avec les fonctions boréliennes et celle avec les fonctions caracéristiques, dans *Ouvrard* 2 l'exercice sur le fait que l'indépendance de deux variables aléatoires n'est pas toujours intuitive.
- *Indépendance et corrélation* dans *Barbe-Ledoux* la définition de deux variables aléatoires non corrélées, le fait que deux variables aléatoires de carré intégrable et indépendantes sont non corrélées, les exemples qui suivent.

Vecteurs gaussiens et sommes de variables aléatoires

- *Somme de variables aléatoires indépendantes* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la somme de variables aléatoires indépendantes, leur loi, leur fonction caractéristique, des exemples (avec la loi de Poisson aussi).
- *Vecteurs gaussiens* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la loi gaussienne, la définition d'un vecteur gaussien, la caractérisation des vecteurs gaussiens en voyant que leur matrice de covariance est diagonale, dans *Ouvrard* 2 un exemple de deux variables aléatoires gaussiennes non corrélées et pourtant dépendantes (ce n'est pas un vecteur gaussien) page 247. Dans les exercices de *Ouvrard* 2 page 270 des caractérisations des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes, le théorème de Bernstein pour les variables aléatoires

gaussiennes.

Suites de variables aléatoires, comportements asymptotiques

- *Théorème de Poisson* dans *Zuily-Queffélec* on donne le théorème de Levy puis dans *Ouvrard* 2 le théorème de Poisson et la généralisation au théorème des évènements rares de Poisson.
- *Loi des grands nombres* dans *Barbe-Ledoux* l'inégalité de Markov et l'inégalité de Tchebitchev, la loi faible des grands nombres et dans *Zuily-Queffélec* l'application au théorème de Bernstein (développement).
- *Loi du* $\{0,1\}$ *de Kolmogorov et lemme de Borel Cantelli* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la tribu asymptotique, la loi du $0-1$, des exemples puis le lemme de Borel-Cantelli et des exemples. Dans *Barbe-Ledoux* la loi forte des grands nombres.
- *théorème central limite* dans *Barbe-Ledoux* le théorème central limite (développement) puis des exemples. Dans *Rivoirard* on peut parler d'applications aux intervalles de confiance.

Références

- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Ouvrard, *Probabilités* 1
- Ouvrard, *Probabilités* 2
- Barbe-Ledoux, *Probabilité*
- Rivoirard, *Statistiques en action*

Chapitre 77

252- Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications

Remarques et questions

Question. À propos de la caractérisation d'un processus de Poisson, est-ce que ce théorème sert en pratique ? Comment fait-on si on a $f \neq O$ telle que $f(t+h) = f(t)f(h)$ pour montrer que $f = exp$?

Réponse. On a $f(0) = f^2(0)$ donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle. On suppose donc $f(0) = 1$. Comme on a $f(t) = f(\frac{t}{2})^2$ alors f est positive. puis on passe au logarithme.

Question. Rappeler la loi du $\{0, 1\}$ de Kolmogorov.

Réponse. Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose $A_n = \sigma(X_p|p \geq n)$ et A_∞ la tribu asymptotique associée. On a alors :

$$\forall A \in A_\infty, P(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Remarque. Soit un processus de Poisson de paramète λ et un autre de paramètre μ. Leur somme est un processus de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Remarque. On peut parler de produit de convolution de mesures. On a

$$\begin{aligned}
\mu_1 \star \mu_2(A) &= \int \mu_1(A-x)\mu_2(\mathrm{dx}) \\
&= \int\int \mathbb{1}_A(x+y)\mu_1(\mathrm{dx})\mu_2(\mathrm{dy}) \\
&= \mu_2 \star \mu_1(A).
\end{aligned}$$

Dans le cas discret, on a si μ_1 et μ_2 sont discrètes à support entier :

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_k\delta_k \\
\mu_2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} q_k\delta_k \\
l \in \mathbb{N}, \mu_1 \star \mu_2(l) &= \sum_{k=0}^{l} p_k q_{l-k} \\
&= r_l \\
\mu_1 \star \mu_2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k_k\delta_k.
\end{aligned}$$

Si $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ et $q_k = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$ alors $r_k = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$.

Question. Comment montrer que la loi binomiale négative est une somme de lois géométriques indépendantes ?

Réponse. On peut le faire par récurrence, mais le plus simple est de calculer sa fonction caractéristique. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^{r+1}} &= \sum_{k\geq r} \frac{k!}{(k-r)!r!} x^{k-r} \\
&= \sum_{k\geq r-1} \binom{k}{r-1} x^{k-r+1} \\
&= \sum_{l\geq r} \binom{l-1}{n-1} x^{l-r}
\end{aligned}$$

ce qui définit bien une proba car $\sum\limits_{k\geq n} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = 1$. On peut calculer sa fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{k\geq n} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} e^{itk} \\
&= \sum_{k\geq n} \binom{k-1}{n-1} p^n \left((1-p)\, e^{it}\right)^{k-n} e^{itn} \\
&= \left(e^{it} p\right)^n \sum_{k\geq n} \binom{k-1}{n-1} \left((1-p)\, e^{it}\right)^{k-n} \\
&= \left(e^{it} p\right)^n \left(\frac{1}{1-\left(e^{it}\,(1-p)\right)^n}\right),
\end{aligned}$$

où l'on reconnaît la fonction caractéristique de la loi géométrique.

Développements

Développements proposés :
- Théorème de Bernstein par les polynômes, dans *Zuily-Queffélec*
- Théorème des évènements rares de Poisson, dans *Ouvrard* 2

Autres développements possibles :
- Grandes déviations
- Caractérisation d'un processus de Poisson

Idées pour le plan

Loi binomiale

- *Définitions et premières propriétés* dans *Ouvrard* 1 la définition d'une loi de Bernoulli, de la loi binomiale, on donne leur intérprétation (c'est dans un tableau à la fin du livre), on donne l'espérance et la variance de la loi binômiale et la proposition pour la convolution des binomiales. Dans *Barbe-Ledoux* on donne la fonction de répartition des binomiales et la fonction caractéristique, un exemple de tirage de pile ou face.
- *Théorèmes limites* dans *Ouvrard* 1 la définition de la convergence en probabilité et la loi faible des grands nombres avec son application aux lois de Bernoulli. En application, dans *Zuily-Queffélec* le théorème de Bernstein pour les polynômes (développement) et ensuite le théorème central limite avec une application dans *Ouvrard* 2.
- *OPTIONNEL - Un exemple d'application aux chaînes de Markov : urne d'Ehrenfest* dans *Cotrell* les résultats sur l'urne d'Ehrenfest.

Exemples de lois qui découlent de la loi binomiale

- *La loi multinomiale* dans *Barbe-Ledoux* (à la fin) la définition de la loi multinomiale, son espérance, sa covariance, sa variance, sa fonction caractéristique, un exemple de problème que cela modélise. Dans *Ouvrard* 2 le théorème de Karl-Pearson et l'application au test du χ-deux.
- *La loi binomiale négative* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la loi binomiale négative, son espérance, sa variance et sa fonction caractéristique ainsi que son interprétation.
- *La loi hypergéométrique* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la loi hypergéométrique, son espérance, sa variance et l'interprétation ainsi que le théorème qui suit.

Loi de Poisson

- *Définitions et premières propriétés* dans *Barbe-Ledoux* la définition de la loi de Poisson, son espérance, sa variance, la stabilité par convolution et le théorème qui suit. Dans *Ouvrard* 1 (le tableau récapitulatif à la fin) l'interprétation de la loi de Poisson.
- *Lien avec la loi binomiale : évènements rares* dans *Ouvrard* 2 le théorème des évènemens rares de Poisson (développement) et la façon dont on retrouve le théorème de Poisson.
- *Lois de Poisson composées* dans *Cotrell* ce qui a trait aux lois de Poisson composées.

Références

- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Ouvrard, *Probabilités* 1
- Ouvrard, *Probabilités* 2

– Barbe-Ledoux, *Probabilité*
– Cotrell, *Exercices de probabilités*

Chapitre 78

253- Utilisation de la notion de convexité en analyse

Remarques et questions

Question. Montrer que la fonction Γ est log-convexe.

Réponse. On a
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{dt}, x > 0$$
donc
$$\log(\Gamma(x)) = \log\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{dt}\right)$$
On admet que c'est deux fois dérivable sous l'intégrale, comme on sait montrer que Γ est holomorphe, ce n'est pas très grave. On peut dériver deux fois sous l'intégrale :
$$\begin{aligned}
\log\left(\Gamma(x)\right)' &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\
\log\left(\Gamma(x)\right)'' &= \frac{-\Gamma'(x)^2 + \Gamma(x)\Gamma''(x)}{\left(\Gamma(x)\right)^2} \\
\Gamma'(x) &= \int_0^\infty e^{-t}\log(t)e^{(x-1)\log(t)}\mathrm{dt} \\
\Gamma''(x) &= \int_0^\infty e^{-t}\left(\log(t)\right)^2 e^{(x-1)\log(t)}\mathrm{dt}
\end{aligned}$$
donc :
$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'(x)^2 = &\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{dt}\int_0^\infty e^{-t}\left(\log(t)\right)^2 t^{x-1}\mathrm{dt} \\
&- \left(e^{-t}\log(t)t^{x-1}\mathrm{dt}\right)^2
\end{aligned}$$
on peut appliquer Cauchy-Schwartz.

Question. Donner l'inégalité de Jensen version intégrable.

Question. Pour une fonction strictement convexe, montrer que le minimum est unique.

Question. Trouver une autre application à l'unicité du miminum d'une fonction strictement convexe.

Développements

Développements proposés :

– Ellipsoïde de John-Loewner, dans *oraux X-ENS algèbre* 3

– Théorème de Hahn-Banach géométrique, dans *Tauvel, géométrie*

Autre développement possible :

– Une utilisation de la notion de convexité dans la résolution de deux équations différentielles

Idées pour le plan

Définitions et premières propriétés

– *Définition et exemple* dans *Tauvel, géométrie* la définition d'une combinaison convexe de points, d'un ensemble convexe, des propriétés. Dans *Objectif Agrégation* la définition d'une fonction convexe.
– *Enveloppe convexe* dans *Tauvel* la définition de l'enveloppe convexe, le théorème de Carathéodory et l'application.
– *Théorème de séparation* dans *Tauvel* le théorème de Hahn-Banach géométrique (développement).

Inégalités

– *Quelques inégalités classiques* dans *Rombaldi* le paragraphe sur les inégalités classiques de l'exponentielle, du logarithme, du sinus, l'inégalité de Jensen et l'inégalité arithmético-géométrique. Dans *Briane-Pagès* l'inégalité de Jensen.
– *Espaces L^p* dans *Briane-Pagès* ou *Brezis* les inégalités d'Young, Hölder et Minkowski, en application le fait que les espaces L^p sont des espaces vectoriels normés.
– *Inégalité de Kantorovich* dans *Ramis-Warusfel* l'inégalité de Kantorovich (Attention ! Il manque un carré dans le livre !) et en application la méthode du gradient à pas optimal.

Optimisation

– *Fonctions convexes et extremums* dans *Rouvière* le théorème qui dit que si une fonction convexe est différentiable sur un convexe, elle admet un minimum global en le point où sa différentielle s'annule (si il existe). Das *Objectif Agrégation* le fait qu'une fonction convexe admet au plus un minimum. En application l'inégalité de log convexité pour le déterminant et l'ellipsoïde de John-Loewner (développement) dans *Oraux X-ENS algèbre* 3.
– *Théorème de projection* dans *Objectif Agrégation* le théorème de projection sur un convexe fermé, en applicatin le théorème de projection sur un sous-espace fermé et en application le théorème de Stampacchia.
– *Méthode de Newton* dans *Rouvière* la méthode de Newton.

Autres applications

– *Théorèmes des point fixe* dans *Rouvière* ce qu'il y a sur les théorèmes de point fixe : le théorème du point fixe de Picard, les contre-exemples, le fait que ça marche aussi avec un itérée de f,et éventuellement le théorème de

Brouwer en dimension 2.
– *Étude qualitative de solutions d'équations différentielles* dans *Gourdon* le cas convexe de l'équation de Hill-Matthieu.

Références

– Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 3
– Tauvel, *Géométrie*
– Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
– Objectif Agrégation
– Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
– Gourdon, *Analyse*
– Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées, volume* 1
– Brezis, *Analyse fonctionnelle*
– Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*

Chapitre 79

254- Espace de Schwartz et distributions tempérées

Remarques et questions

Remarque. Le cadre de l'espace de Schwartz est très approprié pour l'étude de la transformée de Fourier. Sur L^1, la transformée de fourier n'est pas sujective dans l'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 à l'infini.
$S(\mathbb{R}^n)$ est dense dans tous les L^p. L'injection est continue.
Les distributions sont là pour élargir le cadre des fonctions. On peut dériver, d'où l'utilité pour les équations différentielles. On trouve d'abord des solutions au sens des distributions puis on démontre que les objets trouvés sont des fonctions classiques.
L'inconvénient des distributions tempérées est qu'elles ne peuvent être définies sur un ouvert Ω. Elles sont toujours définies sur $\mathbb{R}^n$.
Faire attention à la convolution : on ne peut pas convoler toutes les distributions entre elles.
Il faut parler de l'ordre d'une distribution et de la formule des sauts.

Remarque. À propos de la formule de Poisson, on peut la faire sur Schwartz, mais on peut aussi la faire dans S'. En effet, si on pose

$$T_n = \sum_{|n| \leq N} \delta_n \in S'(\mathbb{R}^d)$$

on montre que $T_n \longrightarrow T$. On veut déterminer T.
Si $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle T_n, \phi \rangle &= \sum_{|n| \leq N} \phi(n) \\ &\underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n) \end{aligned}$$

et comme $\phi \in S$, cette série existe ($n^2 \phi(n)$ est une suite bornée par exemple). Donc :

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n).$$

Pour montrer que T est une distribution, on a besoin de montrer que c'est une forme linéaire continue. On a facimement la linéarité, il reste à envisager la continuité :

$$\begin{aligned}
|\langle T, \phi\rangle| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n)\right| \\
&= \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \frac{\phi(n)}{n^2}\right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} \|\phi\|_{2,0} \\
&\leq C\|\phi\|_{2,0}
\end{aligned}$$

donc T est bien continue. On note $T = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. On cherche alors $\hat{T}$.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{T}, \phi\rangle &= \langle T, \hat{\phi}\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi\phi(2\pi n) \\
&= 2\pi\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

avec une bonne normalisation, on aurait $T = \hat{T}$. Ici, on a $\hat{T} = 2\pi \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.

Question. Quelle est la dérivée de $\mathbb{1}_{[a,b]}$?

Réponse. Soit $\phi \in S$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{1}'_{[a,b]}, \phi\rangle &= -\int_a^b \phi'(x)\mathrm{dx} \\
&= \phi(a) - \phi(b) \\
&= \langle \delta_a - \delta_b, \phi\rangle,
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{1}'_{[a,b]} = \delta_a - \delta_b$.
Plus généralement, on a la formule des sauts : si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, avec des sauts $a_1, \cdots, a_n$ on a

$$f' = \{f\}' + \sum_{i=1}^{N} \left(f(a_n)^- - f(a_n)^+\right)\delta_{a_n}$$

Question. Soit $\epsilon > 0$. On considère $T_\epsilon = \frac{1}{x+i\epsilon}$. On cherche la limite de T_ϵ quand $\epsilon \longrightarrow 0$.

Réponse. Pour tout $\epsilon > 0$, T_ϵ est $\mathcal{C}^\infty$ et à croissance lente, donc T_ϵ est bien dans S'.

$$\begin{aligned} T_\epsilon &= \frac{1}{x+i\epsilon} + \frac{x-i\epsilon}{x-i\epsilon} \\ &= \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \\ &= \frac{x}{x^2+\epsilon^2} - i\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \end{aligned}$$

Soit $g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}$, alors $\int_{\mathbb{R}} g(x) = 1$ et on pose :

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon})$$

qui est une approximation de l'unité. Alors $\lim\limits_{\epsilon\to 0} g_\epsilon = \delta_0$ donc dans S' on a $\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \longrightarrow \pi\delta_0$.
Pour $\phi \in S$ on a

$$\begin{aligned} \langle \frac{x}{x^2+\epsilon^2}, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\phi(x)\mathrm{dx} \\ &= \int_0^\infty \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\phi(x)\mathrm{dx} + \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\phi(x)\mathrm{dx} \\ &= \int_0^\infty \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\phi(x)\mathrm{dx} + \int_0^\infty \frac{-x}{x^2+\epsilon^2}\phi(-x)\mathrm{dx} \\ &= \int_0^\infty \frac{x}{x^2+\epsilon^2}[\phi(x) - \phi(-x)]\mathrm{dx} \end{aligned}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} \langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \phi\rangle &= \lim_{\eta\to 0}\int_{|x|>\eta} \frac{\phi(x)}{x}\mathrm{dx} \\ &= \int_0^\infty \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\mathrm{dx} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \frac{x}{x^2+\epsilon^2} - vp\left(\frac{1}{x}\right), \phi\rangle &= \int_0^\infty \frac{-\epsilon^2(\phi(x)-\phi(-x))}{x(x^2+\epsilon^2}\mathrm{dx} \\ &= \int_0^\infty -\frac{\epsilon^2}{x^2+\epsilon^2}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\mathrm{dx} \end{aligned}$$

on coupe la dernière intégrale jusqu'à un δ petit et on trouve que tout tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Donc $T_\epsilon \longrightarrow vp\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_0$.

Développements

Développements proposés :
– Inversion de Fourier dans S et S', dans *Zuily*
– Formule sommatoire de Poisson, dans *Zuily-Queffélec*
Autres développements possibles :
– Solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$ dans *Choquet-Bruhat*

Idées pour le plan

Espace de Schwartz

– *L'espace de Schwartz* dans *Zuily* et*Bony* la définition de S, les exemples de fonctions de S, dans *Bony* le fait que S est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes, dans *Zuily* la définition des semi-normes et les propriétés qui suivent.
– *La transformée de Fourier sur S* dans *Zuily* la définition de la transformée de Fourier dans S, le lemme (calcul) qui sert pour la formule d'inversion de Fourier et la formule d'inversion de Fourier (première partie du premier développement) et la remaque qui suit. Ensuite, dans *Zuily* la liste des propriétés de la transformation de Fourier puis dans *Zuily-Queffélec* et *Briane-Pagès* la formule sommatoire de Poisson (deuxième développement).

Espace des distributions tempérées

– *L'espace S'* dans *Zuily* la définition de S', des exemples qui suivent, un exemple de fonction qui n'est pas dans S', la définition de la convergence des suites dans S',
– *Opérations sur S'* dans *Zuily* la définition d'une distribution d'ordre k, la définition de la valeur principale (elle est dans S) et le fait qu'elle est d'ordre exactement 1, exemple d'une distribution d'ordre infini, définition du support d'une distribution et la définition de l'espace des distributions à support compact, des exemples, la multiplication d'une distribution tempérée par une fonction qui ne croit pas trop vite, la dérivation d'une distribution (mettre en exemple la valeur principale) et la formule des sauts, la définition du produit tensoriel de distributions, la convolution de distributions.
– *La transformée de Fourier sur S'* dans *Zuily* la définition de la transformée de Fourier sur S', c'est une application linéaire, bijective et bicontinue sur S' (deuxième partie du premier développement). On donne ensuite des propriétés de la transformée de Fourier dans S', des exemples (il y en a dans *Bony* aussi), la transformée de Fourier d'une convolution, la transformée de Fourier de la valeur principale. La transformée de Fourier et la convolution.

Applications

- *La transformée de Fourier dans L^1 et L^2* dans *Zuily* la définition de la transformée de Fourier dans L^1 et L^2 et comment c'est une conséquence de la théorie sur S'.
- *Recherche de solutions élémentaires d'équations* dans *Zuily* la définition d'une solution élémentaire, puis le théorème d'existence de solutions à un opérateur différentiel à partir du moment où il y a une solution élémentaire et dans *Choquet-Bruhat* l'exemple de la solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^3$. On peut rajouter, dans *Bony* l'équation de Poisson, et un exemple qui suit.

Références

- Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
- Bony, *Cours d'analyse*
- Choquet-Bruhat, *Distributions, théorie et problèmes*
- Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
- Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*

Chapitre 80

255- Dérivation au sens des distributions. Exemples et applications

Remarques et questions

Question. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\Delta f = \phi, \phi \in \mathcal{C}_c^\infty$$

Donner une expression de f.

Réponse. On sait que $g(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|_2}$ vérifie $\Delta g = \delta_0$. On va convoler g et ϕ, on a alors

$$\begin{aligned}\Delta(g \star \phi) &= (\Delta g) \star \phi \\ &= \delta_0 \star \phi \\ &= \phi.\end{aligned}$$

Pour trouver les autres solutions, on n'a plus qu'à rajouter les fonctions harmoniques.

Question. Une distribution T est positive si $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty, \phi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \phi\rangle \geq 0$. Montrer qu'une distribution positive est d'ordre 0.

Réponse. Comme T est linéaire, T est croissante. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ et on suppose $supp(\phi) \subset K$. Alors $\exists \chi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\chi = 1$ sur K et $\chi \geq 0$. Alors

$$-\|\phi\|_\infty \chi \leq \phi \leq \|\phi\|_\infty \chi$$

soit encore

$$-\|\phi\|_\infty \langle T, \chi\rangle \leq \langle T, \phi\rangle \leq \|\phi\|_\infty \langle T, \chi\rangle$$

donc T est d'ordre 0. C'est une mesure de radon.

Question. Posons $T(\phi) = \int_0^\pi \phi'(x)\cos(x)\mathrm{dx}$. Est-ce qu'il s'agit d'une distribution sur $\mathbb{R}$ et si oui, lui donner une expression sur $\mathbb{R}$.

Réponse. Soit $g : x \longmapsto \mathbb{1}_{[0,\pi]}\cos(x) \in L^1_{loc}$. Montrons que $T(\phi) = -T'(g)$.
Soit $\Pi(x) = -g'(x)$, alors $\Pi(x) = \sin(x) - \delta_0(x) + \delta_\pi(x)$. On montre que c'est une distribution sur $\mathbb{R}$. Elle sera d'ordre 0. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{R}$ tel que $supp(\phi) \subset K$, alors

$$\left|\int_0^\pi \phi'(x)\cos(x)\mathrm{dx}\right| \leq \|\phi'\|_\infty \pi$$

ce qui prouve que c'est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1. Et en fait, elle est d'ordre 0.

Question. Montrer que H^m muni de $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=0}^{m} \langle f^{(k)}, g^{(k)}\rangle_{L^2}$ est un Hilbert séparable.

Réponse. Il s'agit bien d'un produit scalaire. Montrons que cet espace est complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans H^m, ainsi $(f_n^{(k)}$ est de Cauchy pour $k \leq m$. Comme L^2 est complet on a

$$\forall k \leq m, f_n^{(k)} \xrightarrow{L^2} g_k$$

donc

$$\forall k \leq m, f_n^{(k)} \xrightarrow{D'} g_k.$$

Or, dans D' on peut dériver les convergences, donc

$$\forall k \leq m, f_n^{(k)} \xrightarrow{D'} g_0^{(k)}.$$

Ainsi,

$$f_n \xrightarrow{H^m} g_0.$$

Question. Soit une équation différentielle d'ordre n donc l'inconnue est une distribution sur $\mathbb{R}$

$$T^{(n)} + a_{n-1}T^{(n-1)} + \cdots + a_O T = 0, a_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

Est-ce que les distributions solution de l'équation différentielle sont les solutions usuelles données par Cauchy-Lipschitz de cette équation différentielle ?

Réponse. Les solutions classiques sont un espace de dimension n. Soit $n \geq 1$. On commence par $n = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
T' + a_0 T &= 0 \\
T' &= -a_0 T \\
\phi \in \mathcal{C}_c^\infty, \langle T', \phi\rangle &= -\langle T, \phi'\rangle \\
\langle -a_0 T, \phi\rangle &= -a_0 \langle T, \phi\rangle \\
\langle T, \phi'\rangle &= a_0 \langle T, \phi\rangle \\
\langle T, \phi' - a_0 \phi\langle &= 0
\end{aligned}$$

et donc on n'a pas de solutions en plus. Pour $n \geq 2$, on procède par récurrence.

Développements

Développements proposés :

– Des choses sur $vp\left(\frac{1}{x}\right)$, dans *Zuily*

– Solutions élémentaires du laplacien, dans *Choquet-Bruhat*

Autres développements possibles :

– Formule d'inversion de Fourier dans S', dans *Zuily*

Idées pour le plan

Définitions, premières propriétés

- *Premières propriétés* dans *Zuily* la définition des distributions, des exemples, la définition de l'ordre d'une distribution, des exemples (une distribution positives est d'ordre 0), la distribution de Dirac, le support d'une distribution, l'espace des distributions à support compact, les multiplications par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. (Si on veut, on peut aussi parler de convergence de suites de distributions mais peut-être que c'est un petit peu hors sujet).
- *Dérivation au sens des distributions* dans *Zuily* la définition de la dérivation des distributions, des exemples dont la valeur principale (développement), la dérivation des intégrales des fonctions L^1_{loc}, de la fonction de Heavyside.
- *Convolution des distributions* dans *Zuily* la définition du produit tensoriel de distributions et de la convolution de distributions. Des exemples.

Application de la dérivation des distribution

- *Formule des sauts* dans *Zuily* la formule des sauts à une variable, des exemples et dans *Bony* la formule des sauts en plusieurs variables.
- *Équations différentielles ordinaires sur les distributions* dans *Zuily* les distributions de dérivée nulle sont les distributions constantes, les distributions solutions d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants sont les solutions données par Cauchy-Lipschitz, dans *Choquet-Bruhat.*
- *Espaces de Sobolev* dans *Zuily* la définition des espaces de Sobolev (pour des exposants entiers), on donne le produit scalaire associé et la norme. Des propriétés (inclusions, c'est un Hilbert, résultats de densité). Éventuellement des choses sur H_0^m et son dual. L'inégalité de Poincaré.

Application aux équations aux dérivées partielles

- *L'espace S' et la transformée de Fourier* dans *Zuily* la définition de S, de S' et de la transformée de Fourier et Fourier inverse dans S'. Les propriétés les plus fondamentales et des exemples de transformées de Fourier.
- *Solution fondamentale* dans *Zuily* la définition d'une solution fondamentale, le théorème d'existence de solutions aux EDP dans le cas d'existence d'une solution fondamentale puis dans *Choquet-Bruhat* la recherche d'une solution fondamentale pour le laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Références

- Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
- Bony, *Cours d'analyse*
- Choquet-Bruhat, *Distributions, théorie et problèmes*

Chapitre 81

256- Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$

Remarques et questions

Question. Quel est le lien entre les transformées de Fourier sur L^1, L^2, S et S' ?
Réponse. On a $L^1 \subset S'$, les deux notions de transformée de Fourier coïncident donc. Montrons que c'est le même objet. Soit $\phi \in S$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}f, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)\phi(x)\mathrm{dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}\phi(x)\mathrm{dx} \\ \forall \phi \in S, \left(\mathcal{F}f - \hat{f}\right)\phi = 0 &\end{aligned}$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier dans L^2. Donc $\mathcal{F}f = \hat{f}$ au sens des distributions.
Remarque. Il faut connaître la preuve de la formule d'inversion de Fourier dans S' (voire dans S aussi) même si on ne la fait pas en développement.

Développements

Développements proposés :
- Inversion de Fourier dans S et S', dans *Zuily*
- Formule sommatoire de Poisson, dans *Zuily-Queffélec*

Autres développements possibles :
- Solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$ dans *Choquet-Bruhat*

Idées pour le plan

On reprend le même plan que dans la leçon 254 en changeant un peu le titre des parties pour appuyer plus sur la transformée de Fourier.
Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz
- *L'espace de Schwartz* dans *Zuily* et*Bony* la définition de S, les exemples de fonctions de S, dans *Bony* le fait que S est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes, dans *Zuily* la définition des semi-normes et les propriétés qui suivent.
- *La transformée de Fourier sur S* dans *Zuily* la définition de la transformée de Fourier dans S, le lemme (calcul) qui sert pour la formule d'inversion de Fourier et la formule d'inversion de Fourier (première partie du premier développement) et la remaque qui suit. Ensuite, dans *Zuily* la liste des propriétés de la transformation de Fourier puis dans *Zuily-Queffélec* et *Briane-Pagès* la formule sommatoire de Poisson (deuxième développement).

Transformée de Fourier dans l'espace des distributions tempérées

– *L'espace S'* dans *Zuily* la définition de S', des exemples qui suivent, un exemple de fonction qui n'est pas dans S', la définition de la convergence des suites dans S',
– *Opérations sur S'* dans *Zuily* la définition d'une distribution d'ordre k, la définition de la valeur principale (elle est dans S) et le fait qu'elle est d'ordre exactement 1, exemple d'une distribution d'ordre infini, définition du support d'une distribution et la définition de l'espace des distributions à support compact, des exemples, la multiplication d'une distribution tempérée par une fonction qui ne croit pas trop vite, la dérivation d'une distribution (mettre en exemple la valeur principale) et la formule des sauts, la définition du produit tensoriel de distributions, la convolution de distributions.
– *La transformée de Fourier sur S'* dans *Zuily* la définition de la transformée de Fourier sur S', c'est une application linéaire, bijective et bicontinue sur S' (deuxième partie du premier développement). On donne ensuite des propriétés de la transformée de Fourier dans S', des exemples (il y en a dans *Bony* aussi), la transformée de Fourier d'une convolution, la transformée de Fourier de la valeur principale. La transformée de Fourier et la convolution.

Applications

– *La transformée de Fourier dans L^1 et L^2* dans *Zuily* la définition de la transformée de Fourier dans L^1 et L^2 et comment c'est une conséquence de la théorie sur S'.
– *Recherche de solutions élémentaires d'équations* dans *Zuily* la définition d'une solution élémentaire, puis le théorème d'existence de solutions à un opérateur différentiel à partir du moment où il y a une solution élémentaire et dans *Choquet-Bruhat* l'exemple de la solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^3$. On peut rajouter, dans *Bony* l'équation de Poisson, et un exemple qui suit.

Références

– Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
– Bony, *Cours d'analyse*
– Choquet-Bruhat, *Distributions, théorie et problèmes*
– Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*
– Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*

Chapitre 82

Liste des développements

82.1 développements d'algèbre

$\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$

– A caser dans :
  1. 101 (Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications)
  2. 103 (Exemples et applications des notions de sous-groupes distingués et de groupes quotients),
  3. 105 (groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications)
  4. 108 (Exemples de parties génératrices d'un groupes. Applications)

– Référence : Perrin, *Cours d'Algèbre*

Classification des groupes d'ordre 8

– A caser dans :
  1. 103 (Exemples et applications des notions de sous-groupes distingués et de groupes quotients)
  2. 104 (Groupes finis. Exemples et applications)

– Référence : Ramis-Warusfel (Gros pavé) ou dans Combes, *Algèbre et géométrie*

Décomposition de Frobenius

– A caser dans :
  1. 101 (Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications)
  2. 111 (Anneaux principaux. Applications)
  3. 119 (Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices)
  4. 124 (Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie)
  5. 125 (Sous-espaces stables d'un endomorphisme ou d'une famille d'endomorphismes en dimension finie. Applications)

– Référence : Gourdon, *Algèbre*

Théorème de Burnside

– A caser dans :
  1. 104 (Groupes finis. Exemples et applications)
  2. 106 (Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications)
  3. 128 (Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents)

– Référence : Oraux X-ENS *Algèbre* 2

Table de caractères de S_4

– A caser dans :

1. 107 (Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel)
2. 149 (Représentations de groupes finis de petit cardinal)

– Référence : Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*

Théorème de Frobenius et lemmes

– A caser dans :

1. 107 (Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel)
2. 149 (Représentations de groupes finis de petit cardinal)

– Référence : Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*

Forme faible du théorème de progression arithmétique de Dirichlet

– A caser :

1. 108 (Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Applications)
2. 109 (Nombres premiers. Applications)

– Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Théorème de Sophie Germain

– A caser :

1. 108 (Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications)
2. 109 (Nombres premiers. Applications)

– Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1

$\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ et $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ sont principaux

– A caser :

1. 111 (Anneaux principaux. Applications)

– Référence : Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*

Théorème de Chevalley-Warning

– A caser

1. 112 (Corps finis. Applications)
2. 117 (Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geq 2$). Aspects théoriques et applications)

– Référence : Serre, *Cours d'arithmétique*

Nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ (Nombres de Bell)

– A caser :

1. 114 (Anneau des séries formelles. Applications)
2. 145 (Méthodes combinatoires. Problèmes de dénombrement)

– Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Partitions d'un entier en parts fixées

- A caser :
  1. 114 (Anneau des séries formelles. Applications)
  2. 115 (Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications)
  3. 145 (Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement)
- Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 2

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

- A caser :
  1. 113 (Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications)
  2. 116 (Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications)
- Référence : Gozard, *Théorie de Galois*

Théorème de structure des polynômes symétriques

- A caser :
  1. 105 (Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications)
  2. 117 (Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geq 2$). Aspects théoriques et applications)
  3. 150 (Racines de polynômes. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe)
- Référence : Ramis-Deschamps-Odoux, *Cours d'algèbre* 1

Lemme de Kronecker

- A caser :
  1. 113 (Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications)
  2. 146 (Résultant. Applications)
  3. 150 (Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe)
- Référence : Szpirglas, *Mathématiques Algèbre* $L3$

Théorème des extrema liés

- A caser :
  1. 120 (Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications)
- Référence : Gourdon, *Analyse*

Réduction des endomorphismes normaux

- A caser :
  1. 119 (Exemples d'actions de groupe sur les espaces de matrices)
  2. 120 (Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie. Rang. Exemples et applications)
  3. 125 (Sous-espaces stables d'un endomorphisme ou d'une famille d'endomorphismes en dimension finie. Applications)
  4. 126 (Endomorphismes diagonalisables en dimension finie)
  5. 130 (Matrices symétriques réelles. Matrices hermitiennes)
  6. 133 (Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie))
- Référence : Gourdon, *Algèbre*

Surjectivité de l'exponentielle $M_n(\mathbb{C}) \mapsto GL_n(\mathbb{C})$
- A caser :
  1. 127 (Exponentielle de matrices. Applications)
- Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre* 2

$exp(A)$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable
- A caser :
  1. 127 (Exponentielle de matrices. Applications)
- Référence : Objectif Agrégation

Décomposition de Dunford
- A caser :
  1. 124 (Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie)
  2. 126 (Endomorphismes diagonalisables en dimension finie)
  3. 128 (Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents)
- Référence : Gourdon, *Algèbre*

Méthode de relaxation pour les matrices hermitiennes définies positives
- A caser :
  1. 130 (Matrices symétriques réelles. Matrices hermitiennes)
  2. 140 (Systèmes linéaires : opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques)
- Référence : Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*

Ellipsoïde de John-Loewner
- A caser :
  1. 123 (Déterminant. Exemples et applications)

2. 131 (Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications)
3. 148 (Formes quadratiques réelles. Exemples et applications)

– Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3

Lemme de Morse

– A caser :

1. 131 (Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications)
2. 148 (Formes quadratiques réelles. Exemples et applications)

– Référence : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*

Résultant et application

– A caser :

1. 123 (Déterminant. Exemples et applications)
2. 146 (Résultant. Applications)

– Référence : Gourdon, *Algèbre*

Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$

– A caser :

1. 106 (Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous groupes de $GL(E)$. Applications)
2. 108 (Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications)
3. 132 (Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications)
4. 133 (Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie))
5. 135 (Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3)

– Référence : Audin, *Géométrie* et Perrin, *Cours d'algèbre*

Théorème de Hahn-Banach géométrique

– A caser :

1. 132 (Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications)
2. 137 (Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications)
3. 253 (Utilisation de la notion de convexité en analyse)

– Référence : Tauvel, *Géométrie*

SO_3 est un groupe simple

- A caser :
  1. 135 (Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3)
- Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 3

Théorème de Carathéodory et application

- A caser :
  1. 137 (Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications)
- Référence : Tauvel, *Géométrie*

Méthode du gradient à pas optimal

- A caser :
  1. 140 (Systèmes linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques)
- Référence : Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées, volume* 1

Théorème de l'élément primitif dans le cas des corps finis et dans le cas des corps de caractéristique nulle

- Á caser :
  1. 151 (Extensions de corps. Exemples et applications)
- Référence : Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation* et l'énoncé d'un lemme dans Perrin, *Cours d'algèbre*

Existence et unicité des corps finis, caractérisation de leurs sous-corps

- Á caser :
  1. 112 (Corps finis. Applications)
  2. 116 (Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications)
  3. 151 (Extensions de corps. Exemples et applications)
- Référence : Perrin, *Cours d'algèbre* et Gozard, *Théorie de Galois*

Les automorphismes de $\mathbb{K}(X)$

- A caser :
  1. 115 (Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications)
- Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS algèbre* 1

82.2 développements d'analyse

Ellipsoïde de John-Loewner

– A caser dans :

1. 123 (Déterminant. Exemples et applications)
2. 131 (Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications)
3. 203 (Utilisation de la notion de compacité)
4. 219 (Problèmes d'extremums)
5. 229 (Fonctions monotones, fonctions convexes. Exemples et applications)
6. 253 (Utilisation de la notion de convexité en analyse)

– Référence : Oraux X-ENS algèbre tome 3

Théorème de Sélection de Helly

– A caser dans :

1. 203 (Utilisation de la notion de compacité)
2. 229 (Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications)
3. 241 (Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples)

– Référence : Oraux X-ENS analyse tome 2

Théorème de Brouwer en dimension 2

– A caser dans :

1. 204 (Connexité. Exemples et applications)
2. 206 (Théorèmes de point fixe. Exemples et applications)

– Référence : Gonnord-Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*

$SO(3)$ est un groupe simple

– A caser dans :

1. 135 (Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3)
2. 204 (Connexité. Exemples et applications)

– Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3 *page* 67

Prolongement de la fonction Γ

– A caser dans :

1. 207 (Prolongement de fonctions. Exemples et applications)
2. 235 (Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications)

3. 239 (Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications)
4. 245 (Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications)

– Référence : Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* et *Objectif Agrégation*

L^p est un espace de Banach (théorème de Riesz-Fischer)

– A caser dans :

1. 201 (Espaces de fonctions. Exemples et applications)
2. 205 (Espaces complets. Exemples et applications)
3. 208 (Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues)
4. 234 (Espaces $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$)
5. 235 (Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications)

– Référence : Brézis

Densité dans $C^0([0,1])$ des fonctions continues nulle part dérivables

– A caser dans :

1. 201 (Espaces de fonctions. Exemples et applications)
2. 202 (Exemples de parties denses et applications)
3. 205 (Espaces complets. Exemples et applications)
4. 228 (Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples)

– Référence : Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*

Densité des polynômes orthogonaux

– A caser dans :

1. 202 (Exemples de parties denses et applications)
2. 213 (Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications)
3. 234 (Espaces $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$)

– Référence : Objectif agrégation.

Banach Steinhaus et existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point

– A caser dans :

1. 208 (Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues)
2. 241 (Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples)
3. 246 (Séries de Fourier. Exemples et applications)

– Référence : Gourdon, *Analyse*

Théorème de Stampacchia

- A caser :
  1. 206 (Théorèmes de point fixe. Exemples et applications)
  2. 213 (Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications)
- Référence : Brézis, *Analyse fonctionnelle*

Lemme de Morse

- A caser :
  1. 131 (Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications)
  2. 214 (Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications)
  3. 215 (Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications)
  4. 218 (Applications des formules de Taylor)
- Référence : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*

Théorème des extremas liés

- A caser :
  1. (120 (Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications)
  2. 214 (Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications)
  3. 215 (Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications)
  4. 217 (Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples)
  5. 219 (Problèmes d'extremums)
- Référence : Gourdon, *Analyse*

Inégalité isopérimétrique

- A caser :
  1. 216 (Étude métrique des courbes. Exemples)
- Référence : Zuily-Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*

Étude de l'Astroïde

- A caser :
  1. 216 (Étude métrique des courbes. Exemples)
- Référence : Monier, *Géométrie MP PSI PC PT*

Deux exemples de sous variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$

- A caser :
  1. 217 (Sous variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples)

- Référence : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*

Méthode de Newton

- A caser :
  1. 218 (Applications des formules de Taylor)
  2. 223 (Convergence des suites numériques. Exemples et applications)
  3. 224 (Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples)
  4. 226 (Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{(n+1)} = f(u_n)$. Exemples)
  5. 232 (Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples)
- Référence : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*

Théorème d'Abel angulaire et théorème Taubérien faible

- A caser :
  1. 207 (Prolongement de fonctions. Exemples et applications)
  2. 230 (Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples)
  3. 243 (Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications)
  4. 247 (Exemples de problèmes d'interversion de limites)

Étude de l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$

- A caser dans :
  1. 220 (Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions)
  2. 221 (Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications)
- Référence : Gourdon, *Analyse*

Théorème de stabilité de Liapounov

- A caser dans :
  1. 220 (Équations différentielles $X' = f(X, t)$. Exemples d'étude qualitatives de solutions)
  2. 221 (Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications)
- Référence : Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*

Critère de Weyl

- A caser :
  1. 223 (Convergence des suites numériques. Exemples et applications)
  2. 224 (Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples)
- Référence : Francinou - Gianella - Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 2

Étude de la suite $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$
- A caser :
  1. 226 (Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples)
- Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 1

Théorème de majoration des dérivées
- À caser :
  1. 228 (Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples)
- Référence : Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*

Formule sommatoire de Poisson
- A caser :
  1. 230 (Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples)
  2. 240 (Transformation de Fourier. Applications)
  3. 246 (Séries de Fourier. Exemples et applications)
  4. 254 (Espaces de Schwartz et distributions tempérées)
  5. 256 (Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$)
- Référence : Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

Méthode du gradient à pas optimal
- À caser :
  1. 140 (Systèmes linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques)
  2. 232 (Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples)
- Référence : Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées, tome* 1 *page* 414

Méthode de Gauss pour l'intégration numérique
- À caser :
  1. 236 (Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables)

   2. 238 (Méthodes de calcul approché d'intégrales et de solutions d'une équation différentielle)

- Référence : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*

Formule des compléments

- Á caser :

   1. 236 (Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles)
   2. 245 (Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications)

- Référence : Amar-Matheron, *Analyse complexe*

Théorème de Cauchy-Arzela-Peano par la méthode d'Euler explicite

- À caser :

   1. 238 (Méthodes de calcul approché d'intégrales et de solutions d'une équation différentielle)

- Référence : Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*

Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$ (et éventuellement S')

- À caser

   1. 239 (Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications)
   2. 240 (Transformation de Fourier. Applications)
   3. 254 (Espaces de Schwartz et distributions tempérées)
   4. 256 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)

- Référence : Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*

Des choses sur $vp\left(\frac{1}{x}\right)$

- À caser :

   1. 255 (Dérivation au sens des distributions. Exemples et applications)

- Référence : Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*

Solution fondamentale du laplacien dans $\mathbb{R}^3$

- À caser :

   1. 255 (Dérivation au sens des distributions. Exemples et applications)

- Référence : Choquet-Bruhat, *Distributions, théorie et problèmes*

Nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ (Nombres de Bell)

- A caser :

   1. 114 (Anneau des séries formelles. Applications)

2. 145 (Méthodes combinatoires. Problèmes de dénombrement)
3. 243 (Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications)
4. 247 (Exemples de problèmes d'interversion de limites)

– Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1

Théorème central limite

– À caser :

1. 242 (Utilisation en probabilités du produit de convolutione t de la transformation de Fourier ou de Laplace)
2. 249 (Suites de variables de Bernoulli indépendantes)
3. 250 (Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications)
4. 251 (Indépendance d'évènements et de variables aléatoires. Exemples)

– Référence : Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

Théorème des évènements rares de Poisson

– À caser :

1. 242 (Utilisation en probabilités du produit de convolution et de la transformation de Fourier ou de Laplace)
2. 249 (Suites de variables de Bernoulli indépendantes)
3. 252 (Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications)

– Référence : Ouvrard, *Probabilités,* 2

Théorème de Bernstein (polynômes)

– À caser :

1. 250 (Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications)
2. 251 (Indépendance d'évènements et de variables aléatoires. Exemples)
3. 252 (Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications)

– Référence : Zuily-Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

Théorème de Hahn-Banach géométrique

– A caser :

1. 253 (Utilisation de la notion de convexité en analyse)

– Référence : Tauvel, *Géométrie*

Chapitre 83

Liste des références

Références pour les leçons d'algèbre :

- François Combes, *Algèbre et géométrie*
- Perrin, *Cours d'algèbre*
- Josette Calais, *Éléments de théorie des groupes* ■
- Alessandri, *Thèmes de géométrie, groupes en situation géométrique* ■
- Tauvel, *Algèbre*
- Tauvel, *Géométrie* ■
- Leichtmann pour le théorème de Molien ■
- Antoine Chambert-Loir, *Groupes de matrices* côte 512.3 ■
- Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées* ■
- Gourdon, *algèbre*
- Gourdon, *Analyse*
- Objectif agrégation
- Ramis Deschamps Odoux, *Cours de mathématiques. 1 algèbre* ■
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*
- Colmez, *Élements d'analyse et d'algèbre*
- Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier* ■
- Audin, *Géométrie* ■
- Demazure, *Cours d'algèbre, primalité, divisibilité, codes* ■
- Francinou-Gianella, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation,* 1 ■
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 2
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 1
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 2
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 3
- Goblot, *Algèbre commutative*
- Serre, *Cours d'arithmétique*
- Gozard, *Théorie de Galois* ■
- Saux-Picard, *Cours de calcul formel, algorithmes fondamentaux* ■
- Arnaudiès-Fraysse, *Cours de mathématiques* 1- *Algèbre* ■
- Voedts, *Cours de mathématiques*
- Denis Serre, *Les matrices* ■
- Grifone, *Algèbre linéaire* ■
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Szpirglas, *Mathématiques, Algèbre L*3 ■
- Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* ■
- Gantmacher, *Théorie des matrices* ■

- Mercier, *Cours de géométrie* ■
- Truffault, *Géométrie élémentaire* ■
- De Biasi, *Mathématiques pour le capes et l'agrégation,* 3*ème édition* ■
- Mignotte, *Mathématiques pour le calcul formel* ■
- Rudin, *Analyse réelle et complexe*
- Amar-Matheron, *Analyse complexe*

Références pour les leçons d'analyse :

- Rudin, *Analyse réelle et complexe*
- Brezis, *analyse fonctionnelle*
- Objectif Agrégation
- Pommelet, *Analyse* ■
- Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*
- Hirsh Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*
- Gourdon, *Analyse*
- Gourdon, *Algèbre*
- Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*
- Zuily-Queffelec, *Analyse pour l'agrégation*
- Albert, *Topologie* ■
- Mneimé-Testard, *Groupes de Lie classiques*
- Monier, *Géométrie* 1*ère et* 2*èmes années MP PSI PC PT* ■
- Berger-Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces* ■
- Audin, *Géométrie* ■
- Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles* ■
- Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
- Crouzeix-Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles* ■
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 1
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 2
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre* 3
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 1
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 2
- Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse* 3
- Ouvrard, *Probabilités* 1
- Ouvrard, *Probabilités,* 2
- Ramis-Warusfel, *Cours de mathématiques pures et appliquées, tome* 1 ■
- Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques. Deuxième édition* ■
- Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*
- Ramis-Deschamps-Odoux, *Cours de mathématiques,* 3· *Topologie et éléments d'analyse* ■
- Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*

– Gonnord-Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle* ■
– Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* ■
– Amar-Matheron, *Analyse complexe* ■
– Barbe-Ledoux, *Probabilité*
– Di Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles* ■
– Bony, *Cours d'analyse*
– Choquet-Bruhat, *Distributions, théorie et problèmes*
– MethodiX, *Analyse*
– Rivoirard, *Statistiques en action*
– Cotrell, *Exercices de probabilités*

Chapitre 84

Questions sur l'option calcul scientifique

84.1 Qu'est-ce que la stabilité des points d'équilibre pour un système autonome ? Comment l'étudie-t-on ?

On considère le système autonome, pour $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Définition 84.1. Un point d'équilibre du problème de Cauchy précédent est un point $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y) = 0$.

En dimension 1 la connaissance des équilibres et du signe de f entre les points d'équilibre détermine entièrement a dynamique du problème.

On commence par considérer le cas où le système est linéaire (c'est à dire que $f(y) = Ay + B$ où A et B sont des matrices, indépendantes du temps car on considère le système autonome). Alors le système admet pour une condition initiale donnée, une unique solution qui est définie globalement, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire. On peut définir la stabilité des solutions dans le cas linéaire par :

Définition 84.2. Soit $y(t, y_0)$ la solution maximale du système telle que $y(0, y_0) = y_0$. On dit que la solution $y(t, y_0)$ est *stable* si il existe une boule $\bar{B}(y_0, r)$ et une constante $C \geq 0$ telles que :

1. $\forall z \in \bar{B}(y_0, r), t \mapsto y(t, z)$ est définie sur $[0, +\infty[$;
2. $\forall z \in \bar{B}(y_0, r)$ et $t \geq 0$ on a

$$\|y(t, z) - y(t, y_0)\| \leq C\|z - y_0\|.$$

La solution $y(t, y_0)$ est *asymptotiquement stable* si elle est stable et si la condition suivante, plus forte que la condition 2 précédente est satisfaite :

1. Il existe une boule $\bar{B}(y_0, r)$ et une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue avec $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma(t) = 0$ telles que $\forall z \in \bar{B}(y_0, r)$ et $t \geq 0$ on ait

$$\|y(t, z) - y(t, y_0)\| \leq \gamma(t)\|z - y_0\|.$$

Dans le cas des systèmes linéaires, on a le théorème suivant, qui donne la stabilité des solutions du système $Y' = AY$ en fonction des valeurs propres de la matrice A.

Théorème 84.3. *Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont*

1. *asymptotiquement stables si et seulement si* $Re(\lambda_j) < 0$ *pour tout* $j = 1, \cdots, m$.
2. *stables si et seulement si pour tout* j*, ou bien* $Re(\lambda_j) < 0$*, ou bien* $Re(\lambda_j) = 0$ *et le bloc correspondant est diagonalisable.*

Dans le cas particulier de la dimension 2 on peut tracer l'allure des solutions au voisinage du point d'équilibre en fonction de la trace et du déterminant de la matrice, voir par exemple dans *Demailly* pour les dessins.

Dans le cas où f n'est pas linéaire, on a la définition suivante pour la stabilité des solutions, si on suppose que le problème de Cauchy admet une solution globale sur $[0, +\infty[$:

Définition 84.4. – Soit $y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^m$ solution maximale du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0$. La solution y est *stable* si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que
  1. $\forall \tilde{y}_0 \in \bar{B}(y_0, \delta)$, la solution $\tilde{y}$ est définie sur $[0, +\infty[$ avec $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$.
  2. $\forall t \geq 0, \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \epsilon$.
- On dit que y est solution *asymptotiquement stable* si y est stable et si
  1. $\exists \eta > 0$ tel que $\forall \tilde{y}_0 \in \bar{B}(y_0, \eta)$ la solution $\tilde{y}$ du problème de Cauchy avec $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ vérifie :
$$\lim_{t \to \infty} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| = 0.$$

Toujours dans le cas où f n'est pas linéaire, le théorème de Liapunov peut nous permettre de conclure quand à l'asymptotique stabilité du point d'équilibre 0. Mais il est un peu moins puissant que dans le cas linéaire.

Théorème 84.5 (Théorème de Liapunov)**.** *On considère ici le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1$ *telle que* $f(0) = 0$.

1. *Si la matrice* $Df(0)$ *a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors* 0 *est point d'équilibre asymptotiquement stable.*
2. *Si la matrice* $Df(0)$ *a une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors* 0 *est un point d'équilibre instable.*

Remarque. Dans le cas où une valeur propre de la matrice est de partie réelle nulle et que toutes les autres valeurs propres sont de partie réelle négative ou nulle, on ne peut pas conclure. C'est une différence avec ce qui se passe pour le cas linéaire. Donnons un exemple de problème différentiel qui est dans le cas où les valeurs propres de la matrice sont de partie réelle nulle et qui a une solution stable (mais pas asymptotiquement stable) et aussi une autre où les solutions sont instables.

Exemple 84.6. On pose

$$y'(t) = y^2(t)$$

Alors, on peut écrire :

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$$
$$\frac{-1}{y} + \frac{1}{y_0} = t$$
$$y(t) = \frac{y_0}{1 - ty_0}$$

On peut distinguer selon les conditions initiales. Si $y_0 = 0$ on a une unique solution qui est la solution nulle. Si $y_0 > 0$ on a une explosion avec une asymptote en $\frac{1}{y_0}$ donc c'est instable. Si $y_0 < 0$ alors on décroit vers 0. Du coup, le point d'équilibre n'est pas stable (car il existe des solutions aussi proches qu'on veut de O qui tendent vers l'infini).
Le linéarisé de ce problème est

$$z'(t) = 0 = Df(0)z$$

Au voisinage de O

Exemple 84.7. On cherche maintenant un exemple ou le point d'équilibre serait stable avec un système linéarisé à valeurs propres nulles. On considère

$$y'(t) = -y^3(t)$$

(qui va marcher)
On peut alors écrire

$$\frac{y'(t)}{y^3(t)} = -1$$

et on peut refaire le calcul. Ou sinon, on peut utiliser le cas de la dimension 1 : si $y > 0$ alors $f < 0$ et donc la solution tend vers 0, si $y < 0$ alors $f > 0$ et donc la solution tend vers 0. Le point d'équilibre est donc asymptotiquement stable alors que le système linéarisé est nul.

Il existe des caractérisations de l'asymptotique stabilité qui consistent à montrer que si une solution d'un système légèrement perturbé ne s'éloigne pas trop d'une solution du système ou que si on part d'une condition initiale légèrement perturbée et qu'on ne s'éloigne pas trop de la solution avec la vraie condition initiale, alors la solution est asymptotiquement stable (voir par exemple *Demailly* pour ce théorème écrit dans le cas linéaire).
D'un point de vue numérique, pour vérifier qu'on a une solution asymptotiquement

stable, on calcule la solution du même problème de Cauchy avec une condition initiale légèrement modifiée et on vérifie que quand $t \to \infty$ on se rapproche bien de la solution de départ. Pour vérifier que la solution de départ est stable, on vérifie que la différence entre les deux solutions reste bornée.

Remarque. On aurait aussi pu parler de fonctions de Liapunov et de champ rentrant, mais ça n'est pas au programme. En général dans les systèmes physiques, les formules d'énergie donnent une fonction de Liapunov. Par exemple pour le pendule mécanique : la conservation de l'énergie passe par une fonction de Liapunov donnée par la conservation de l'énergie.

Exemple 84.8. Étude complère de la stabilité pour le pendule mathématique (qui est un truc à savoir faire). l'équation du pendule est donnée par :

$$-y''(t) + \sin(y(t)) = 0,$$

Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} -y''(t)y'(t) + \sin(y(t))y'(t) &= 0 \\ \frac{1}{2}(y'^2(t) - y'^2(0)) - \cos(y(t)) + \cos(y(0)) &= 0. \end{aligned}$$

On peut aussi réécrire le système comme un système d'ordre 1 en posant $z = y'$ et $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ alors

$$Y' = \begin{pmatrix} z \\ -\sin(y) \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -\sin(y(t)) \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy Lipschitz, on a existence et unicité globale de la solution. On commence par trouver les points d'équilibre du système, ce sont les $\{(k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On commence par étudier le cas $k = 1$. On étudie le système linéarisé au voisinage du point d'équilibre $(y = \pi, z = 0)$. Le système linéarisé est $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y$ Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 1$ les valeurs propres sont donc 1 et -1. D'après le théorème de Liapunov, l'équilibre est instable. Dans le cas où $k = 0$, le système linéarisé est $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$ le polynôme caractéristique est X^2+1, la matrice a donc deux valeurs propres imaginaires pures i et $-i$. On ne peut pas utiliser le théorème de Liapunov pour conclure. On va donc chercher une autre méthode. On reprend l'équation qu'on avait trouvée :

$$\frac{1}{2}(z^2(t) - z^2(0)) - \cos(y(t)) + \cos(y(0)) = 0,$$

la quantité $E = \frac{1}{2}z^2(t) - \cos(y(t))$ est donc conservée. Comment peut-on conclure ? On peut dessiner le potentiel de y en fonction de y (sur feuille, ça revient à tracer $-\cos(y)$. Le potentiel a un minimum local, la solution va être piégée au voisinage du minimum local. On peut faire des calculs plus détaillés pour montrer que $\cos(y)$ reste compris entre -1 et E à cause de la positivité de z^2, ce qui implique que y est bornée. Si $E > 1$ au départ, on fait des tours. La solution n'est pas stable.

Exemple 84.9. On peut aussi considérer le potentiel à double puits

$$y''(t) = -V'(y(t))$$
$$V(y) = y^2(1 - y^2)$$

Il y a un double puits pour le potentiel. En utilisant l'energie mécanique $E = \frac{1}{2}y^2 + V(y)$ (qui se conserve) on peut conclure.

84.2 Comment approche-t-on la solution d'une équation différentielle. Que signifie la convergence de la méthode numérique ?

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction assez régulière. Dans le cas où $y \in \mathbb{R}^n$, on fait les mêmes calculs à condition de considérer y et f comme variable et fonction vectorielles. Par simplicité d'écriture, on fait le cas $\mathbb{R}$.
On se donne une subdivision $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$ de $[t_0, T]$ et on cherche à approximer les valeurs $y(t_n)$ prises par la solution exacte du problème de Cauchy au point t_n. On notes ces valeurs approchées $y_0, \cdots, y_N$ et les pas successifs $h_n = t_{n+1} - t_n$ pour $0 \leq n \leq N - 1$. On notera, si besoin est $h_{max} = \max_n h_n$ le maximum du pas. On prendra généralement un pas constant dans les algorithmes.

Définition 84.10. On appelle *méthode à un pas* une méthode permettant de calculer y_{n+1} à partir de la seule valeur numérique antérieure y_n et *méthode à r pas* une méthode qui utilise les r valeurs antérieures $y_n, \cdots, y_{n-r+1}$ pour calculer y_{n+1}.

Nous allons d'abord passer en revue les principales méthodes à un pas et ensuite parler de convergence de la méthode numérique. Nous n'aborderons pas le cas des méthodes à r pas qui sont plus rarement utilisiés dans le cadre de l'agrèg

Méthodes à un pas

Définition 84.11. Les méthodes numériques à un pas sont les méthodes de résolution numérique qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n < N,$$

où $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction que l'on supposera continue.

On peut définir les principales méthodes à un pas que nous utilisons et nous donnons à chaque fois leur ordre, nous définirons après ce que c'est (OUBLI !) :

Définition 84.12.

1. *la méthode d'Euler explicite* qui est donnée par

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n),$$

   Elle est d'ordre 1.
2. La méthode d'Euler point milieu donnée par

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)),$$

   Elle est d'ordre 2.
3. La méthode d'Euler implicite (qui est une méthode implicite, mais à un pas) donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n + 1, y_n + 1)$$

   Elle est d'ordre 1.
4. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par :

$$\begin{aligned}
p_{n,1} &= f(t_n, y_n) \\
t_{n,2} &= t_n + \frac{1}{2}h_n \\
y_{n,2} &= y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,1} \\
p_{n,2} &= f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\
y_{n_3} &= y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,2} \\
p_{n,3} &= f(t_{n,2}, y_{n,3}) \\
t_{n+1} &= t_n + h_n \\
y_{n,4} &= y_n + h_n p_{n,3} \\
p_{n,4} &= f(t_{n+1}, y_{n,4}) \\
y_{n+1} &= y_n + h_n \left(\frac{1}{6}p_{n,1} + \frac{2}{6}p_{n,2} + \frac{2}{6}p_{n,3} + \frac{1}{6}p_{n,4} \right)
\end{aligned}$$

   Elle est d'ordre 4.

Remarque. On peut discuter des avantages et inconvénients des différentes méthodes : pour Euler implicite et Euler explicite, le cas des problèmes raides est fait juste après. (à finir)

On peut se demander pourquoi définir la méthode d'Euler implicite quand on connaît déjà Euler explicite (à priori, on n'a pas un résultat meilleur car elles sont de même ordre, et on ne fait que rajouter des calculs à chaque itération pour trouver y_{n+1} que l'on n'a pas directement. La méthode d'Euler explicite est utile dans le cas de problèmes raides. Expliquons rapidement ce qu'est un problème raide :

Définition 84.13. On dit qu'un problème de Cauchy est mathématiquement bien posé si la solution est unique et dépend continûment de la donnée initiale.

Remarque. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que le problème est mathématiquement bien posé si f est localement lipschitzienne en y.

Définition 84.14. On dit qu'un problème de Cauchy est numériquement bien posé si la continuité de la solution par rapport à la donnée initiale est suffisemment bonne pour que la solution ne soit pas perturbée par une erreur initiale ou des erreurs d'arrondi faibles.

Remarque. En général, on attend que f soit lipschitzienne avec une constante de Lipschitz faible.

Définition 84.15. On dit qu'un problème est bien conditionné si les méthodes numériques usuelles peuvent en donner une solution en un temps raisonnable.

On peut maintenant donner un exemple de problème de Cauchy qui est *raide* c'est à dire qui a une constante de stabilité trop grande. On va lui appliquer la méthode d'Euler explicite et la méthode d'Euler implicite et on va voir que pour un tel problème, les résultats sont radicalement différents :

Exemple 84.16. On considère :

$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \quad t \in [0,1] \\ \quad y(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par $y(t) = \frac{1}{5}$ et si on choisit une donnée initiale $\tilde{y}(0) = \frac{1}{5} + \epsilon$ on a la solution $\tilde{y}(t) = \frac{1}{5} + \epsilon e^{-150t}$. Comme $0 \leq e^{-150t} \leq 1$ sur $[0,1]$, le problème est numériquement bien posé. La méthode d'Euler explicite avec pas constant h donne :

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h(-150y_n + 30) \\
&= (1 - 150h)y_n + 30h \\
y_{n+1} - \frac{1}{5} &= (1 - 150h)\left(y_n - \frac{1}{5}\right) \\
&= (1 - 150h)^n \left(y_0 - \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Si on suppose $h = \frac{1}{50}$ et $y_0 = \frac{1}{5} + \epsilon$. Alors $y_n = \frac{1}{5} + (-2)^n\epsilon$ ce qui diverge. Pour avoir un résultat convaincant avec Euler explicite, il est donc nécessaire de prendre h très petit ce qui augmente considérablement le temps de calcul.
Si on utilise la méthode d'Euler implicite, le problème ne se pose pas :

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h(-150y_{n+1} + 30) \\
(1 + 150h)y_{n+1} &= y_n + 30h \\
(1 + 150h)\left(y_{n+1} - \frac{1}{5}\right) &= y_n - \frac{1}{5} \\
y_n - \frac{1}{5} &= \frac{1}{(1 + 150h)^n}\left(y_n - \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Et on voit qu'en prenant $y_0 = \frac{1}{5} + \epsilon$ on a $y_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{1+150h)^n}\epsilon$ et on n'a pas de condition sur h pour que ça ne diverge pas. Dans ce cas, la méthode d'Euler implicite est préférable à la méthode d'Euler explicite, bien qu'elles soient de même ordre.

Exemple 84.17. Un autre exemple de problème raide, plus général :

$$y' = -\lambda y$$

Pour Euler explicite, on a

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n - h\lambda y_n \\
&= (1 - h\lambda)y_n \\
&= (1 - h\lambda)^n y_0
\end{aligned}$$

Et on doit avoir $|\lambda h| < 2$ pour avoir la convergence. et avec Euler implicite

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n - h\lambda y_{n+1} \\
&= \frac{1}{(1 + h\lambda)} y_n \\
&= \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} y_0
\end{aligned}$$

Exemple 84.18. On peut considérer l'equation de transport en dimension 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

on fait une discrétisation en espace et on trouver $U = AU$ ou A est une matrice tridiagonale avec des $\frac{-2}{\Delta x^2}$ sur la diagonale principale et des $\frac{1}{\Delta x^2}$ sur les deux diagonales autour. Les valeurs propres des A sont dans $[\frac{-1}{\Delta x^2}, 0]$, c'est un problème raide il faut donc utiliser Euler implicite. La condition pour que Euler explicite fonctionne est une condition CFL $\frac{4\Delta}{\Delta x^2} < 2$ ce qui force à ce que les pas de discrétisation soient très petits. C'est donc bien plus coûteux que Euler implicite (où on peut prendre moins de pas).

Convergence de la méthode numérique

Dans toute la suite, on note $e_n = y(t_n) - y_n$ l'erreur de discrétisation, où $y(t_n)$ est la solution au temps t_n du problème de Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & \text{sur } [t_n, t_{n+1}] \\ z(t_n) = y(n) \end{cases}$$

Pour avoir une méthode numérique qui approche correctement la solution du problème de Cauchy, on va donc chercher à obtenir e_n petit. On commence par définir les notions de stabilité et de consistance d'une méthode avant de définir la convergence. On considère toujours des méthodes à un pas, les définitions sont un peu différentes pour les méthodes à r pas mais avec la même idée, données par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n < N, \quad y_0 = \eta_h \text{ donné}$$

Définition 84.19 (Consistance)**.** La méthode précédente est consistante avec l'équation différentielle si pour toute solution $y(\cdot)$ de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y(t_{n+1} - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n)|$$

tend vers 0 lorsque h_{max} tend vers 0.

Remarque. La quantité entre valeurs absolues dans la somme est appelée *erreur de consistance* à l'instant t_n. C'est l'erreur que l'on fait au $n$ième pas en replaçant l'équation différentielle par le schéma numérique. La définition implique que si h est suffisemment petit, la somme de ces erreurs est négligeable. Cela veut dire que le schéma que l'on définit, se rapproche d'une solution de l'équation différentielle (mais ça peut être une autre solution à priori, pour une condition initiale légèrement modifiée).

On définit alors la notion de stabilité : c'est cette notion qui fera que pour une faible perturbation de la condition initiale, on restera proches de la solution cherchée du problème de Cauchy (on ne va dont pas *vers n'importe quoi* à chaque fois qu'on rajoute une perturbation).

Définition 84.20 (Stabilité)**.** On dit que la méthode numérique à un pas est stable si il existe une constante M indépendante de h_{max} telle que pour toutes suites y_n, z_n et $\epsilon_n, n = 0, 1, \cdots, N$ vérifiant

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n) \\ z_{n+1} &= z_n + h_n\Phi(t_n, z_n, h_n) + \epsilon_n \end{aligned}$$

on ait

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - z_n| \leq M\left(|y_0 - z_0| + \sum_{n<N} |\epsilon_n|\right).$$

On peut voir la stabilité comme une continuité par rapport à l'erreur à chaque étape.
On peut maintenant définir la convergence d'un schéma numérique à un pas pour les équations différentielles.

Définition 84.21 (Convergence)**.** La méthode à un pas définie précédemment est convergente si les conditions $h_{max} \to 0$ et $\eta_h \to y(t_0)$ impliquent

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t_n) - y_n| \to 0,$$

où $y(\cdot)$ est la solution exacte du problème de Cauchy et y_n est la solution du schéma numérique.

On a

Théorème 84.22. *Consistante et stabilité impliquent convergence.*

Et il faut avoir une idée précise de la preuve de ce dernier théorème.

84.3 Comment calcule-t-on la valeur approchée d'une intégrale ? Quel est le lien avec l'interpolation polynômiale ?

Remarque. Cette intro est très exactement celle qu'on trouve dans *Crouzeix-Mignot*.

Dans toute la suite, on se donne un *fonction de poids* $w(x) > 0$ sur un intervalle (a, b) borné ou non et une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(]a, b[)$ telle que $fw \in \mathcal{L}^1(a, b)$. On veut calculer une valeur approchée de

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{dx}.$$

Pour cela, on va utiliser une *formule de quadrature* de la forme

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(x_i),$$

où λ_i et x_i seront des réels.

Il y a deux grandes classes de méthodes d'intégration numérique, que nous allons détailler tour à tour :

- *Les méthodes composées.* Elles sont utilisées lorsque (a, b) est borné et $w \equiv 1$. L'idée est de subdiviser l'intervalle (a, b) en k sous-intervalles $(a_i, a_{i+1}), i = 0, 1, \cdots, k-1$ et on considère, pour chaque intégrale $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{dx}$ une méthode d'intégration élémentaire qu'on obtient en remplaçant f par un *polynôme d'interpolation* sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- *Les méthodes de Gauss.* Elle s'applique dans les cas de poids $w(x)$ et d'intervalles (a, b) particuliers. L'idée est d'approcher f par un polynôme d'interpolation sur (a, b) tout entier, en des points choisis de telle manière que la formule soit exacte pour des polynômes de degré n (et on va s'acharner à prendre n le plus grand possible). Alors, les x_i sont les zéros des polynômes orthogonaux associés au poids $w(x)$ sur (a, b).

Les méthodes composées

Les différentes méthodes composées s'obtiennent en choisissant des polynômes d'interpolation différents pour approcher f sur l'intervalle $[a_i, aii + 1]$. Comme l'intervalle (a, b) est borné, on peut se ramener par translation au cas d'intégrales sur l'intervalle fixe $(-1, 1)$.

On va étudier différentes méthodes composées :

- *Cas où le polynôme d'interpolation est de degré* 0. Elles reviennent à choisir un point $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ et à remplacer f sur $[a_i, a_{i+1}]$ par le polynôme de degré 0, $p_0(x) = f(\xi_i)$. On obtient alors une expression de l'intégrale de f comme approximation d'une somme qui n'est autre qu'une somme de Riemann (on sait dont qu'elle converge vers l'intégrale de f) :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{dx} \cong (a_{i+1} - a_i)f(\xi_i)$$

et par suite
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \cong \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)f(\xi_i).$$
En fonction des choix des ξ_i on retrouve des méthodes très classiques (et simples à implémenter) d'intégration numérique :

1. *La formule des rectanges à gauche* où on considère $\xi_i = a_i$ et ainsi
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \cong \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i).$$
2. *La formule des rectangles à droite* où on prend $\xi_i = a_{i+1}$ et donc
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \cong \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_{i+1}).$$
3. *La formule du point milieu* où on prend $\xi_i = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ et où on obtient alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \cong \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}).$$

– *Cas où le polynôme d'interpolation est de degré* 1. Le cas le plus courant est la *méthode des trapèzes* qui revient à remplacer f par $p_1(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}(x-a_i)$. On obtient alors
$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{dx} \cong \int_{a_i}^{a_{i+1}} p_1(x)\mathrm{dx} = \frac{a_{i+1}-a_i}{2}(f(a_i)+f(a_{i+1}))$$
d'où
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \cong \sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_{i+1}-a_i}{2}(f(a_i)+f(a_{i+1})).$$
– *Cas des méthodes de Newton-Cotes de rang l* (Il s'agit de méthodes de quadrature). On va chercher à approcher l'intégrale de f sur (a_i, a_{i+1}) par une méthode de quadrature élémentaire (particulière). On divise l'intervalle (a_i, a_{i+1}) en l sous-intervalles égaux en posant les points de subdivision
$$\xi_{i,j} = a_i + j\frac{a_{i+1}-a_i}{l},$$

et on se ramène par changement de variable au cas où l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ est l'intervalle $[-1, 1]$ subdivisé en les points $\tau_j = -1 + j\frac{l}{2}$. On note Lj le j-ième polynôme de Lagrange qui correspond aux points τ_j

$$L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - \tau_k}{\tau_j - \tau_k},$$

il permet de définit le polynôme d'interpolation de degré l d'une fonction f aux points τ_j

$$p_l(x) = \sum_{j=0}^{l} f(\tau_j) L_j(x)$$

on note, pour $j = 0, 1, \cdots, l$,

$$\omega_j = \int_{-1}^{1} L_j(x) \mathrm{dx}.$$

On peut faire un changement de variables, considérer les symétries des points τ_j autour de l'origine, et on obtient, en sommant sur tous les sous-intervalles $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \mathrm{dx} \cong (a_{i+1} - a_i) \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\xi_{i,j})$$

et ensuite on peut sommer sur tous les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{dx} \cong \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\xi_{i,j})$$

On va maintenant s'intéresser à la convergence des méthodes d'intégration numérique.

Définition 84.23. Nous dirons qu'une méthode d'intégration numérique, telle que définie au début de l'énoncé, est d'ordre N si elle est exacte pour tout polynôme de degré $\leq N$.

Il apparaît (c'est fait dans *Demailly*) que l'ordre de la méthode d'intégration numérique est à peu près le degré du polynôme d'interpolatio. Pour les polynômes de degré 0, c'est évident tout comme pour les polynômes de degré 1. Dans le cas des méthodes de quadrature, on a le théorème suivant

Théorème 84.24. – *Si l est pair, l'ordre de la méthode de Newton-Cotes d'ordre l est $l + 1$.*

– *Si l est impair, l'ordre de la méthode de Newton-Cotes d'ordre l est l.*

Pour les polynômes de degré 0 (ce sont les méthodes qu'on implémente le plus souvent à l'oral de modé de l'agrèg) la convergence numérique de la méthode (c'est à dire le fait que la différence entre l'intégrale de f et la somme définie par la méthode numérique tende vers 0 quand le pas de subdivision tend vers 0) est assurée par les théorèmes sur les sommes de Riemann.
Pour les autres méthodes, l'erreur peut être calculée en utilisant le noyau de Peano, mais ça n'a pas sa place dans ce petit résumé.

Remarque. On remarque une correspondance entre les méthodes d'intégration numériques composées et les méthodes numériques pour les équations différentielles ? Ce n'est pas un hasard, écrire l'équation différentielle sous forme intégrale permet de la résoudre avec une méthode d'intégration numérique...

Remarque. On peut aussi parler de la méthode de Romberg pour améliorer la méthode des trapèzes. Voir *Crouzeix-Mignot* ou *Demailly.*

Les méthodes de Gauss

On considère w une fonction de poids fixée sur $]a,b[$. On considère les méthodes de type Gauss c'est à dire

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{dx} \cong \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j)$$

où $x_j \in [a,b], j = 0, 1, \cdots, l$. Alors, on a le théorème suivant (qui est un développement, donc on n'en dira pas beaucoup plus)

Théorème 84.25. *Il existe un choix et un seul des points x_j et des coefficients λ_j de sorte que la méthode soit d'ordre $N = 2l + 1$. Les points x_j sont dans $]a,b[$ et sont les racines du $(l+1)$-ième polynôme orthogonal pour le poids w.*

Remarque. En fonction des poids, on connaît des familles de polynômes orthogonaux qui nous permettent de calculer facilement ces intégrales (les coefficients λ_j ont aussi des expressions explicites).

84.4 Comment résoudre un problème d'optimisation ? (théorie et pratique)

Soit V un espace vectoriel réel et U une partie de V. On considère une fonction coût $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Un problème d'optimisation de présente sous la forme

$$\begin{aligned} u &\in U \\ J(u) &= \inf_{v\in U} J(v). \end{aligned}$$

On va s'intéresser à l'existence, l'unicité et la caractérisation de solutions à un problème d'optimisation. On donnera ensuite des algorithmes qui permettent d'approcher des solutions de ces problèmes. On commence par distinguer deux classes de problèmes d'optimisation (dont la résolution algorithmique est bien différente)

Définition 84.26.
- Un problème d'optimisation est dit *sans contrainte* si $U = V$.
- Un problème d'optimisation est dit *avec contrainte* si $U \subsetneq V$

Aspects théoriques

Pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution à un problème d'optimisation, on peut penser aux théorèmes du type de *toute fonction continue sur un compact admet un maximum et un minimum.*

Dans le cas où la fonction coût est deux fois différentiable, on peut observer les valeurs propres de sa matrice Hessienne en un point pour déterminer si ce point est, ou pas, un extrêmum local de la fonction coût.

Théorème 84.27. *Soit x_0 un point critique de $J : \Omega \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la forme quadratique associée à la matrice hessienne de J en x_0 est définie négative, alors x_0 est un maximum local de J. Si elle est définie positive alors x_0 est un minimum local de J. Si elle est définie mais ni positive ni négative, alors x_0 est un point selle.*

Dans le cas où J est une fonction convexe, on sait alors que tout minimum local est un minimum global et que si J est strictement convexe, il y a au plus un minimum.
En dimension infinie, la notion de convexité est remplacée par la notion de α-ellipticité.

Quand on est sur des Hilbert (c'est généralement le cas puisqu'on a tendance à tout faire sur des espaces vectoriels réels de dimension finie) on peut aussi utiliser les conséquences du théorème de représentation de Riesz et de projection qu'on rappelle ici :

Théorème 84.28 (Théorème de projection sur un convexe fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H. Alors, $\forall x \in H$ il existe un unique élément de C qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé la projection de x sur C est il est noté $p_C(x)$. On a ainsi*

$$\forall y \in C, \|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\|.$$

L'élément $p_C(x)$ est de plus caractérisé par

1. $p_C(x) \in C$
2. $\forall y \in C, Re\left(\langle x - p_C(x) | y - p_C(x)\rangle\right) \leq 0.$

Théorème 84.29 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Étant donné $\phi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, (\phi, v) = \langle f, v\rangle,$$

de plus, on a

$$|f| = \|\phi\|.$$

On peut, à partir de ces deux théorèmes, donner le théorème de Stampacchia, qui peut parfois servir à prouver l'existence et l'unicité d'une solution au problème d'optimisation :

Théorème 84.30. *Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe fermé et non vide. Étant donné $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$\forall v \in K, a(u, v - u) \geq (\phi, v - u).$$

De plus, si a est supposé symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\begin{gathered} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u,u) - (\phi, u) = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - (\phi, v)\right\} \end{gathered}$$

et on en déduit le théorème de Lax-Milgram.

Dans certains cas d'optimisation avec contrainte, on peut aussi utiliser le théorème des extrêma liés.

Théorème 84.31. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et $h : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f admet un minimum local en x^* sur l'ensemble K et que la famille $\nabla h_1(x^*), \cdots, \nabla h_p(x^*)$ est libre. Alors il existe un p-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ appelés* multiplicateurs de Lagrange *tels que*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \nabla h_k(x^*) = 0$$

Remarque. Voir dans *Rouvière* ou *Objectif Agrégation* pour l'interpération géométrique des multiplicateurs de Lagrange.

Remarque. On peut aussi parler de la méthode des moindres carrés, mais ça sera traité dans une des questions suivantes.

Aspects pratiques : Algorithmes

On va parler principalement de la méthode de Newton et de la méthode du gradient. La méthode de Newton est détaillée dans un développement et elle ne peut s'appliquer que dans le cas où on chercher un point tel que $J(u) = 0$ (si J est supposée positive, ça sera un minimum et c'est pour ça qu'on la cite ici : en pratique elle est assez utilisée).

Définition 84.32 (Méthode de Newton)**.** On suppose qu'on veut résoudre numériquement un système de la forme $f(u) = 0$ où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que dans un ouvert donné, la solution u existe, est unique et vérifie que $Df(u)$ est inversible. On peut alors approcher u par l'algorithme de Newton qui s'écrit

$$\begin{aligned} x^0 &\in \mathbb{R}^n \\ x^{j+1} &= x^j - (DF(x^j))^{-1} f(x^j). \end{aligned}$$

Cette méthode converge quadratiquement, c'est très rapide en pratique. Mais c'est difficile en grande dimension du fait de l'inversion de matrice à faire.

On va maintenant s'intéresser aux méthodes de descente. L'algorithme général d'une méthode de descente est

Définition 84.33 (Méthode de descente)**.**
- On se donne u^0 arbitraire.
- u^n étant supposé connu, on définit une direction de descente d^n (le choix de la direction de descente dépendra de la méthode) et un pas optimal associé μ^n donné par
$$J(u^n - \mu^n d^n) = \inf_{\mu \in \mathbb{R}} J(u^n - \mu d^n).$$
- On pose alors $u^{n+1} = u^n - \mu^n d^n$.

Dans toute la suite, J sera supposée différentiable et fortement convexe. On suppose de plus que le gradient de J est localement lipschitzien. Les résultats de convergence qui suivent sont faux si on ne fait pas cette hypothèse.
On peut parler de méthode de relaxation, de méthode du gradient à pas optimal, de méthode du gradient à pas fixe et il y a des théorèmes de convergence à chaque fois.

Dans le cas de problèmes avec contrainte, on peut utiliser des méthodes de pénalisation qui forcent à s'éloigner artificiellement du bord lors de la résolution algorithmique (on ne rencontre des problèmes que quand l'extremum est sur la frontière de U car sinon on se ramène au cas $U = V$ en quelques itérations puisque tout converge vers la solution : on reste dans un vosinage de la solution au bout de quelques itérations).

84.5 L'équation de transport linéaire $1D$: existence, unicité, approximation numérique ?

Pour cette question, voir *Rappaz-Picasso* et *Di Menza.*

L'équation de transport en dimension 1 se pose de la manière suivante :
Soient deux fonctions $c : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow c(x,t) \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow f(x,t) \in \mathbb{R}$ continues et $u_0 : x \in \mathbb{R} \longrightarrow w(x) \in \mathbb{R}$ donnée. Il s'agit de trouver une fonction :

$$u : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow u(x,t) \in \mathbb{R}$$

telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$$

avec la condition initiale

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) = u_0(x)$$

c correspond à la vitesse. Cette équation modélise des phénomènes de transport tels que le transport de flux de voitures sur des routes.

Existence et unicité des solutions

On commence par considérer le cas plus simple où $c(x,t) = c$ est une fonction constante et le terme de droite de l'équation est nul ($f(x,t) = 0$). Le problème que l'on obtient s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0 = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{84.1}$$

La solution sera cherchée dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Dans ce cas, il est possible de trouver la solution exacte en utilisant la *méthode des caractéristiques* qui consiste à trouver des trajectoires $x(t)$ telles que $f(t) = u(x(t), t)$ reste constante. On écrit :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + x'(t)\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui nous amène à poser $x'(t) = c$ et $x(0) = \xi$ fixé dans $\mathbb{R}$. Ainsi $x(t) = \xi + ct$ est une trajectoire telle que $u(\xi + ct, t) = u_0(\xi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 84.34. *La solution problème 84.1 est donnée par*

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, u(x, t) = u_0(x - ct)$$

On voit que le graphe de la solution de 84.1 se déduit du graphe de u_0 part une translation horizontale de vecteur de norme ct et orienté dans le sens du vecteur de base de l'axe des abscisses. Ainsi, la solution gardera à un instant t donné les mêmes propriétés (et c'est spécifique à l'équation de transport !)

On peut aussi, pour résoudre le problème 84.1 utiliser une méthode basée sur les transformées de Fourier. Il faut supposer que u et toutes ses dérivées admettent des transformées de Fourier en espace à tout instant t. On peut alors écrire, en notant $\mathcal{F}_x$ la transformée de Fourier en espace :

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mathcal{F}_x(0) = 0.$$

En utilisant les formules de dérivation des transformées de Fourier, que l'on rappelle ici

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\cdot, t) \\ \mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t)\right) &= i\hat{u}(\cdot, t) \end{aligned}$$

on peut transformer le problème 84.1 en une équation différentielle ordinaire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\hat{u}(\xi, t) + ic\xi\hat{u}(\xi, t) = 0$$

avec la condition initiale $\mathcal{F}u(., 0) = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On peut résoudre explicitement : pour tous $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-ict\xi}\hat{u}_0(\xi)$$

Et grâce à la formule d'inversion de Fourier, on retrouve $u(x,t) = u_0(x-ct)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dans le cas de vitesses non constantes, on peut encore utiliser la méthode des caractéristiques, mais l'équation différentielle de la caractéristique ne donne pas forcément de solutions définies sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ car les solutions de l'équation différentielle ne sont pas nécessairement globales. Cependant, la méthode des caractéristiques donne (avec de bonnes hypothèses de régularité sur $c(x,t)$) donne l'existence et l'unicité de la solution, dont on connaît une solution à condition de connaître l'équation des caractéristiques définie par

$$x'(t) = c(x,t), x(0) = \xi$$

des exemples sont traités dans *Di Menza*.

La méthode des transformées de Fourier s'applique parfois aussi, mais dans un cas général la transformée de Fourier $\mathcal{F}\left(c(\cdot,t)\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\right)$ donnera un produit de convolution et l'équation obtenue en variables de Fourier ne pourra pas, en général, être résolue explicitement.

On peut maintenant s'intéresser au cas où l'équation de transport est posée sur un domaine borné $\Omega =]a,b[\in \mathbb{R}$. Le problème devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in]a,b[, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]a,b[\end{cases} \tag{84.2}$$

avec u_0 fonction donnée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. On peut toujours employer la méthode des caractéristiques, mais les solutions ne seront définies que pour les solutions dont le pied de la caractéristique est dans $]a,b[$. Sinon, il faut mettre des conditions sur les droites $x = a$ ou $x = b$ selon que les caractéristiques qui passent par le domaine $]a,b[\times\mathbb{R}$ coupent les droites $x = a$ ou $x = b$ (voire les deux).

Proposition 84.35. *La solution de l'équation de transport existe et est unique.*

Ca peut se voir avec la méthode des caractéristiques : en se plaçant en un point (x,t) et en cherchant si il y a plusieurs solutions au système qui passent par (x,t), on montre avec le théorème des fonctions implicites que la solution peut être paramétrée en $(x(t),t)$ au voisinage de (x,t). Ensuite la démonstration de la méthode des caractéristiques peut permettre de conclure. La méthode des transformées de Fourier, lorsqu'elle fonctionne, permet d'obtenir l'existence et l'uncité des solutions. Mais lorsque le problème n'est pas explicitement résoluble en Fourier, ça ne permet pas de conclure.

Question. Si on décide de mettre $-c$ à la place de c, que se passe-t-il ?

Réponse. Les caractéristiques sont dans *l'autre sens* avec la même démonstration sur la méthode des caractéristiques.

Si on a un second membre non nul f dans l'équation, on doit en plus intégrer f pour la méthode des caractéristiques. On fait la même démonstration et on obtient un système différentiel qui s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + X'(t)\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, X(t))$$

et on avait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, X(t))$$

On soustrait les deux, et on obtient quoi ?

Méthodes numériques pour l'équation de transport

Pour résoudre numériquement l'équation de transport, on utilise des schémas aux différences finies. Dans *Rappaz-Picasso* il y a l'explication du schéma explicite centré, mais il est instable. On donne ici le schéma explicite décentré qui est stable. On note h le pas de discrétisation en espace et τ le pas de discrétisation en temps. On peut dont noter $x_j = jh$ et $t_n = n\tau$. On note aussi $u_j^n \cong (x_j, t_n)$ l'approximation de la solution u au point x_j et au temps t_n. Le schéma décentré s'écrit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + (c_j^n)^+ \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + (c_j^n)^- \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = f(x_j, t_n)$$

où

$$(c_j^n)^+ = \begin{cases} c(x_j, t_n) & \text{si } c(x_j, t_n) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(c_j^n)^- = \begin{cases} c(x_j, t_n) & \text{si } c(x_j, t_n) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut écrire ce schéma comme un schéma décentré ou un schéma centré en fonction du signe de $c(x_j, t_n)$. Il s'agit d'un schéma explicite et on trouve une condition CFL pour assurer sa convergence.

Ce schéma est consistant d'ordre 1. Savoir ce que ça signifie.

La condition CFL apparait sur la matrice (pour le schéma explicite avec une vitesse $c > 0$ constante) :

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda a & -\lambda a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda a \\ & & & 1+\lambda a \end{pmatrix}$$

et on a

$$U^n = AU^{n-1} = A^n U^0$$

et la condition $|\lambda a| < 1$ apparait pour avoir stabilité des valeurs propres de la matrice ($\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Il existe d'autres schéma pour résoudre l'équation de transport : Lax, Lax-Wendroff, saute-mouton...

84.6 Équations de Laplace et de la chaleur : existence, unicité, approximation numérique ?

Pour les résultats théoriques, voir *Di Menza*, pour les résultats numériques c'est dans *Rappaz Picasso*

Équation de Laplace

L'équation de Laplace s'écrit, de manière très générale sous la forme

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = f & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{84.3}$$

avec f continue sur $\partial\Omega$ et où u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$. u est alors dite harmonique sur Ω.

Dans le cas $n = 1$, on obtient une équation différentielle ordinaire du second ordre, le théorème de Cauchy-Lipschits nous assure, pour une condition initiale donnée l'existence d'une solution unique. On peut l'écrire explicitement en intégrant deux fois l'équation (même si l'intégrale n'est pas forcément calculable dans le cas où il y a un second membre).

Dans le cas $n = 2$ on peut passer par les fonctions holomorphes pour résoudre le problème. En effet, la partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique.

Dans un cas très général, on a le résultat d'unicité suivant pour les solutions :

Proposition 84.36. *Il existe au plus une solution du problème 84.3 dans* $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$.

Le cas général est très compliqué. On va donner quelques outils d'étude dans les cas où Ω est un rectangle et un disque.

Équation de Laplace dans un rectangle

On pose $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$ et les conditions au bord suivantes pour le problème 84.3 :

$$\begin{array}{lll} u(x_1, 0) = f_1(x_1) & u(x_1, L_2) = f_2(x_1) & x_1 \in [0, L_1] \\ u(0, x_2) = g_1(x_2) & u(L_1, x_2) = g_2(x_2) & x_2 \in [0, L_2] \end{array}$$

Par un changement de variables, il est possible de considérer le cas où les conditions initiales sont nulles dans les coins. Ensuite, on pose $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ et on cherche chaque u_i comme solution du problème précédent avec seulement la condition sur un seul bord qui est non nulle. La somme vérifiera donc le problème précédent en entier, par linéarité.
Pour résoudre chacun des problèmes u_i, on utilise la séparation des variables : $u_i(x_1, x_2) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)$ et on a alors :

$$\Delta u_i(x_1, x_2) = \phi_1''(x_1)\phi_2(x_2) + \phi_1(x_1)\phi_2''(x_2)$$

Si on suppose que ϕ_1 et ϕ_2 ne s'annulent pas identiquement, on a alors :

$$\frac{\phi_1"(x_1)}{\phi_1(x_1)} = -\frac{\phi_2''(x_2)}{\phi_2(x_2)} = \lambda$$

où λ est une constante réelle car chacun des deux termes ne dépend que de x_1 ou que de x_2. On a alors deux équations différentielles découplées qui s'écrivent

$$\begin{cases} \phi_1''(x_1) - \lambda\phi_1(x_1) = 0 & x_1 \in]0, L_1[\\ \phi_2''(x_2) - \lambda\phi_2(x_2) = 0 & x_2 \in]0, L_2[\end{cases}$$

Et, même si les calculs sont un peu compliqués, cela permet de trouver une solution. On remarque que l'équation de Laplace a un effet régularisant à l'intérieur du domaine condidéré : la solution u définie est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathring{\Omega}$.

Si on regarde le problème en dimension 1 avec des conditions de Dirichlet, on se place sur $]\alpha, \beta[$ et on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(\alpha) = c \\ u(\beta) = d \end{cases}$$

alors on obtient $u(x) = ax + b$ et on trouve a et b en fonction des conditions au bord. On a donc unicité de la solution.

En général, en dimension 2, l'unicité n'est plus vraie. On pose, en prenant une condition au bord constante égale à 0 et un ouvert $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ sur } \Omega$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On cherche u à variables séparées. On écrit $u(x,y) = \phi(x)\psi(y)$ et on a

$$\begin{cases} \phi''(x)\psi(y) + \psi''(y)\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 0, \phi(1) = 0 \\ \psi(0) = 0, \psi(1) = 0 \end{cases}$$

Formellement, $\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y} = K$ constante et donc :

$$\begin{cases} \phi''(x) = K\phi(x) \\ \psi''(y) = -K\psi(y) \\ \phi(0) = 0, \phi(1) = 0 \\ \psi(0) = 0, \psi(1) = 0 \end{cases}$$

On obtient, en supposant $K > 0$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= C\sin(\sqrt{K}t) + D\cos(\sqrt{K}t) \\ \psi(y) &= A\cosh(\sqrt{-K}y) + B\sinh(\sqrt{-K}y) \end{aligned}$$

on obtient des conditions sur la valeur de K, ce qui correspond aux cavités résonnantes en physique.

Équation de Laplace sur un disque

Pour l'équation de Laplace sur un disque, on procède de la même manière en séparant les variables en coordonnées polaires et en résolvant le système obtenu (ça fait encore passer par les séries de Fourier).

Équation de la chaleur

Résolution théorique

Le problème de la chaleur a la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} - \alpha\Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre donné et u_0 une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On cherche une solution u de classe $\mathcal{C}^1$ en temps et $\mathcal{C}^2$ en espace.
Si on cherche à résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace tout entier, le plus simple est d'utiliser la transformée de Fourier. On suppose que u et toutes ses dérivées admettent à tout instant des transformées de Fourier (on peut donc prendre $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$). La fonction $\hat{u}$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\hat{u}(\xi,t) = -\alpha\|\xi\|^2\hat{u}(\xi,t)$$

avec la condition initiale $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n$. Et on a donc explicitement à tout temps

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\alpha\|\xi_\|^2 t}\hat{u}_0(\xi).$$

La formule d'inversion de Fourier, et quelques calculs permettent de revenir à la solution du problème de la chaleur. Le problème de la chaleur a un effet régularisant sur les solutions. La solution de l'équation de la chaleur n'est pas unique en général. Par exemple il existe des solutions non triviales au problème avec $u_0 = 0$ qui sont exponentiellement croissantes à l'infini lorsque $t > 0$. Mais les estimations d'énergie montrent l'uncité dans des espaces de solution physiquement réalistes.

Dans le cas d'une équation de la chaleur en dimension 1 sur un domaine borné, la méthode de séparation des variables peut encore permettre de calculer des solutions au problème. Dans le cas d'une équation de la chaleur en dimension quelconque posée sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, la solution est unique.

On se place maintenant sur un domaine borné en dimension 1. On modélise l'évolution de la chaleur sur un barreau de longueur x et il n'y a pas de chauffage, donc le second membre est nul.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t > 0, x \in [0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,1] \end{cases}$$

On peut résoudre ça en utlisant les séries de Fourier : on calcule les coefficients de Fourier de la solution. On suppose que u est $\mathcal{C}^1$. L'équation est linéaire. Donc on peut écrire le terme général de la série de Fourier. On écrit, en normalisant les sin et cos pour obtenir une fonction 1-périodique :

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)\sin(2n\pi x) + \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n(t)\cos(2n\pi x).$$

On commence par écrire un seul terme de la série de Fourier :

$$a_n(t)\sin(2\pi n x)$$

on a alors

$$a_n'(t)\sin(2\pi n x) + a_n(t)(2\pi n)^2\sin(2\pi n x) = 0$$
$$a_n(t) = a_n(0)e^{-(2\pi n)^2 t}$$

Quand t tend vers $+\infty$ les coefficients tendent vers 0 : la chaleur se dissipe. On a ensuite envie de tout sommer. On peut aussi chercher u sous la forme d'une somme. On écrit :

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(t)\sin(2\pi n x)$$

l'exponentielle assure la convergence normale de la série de Fourier par rapport à x sur $[0,1]$ et par rapport à t sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$, et c'est aussi vrai pour $t=0$ en supposant $u_0 \in \mathcal{C}^1$: la série de fourier converge normalement. En $t=0$, la somme des $a_n(0)\sin(2\pi nx)$ c'est u_0.

Si maintenant on ne suppose plus que u_0 est assez régulière, que se passe-t-il ? Si on prend par exemple $a_n(0)=1$ pour tout n. Alors on a

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-(2\pi n)^2 t}\sin(2\pi nx),$$

il y a convergence normale sur tout compact de $\mathbb{R}_+^* \times [0,1]$ donc $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}j_+ \times [0,1])$. Pour $t \to 0$ on tend vers le peigne de Dirac. La distribution associée en 0 est une somme de Dirac avant de se régulariser. On peut aussi montrer que c'est régularisant en utilisant le noyau de Green et des convolées.

Dans le cas où on a un terme $f \neq 0$ dans le membre de droite, on le développe en série de Fourier pour conclure. La forme de la solution nous dit qu'en temps long la solution existe.

Le problème de poser le problème de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$, c'est que ce n'est pas physique.

Résolution numérique

Pour résoudre l'équation de la chaleur numériquement, on peut utiliser des schémas aux différences finies ou des méthodes d'éléments finis. Nous ne parlerons ici que des schémas aux différences finies. On considère k une constante positive, l'équation de la chaleur que nous allons résoudre est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & \forall x \in]0,1[, \quad \forall t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x,0) = w(x) & \forall x \in]0,1[\end{cases}$$

On commence par discrétiser par rapport à la variable d'espace x. On note N un entier positif, le pas de discrétisation en espace $h = \frac{1}{N+1}$ et $x_i = ih$ avec $i = 0,1,\cdots,N+1$. Soit $u_i(t)$ une approximation de $u(x,t)$ au point $x = x_i$. On note $u_i(t) \cong u(x_i,t), i = 1,\cdots,N$. On considère alors le schéma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u_i(t) + \frac{k}{h^2}\left(-u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t)\right) = f(x_i,t) \quad i = 1,\cdots,N, \quad \forall t>0,$$

$$u_0(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$u_{N+1}(t) = 0 \quad \forall t>0$$

$$u_i(0) = w(x_i) \quad i = 1,\cdots,N.$$

Le problème a maintenant les inconnues $u_i(t), i = 1, \cdots, N$. On note A la matrice tridiagonale

$$A = \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs colonnes $u(t), f(t)$ et w dont les N composantes sont respectivement $u_i(t), f(x_i, t)$ et $w(x_i)$ pour $i = 1, \cdot, N$. Le schéma précédent est alors équivalent au système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u(t) &= Au(t) \quad \forall t > 0 \\ u(0) &= w. \end{aligned}$$

La discrétisation en espace aboutit donc à un système différentiel du premier ordre en temps avec une condition initiale. On peut utiliser des méthodes pour les équations différentielles pour le résoudre. On va parler ici des schémas d'Euler explicite et implicite. On note $\tau > 0$ le pas de temps et $t_n = n\tau$ avec $n = 0, 1, \cdots$ et u^n une approximation de $u(t)$ au temps t_n. On note $u^n \cong u(t_n)$. On considère le schéma d'Euler explicite :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= -Au^n + f(t_n) \quad n = 0, 1, \cdots \\ u^0 &= w. \end{aligned}$$

La résolution de ce système est explicite. Mais on obtient une condition de stabilité. Si on considère le schéma d'Euler implicite

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= -Au^{n+1} + f(t_{n+1}) \quad n = 0, 1, \cdots \\ u^0 &= w. \end{aligned}$$

la résolution est cette fois implicite mais le schéma est inconditionnellement stable.

Pour ce qui est de la résolution numérique, scilab inverse la matrice A en $\mathcal{O}(n)$.

84.7 Équation des ondes $1D$: existence, unicité, approximation numérique ?

Qu'est ce que ça modélise l'équation des ondes ? Ca modélise une corde vibrante par exemple. On obtient l'équation en faisant un bilan de forces sur une portion élémentaire de forces et en appliquant le PFD et en supposant que les points ne se déplacent que verticalement (ça permet de projeter et d'introduire l'équation des ondes 1D).

L'équation des ondes en dimension 1 d'espace s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où u_0 et u_1 sont données. Ce modèle décrit la propagation des ondes à vitesse finie c. On suppose que u admet des dérivées secondes à la fois en temps et en espace, les données initiales u_0 et u_1 sont respectivement choisies dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On a la proposition suivante :

Proposition 84.37. *La fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct) + u_0(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\tau \mathrm{d}\tau\right]$$

est solution de l'équation des ondes 84.7.

En EDP, la première méthode qui vient à l'idée est de séparer les variables. On écrit $u(t,x) = \phi(t)\psi(x)$ et alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \phi''(t)\psi(x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \phi(t)\psi''(x) \\ \phi''(t)\psi(x) &= c^2\phi(t)\psi''(x) \\ \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} &= c^2\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \lambda \text{ constante} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{cases} \phi''(t)\lambda\phi(t) \\ \psi''(x) = \frac{\lambda}{c^2}\psi(x) \end{cases}$$

on a alors, si $a = \sqrt{\lambda}$

$$\begin{cases} \phi(t) = 1\cos(at) + B\sin(at) \\ \psi(x) = A\cos(\frac{a}{c^2}x) + B\sin(\frac{a}{c^2}x) \end{cases}$$

c est homogène à une vitesse et λ à des s^{-2}. On pose les conditions initiales

$$\begin{cases} u(t,0)=0 \\ u(t,L)=0 \end{cases}$$

et donc $u(t,0)=0$ en résolvant.

Il y a plusieurs techniques pour montrer cette proposition : passer le problème en transformée de Fourier, faire le changement de variables $\xi = x+ct, \eta = x-ct$ ou décomposer l'opérateur des ondes de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right\}.$$

Pour cette dernière méthode, on a en l'appliquant à u

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right\} u = 0$$

on commence par résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

les solutions sont les solutions de l'équation de transport : $u_0(x-ct)$ et $u_0(x+ct)$ pour l'autre terme. Puis utiliser la formule de Duhamel si on a un second membre.

Il y a deux classes de solutions, la première se propage à la vitesse c, la seconde à la vitesse $-c$. Il s'agit des deux seules facons de se déplacer à la vitesse c en dimension 1 d'espace. On a, de plus, une vitesse de propagation finie. Enfin, la solution évaluée en (x,t) ne dépendra que des valeurs de u_0 et de u_1 sur l'intervalle $[x-ct, x+ct]$.

Numériquement, l'équation des ondes en dimension 1 d'espace se résout avec une méthode des différences finies. On va la mettre en oeuvre pour le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) & x\in]0,1[, \quad \forall t>0 \\ u(0,t)=0 & \forall t>0 \\ u(1,t)=0, & \forall t>0 \\ u(x,0)=w(x) & x\in]0,1[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x) & x\in]0,1[\end{cases}$$

Comme précédemment, on commence par effectuer une semi-discrétisation en espace. Soit N un entier positif et $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de discrétisation en espace. On pose $x_j = jh$ pour $j = 0, 1, \cdots, N+1$. La semi-discrétisation en espace nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} u_j(t) + c^2 \frac{-u_{j-1}(t) + 2u_j(t) - u_{j+1}(t)}{h^2} &= f(x_j, t) \quad j = 1, \cdots, N, \forall t > 0 \\
u_0(t) = u_{N+1}(t) &= 0 \quad \forall t > 0 \\
u_j(0) &= w(x_j) \quad j = 1, \cdots, N \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u_i(t) &= v(x_j) \quad j = 1, \cdots, N.
\end{aligned}$$

où $u_j(t)$ est alors une approximation de $u(x_j, t)$ pour $j = 1, \cdots, N$. On introduit encore la matrice A

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs colonnes $u(t), f(t), w$ et v dont les N composantes sont respectivement $u_i(t), f(x_i, t), w(x_i)$ et $v(x_i)$ pour $i = 1, \cdot, N$. On peut alors réécrite le système sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} u(t) + c^2 A u(t) &= f(t) \quad \forall t > 0, \\
u(0) &= w \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u(t) &= v.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un système d'ordre 2 et on peut utiliser une discrétisation en temps pour le résoudre. On pose $\tau > 0$ le pas de temps et $t_n = n\tau, n = 0, \cdots$ la discrétisation en temps. On peut alors écrire le schéma suivant, en notant u^n une approximation de $u(t_n)$, soit $u^n \cong u(t_n)$ et $u_j^n \cong u(x_j, t_n)$:

$$\begin{aligned}
\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + c^2 A u^n &= f(t_n) \quad n = 1, 2, \cdots \\
u^0 &= w \\
u^1 &= w + \tau v + \frac{1}{2}\tau^2 \left(f(0) - c^2 A w \right).
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un schéma explicite. Il est stable à la condition $\tau \leq \frac{h}{c}$.

84.8 À quoi servent les séries de Fourier ?

Les séries de Fourier ont une utilité essentiellement théorique dans les problèmes de modélisation : elles permettent d'obtenir l'existence, l'unicité et la forme de solutions de problèmes tels que le problème de la chaleur. Cependant, cette forme, obtenue comme somme des coefficients de Fourier, n'est pas efficace pour calculer des approximations des solutions des problèmes.

Notons que les séries de Fourier ont été introduites pour résoudre théoriquement ce genre de problèmes.

Il est important de connaître les théorèmes de convergence des séries de Fourier (théorème de Dirichlet), la théorie L^2 aussi (théorème de Fejer). Ca permet de considérer des EDP avec des données très peu régulières.

On peut parler du phénomène de Gibbs.

On peut faire des décompositions en série de Fourier avec seulement des sinus en prolongeant les fonctions de façon impaire avant de faire la décomposition en séries de Fourier : on obtient le résultat important suivant

Proposition 84.38. *Les* $\sin(2\pi nx)$ *sont une base hilbertienne de* $L^2(0, \pi)$.

Savoir calculer les décompositions en séries de Fourier de fonctions simples.

84.9 Quelles sont les difficultés rencontrées lors de la résolution de systèmes linéaires. Quelles sont les méthodes disponibles ?

Soit le système linéaire $Au = b$ dans lequel la matrice A est inversible. Il existe deux types de méthodes pour la résolution des systèmes linéaires : les méthodes directes et les méthodes itératives.

Le calcul direct de l'inverse de A est inutile car bien plus coûteux que les méthodes que nous allons présenter ici.

Commençons par dire quelques mots à propos du conditionnenement d'une matrice.
Il existe des matrices A qui n'ont pas de bonnes propriétés de *stabilité des solutions*. Par exemple si on a $Au = b$ alors $Au' = b'$ avec $\|u - u'\|$ petit permet toujours de trouver $\|b - b'\|$ grand. Et d'autres matrices pour lesquelles si la différence entre b et b' est petite, on ne peut pas conclure quand à la différence entre u et u'. C'est embêtant pour le calcul numérique car on procède toujours à partir de valeurs approchées des valeurs qu'on cherche.

Définition 84.39. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée et A une matrice inversible. Le nombre

$$condA = \|A\|\|A^{-1}\|$$

s'appelle le conditionnenment de la matrice A relativement à la norme matricielle considérée.

Le nombre *condA* mesure la sensibilité du système linéaire $Au = b$ vis-à-vis des varitations sur les données A et b, qualité que l'on appelle le conditionnement du système linéaire considéré. On dira qu'un système linéaire est *bien conditionné* (respectivement *mal conditionné*) si son conditionnment est petit (respectivement grand). On a les théorèmes suivants :

Théorème 84.40. *Soit A une matrice inversible et soient u et $u+\delta u$ les solutions des systèmes linéaires*

$$\begin{aligned} Au &= b \\ A(u+\delta u) &= b+\delta b \end{aligned}$$

On suppose que $b \neq 0$. Alors l'inégalité

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

est satisfaite et c'est la meilleure possible : pour une matrice A donnée, on peut trouver des vecteurs $b \neq 0$ et $\delta b \neq 0$ tels qu'elle devienne une égalité.

Théorème 84.41. *Soit A une matrice inversible et soient u et $u+\Delta u$ les solutions du système linéaire*

$$\begin{aligned} Au &= b \\ (A+\Delta A)(u+\Delta u) &= b. \end{aligned}$$

On suppose $b \neq 0$. Alors l'inégalité

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u+\Delta u\|} \leq cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

est satisfaite et c'est la meilleure possible : pour une matrice A donnée, on peut trouver un vecteur $b \neq 0$ et une matrice $\Delta A \neq 0$ tels qu'elle devienne une égalité. On a par ailleurs l'inégalité

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\{1+\mathcal{O}(\|\Delta A\|)\}.$$

Ces deux théorèmes montrent l'intérêt d'une matrice bien conditionnée : ça évite les problèmes lors des calculs numériques. On a encore le théorème suivant pour le conditionnement :

Théorème 84.42. *1. Pour toute matrice A*

$$\begin{aligned} cond(A) &\geq 1 \\ cond(A) &= cond(A^{-1}) \\ cond(\alpha A) &= cond(A) \text{ pour tout scalaire } \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

2. *Pour toute matrice A*
$$cond_2(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)},$$
où $\mu_1(A) > 0$ *et* $\mu_n(A) > 0$ *désignent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de la matrice A.*
3. *Si A est une matrice normale,*
$$cond_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$$
où les nombres $\lambda_i(A)$ *sont les valeurs propres de la matrice A.*
4. *Le conditionnement en norme 2 d'une matrice unitaire ou orthogonale vaut 1.*
5. *Le conditionnement en norme 2 est invariant par transformation unitaire.*

Lorsqu'on a affaire à une matrice mal conditionnée, il peut être intéressant de la pré et post-multiplier par d'autres matrices simples à inverser (triangulaires ou diagonales par exemple) afin de faire baisser son conditionnement et résoudre les systèmes échelonnés ou diagonaux ensuite.

Les méthodes directes

Les méthodes directes consistent à trouver une matrice M inversible telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure, ce qui permettra de résoudre le système par remontée.

La méthode du pivot de Gauss nous donne le théorème suivant :

Théorème 84.43. *Soit A une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure.*

En plus, la méthode de Gauss permet de calculer le déterminant de la matrice en récupérant les coefficients diagonaux de la matrice obtenue. Le coût en calculs de la méthode du pivot de Gauss est

$$\frac{n^3}{3} \text{ additions}$$
$$\frac{n^3}{3} \text{ multiplications}$$
$$\frac{n^3}{2} \text{ divisions}$$

Si on veut utiliser la méthode du pivot, il faut faire attention au choix du pivot (un pivot trop petit augmente les erreurs d'arrondis). La méthode du pivot partiel revient à prendre, dans chaque colonne le plus grand élément en valeur absolue, la méthode du pivos total consiste à prendre le plus grand élément en valeur absolue des colonnes qu'il reste à traiter dans la matrice comme pivot. On multiplie alors la matrice à droite aussi par une matrice de permutation, ce dont il faut tenir compte dans les algorithmes. La méthode du pivot de Gauss nous donne l'existence de la décomposition LU d'une matrice :

Théorème 84.44. *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n telle que les n sous-matrices diagonales*

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n$$

soient inversibles. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{i,j})$ avec $l_{i,i} = 1, 1 \leq i \leq n$, et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A = LU.$$

De plus, une telle factorisation est unique.

Et on peut aussi donner la décomposition LU d'une matrice tridiagonale (c'est dans *Ciarlet*). Pour les équations différentielles avec une équation implicite, la méthode d'Euler implicite par exemple :

$$\begin{aligned} y &= f(t, y) = Ay \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + hAy_{n+1} \\ (I_n - hA)y_{n+1} &= y_n \end{aligned}$$

Si h est petit, alors pivots vont être directement sur la diagonale, on n'a donc pas de recherche de pivot à faire. C'est aussi le cas pour A la matrice de discrétisation des méthodes des différences finies.

Dans certains cas, il est utile de stocker les matrices L et U de la décomposition de la matrice A (par exemple quand on a beaucoup de systèmes à résoudre avec la même matrice). La décomposition LU préserve le profil de la matrice.

Une autre factorisation possible est la méthode de Choleski qui s'applique aux matrices symétriques définies positives :

Théorème 84.45. *Si A est une matrice symétrique définie positive, il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure B telle que*

$$A = B^t B$$

De plus, on peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice B soient tous > 0 et la factorisation correspondante est alors unique.

Pour obtenir la factorisation de Choleski, on part de la factorisation LU de la matrice A. Si on ne suppose pas la positivité des coefficients, on a 2^n pour les choix de B (on a deux choix pour chaque coefficient diagonal : positif ou négatif.

On peut aussi parler de matrices de Householder.

Définition 84.46. H est une matrice de Householder si $H = I_n$ ou $\exists v \in \mathbb{C}^*$ tel que $H = I_n - 2\frac{vv^*}{v^*v}$.

Proposition 84.47. *Soit $a = (a_i) \in \mathbb{C}^N$ tels que $\sum_{i=2}^{n} |a_i| > 0$. Alors il existe deux matrices de Householder telles que*

$$Ha = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où viennent les matrices de Householder (géométriquement) ?

$$\begin{aligned} HH &= (I_n - 2\frac{vv*}{v^*v})(I_n - 2\frac{vv*}{v^*v}) \\ &= I_n - 4\frac{vv^*}{v^*v} + 4\frac{(vv^*)(vv^*)}{(v^*v)(v^*v)} \\ &= I_n \end{aligned}$$

donc H est une symétrie axiale (car H est une involution) par rapport à l'hyperplan orthogonal à v. À partir des matrices de Householder, on peut construire la factorisation QR.

Théorème 84.48. *Étant donné une matrice A d'ordre n, il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que*

$$A = QR.$$

De plus, on peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de la matrice R soient tous ≤ 0. Si la matrice A est inversible, la factorisation correspondante est alors unique.

La décomposition QR fonctionne aussi avec des matrices rectangulaires.
Une autre utilisation de la décomposition QR est la méthode pour trouver toutes les valeurs propres de la matrice. Du point de vue des erreurs d'arrondi, la méthode QR est intéressante car le conditionnement d'une matrice orthogonale est $cond(Q) = \|Q\|\|Q^-1\|$. En prenant la norme euclidienne, c'est 1 car la norme euclidienne d'une matrice orthogonale est 1 (les matrices orthogonales préservent la distance). Donc les matrices orthogonales sont très bien conditionnées (on peut pas faire mieux). Donc toutes les opérations de la décomposition QR, qui se font avec des matrices orthogonales sont très bien conditionnées et n'augmentent pas les erreurs d'arrondi.

Il y a un lien entre la décomposition QR et l'algorithme de Gram-Schmidt : l'algorithme de Gram-Schmidt donne en fait la décomposition QR d'une matrice, même si en fait on obtient Q et R^-1. On peut aussi obtenir la décomposition QR avec les rotations de Givens. En fait, il existe beaucoup de méthodes pour avoir la décomposition QR d'une matrice.

Les méthodes itératives

On veut résoudre $Ax = b$, on cherche B et C tels que $Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + x$.

Les méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires se présentent sous la forme :

$$u_{k+1} = Bu_k + c, k \leq 0, u_0 \text{ vecteur arbitraire}$$

où la matrice B et le vecteur c sont construits à partir de la donnée d'un système linéaire $Au = b$.

Il existe des résultats généraux de convergence des méthodes itératives (par exemple dans *Ciarlet* et plus loin). L'idée générale de ces méthodes est : étant donné un système linéaire $Au = b$, on suppose qu'on peut écrire une décomposition de A comme $A = M - N$, où M est une matrice inversible considérée comme *facile à inverser* (par exemple : diagonale, triangulaire ou, au pire, triangulaire par blocs). On obtient alors l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & Au = b \\ \Leftrightarrow\ & Nu = Nu + b \\ \Leftrightarrow\ & u = M^{-1}Nu + M^{-1}b, \end{aligned}$$

la dernière équation peut aussi s'écrire $u = Bu + c$ avec $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$, on peut donc lui associer une méthode itérative

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b.$$

La méthode itérative converge si $|\rho(M^{-1}N)| < 1$.

Dans le cas de la méthode de Jacobi on écrit $A = D - E - F$ où

$$\begin{aligned}(D)_{i,j} &= a_{i,j}\delta_{i,j}\\ (-E)_{i,j} &= a_{i,j} \text{ si } i > j, 0\text{autrement}\\ (-F)_{i,j} &= a_{i,j} \text{ si } i < j, 0\text{autrement}\end{aligned}$$

(ce qui revient à avoir $M = D$, $N = E+F$.) La méthode de Jacobi itérative s'écrit alors

$$u_{k+1} = D^{-1}(E+F)u_k + D^{-1}b.$$

Avec la même décomposition de la matrice A, on peut aussi écrire la méthode de Gauss-Seidel :

$$\begin{aligned}Du_{k+1} &= Eu_{k+1} + Fu_k + b\\ \Leftrightarrow u_{k+1} &= (D-E)^{-1}Fu_k + (D-E)^{-1}b, k \geq 0.\end{aligned}$$

On peut penser à faire intervenir un paramètre $\omega > 0$ dans la méthode itérative. On obtient par exemple la méthode de *relaxation* qui s'écrit en prenant cette fois $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$:

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$$

Ces méthodes ont la caractéristique d'être *par points*. On peut définir leurs analogues *par blocs*.

On a le théorème suivant pour la convergence des méthodes itératives dans un cas général :

Théorème 84.49. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *La méthode itérative est convergente.*
2. $\rho(B) < 1$
3. $\|B\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle* $\|\cdot\|$.

et le théorème pour la vitesse de convergence

Théorème 84.50. 1. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme vectorielle quelconque et soit* u *tel que*

$$u = Bu + c.$$

On considère la méthode itérative

$$u_{k+1} = Bu_k + c, k \geq 0$$

Alors

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\|u_0-u\|=1}\|u_k - u\|^{1/k}\right) = \rho(B).$$

2. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme vectorielle quelconque, et soit* u *tel que*

$$u = Bu + c = \tilde{B}u + \tilde{c}.$$

On considère les méthodes itératives

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1} &= \tilde{B}\tilde{u}_k + \tilde{c}, k \geq 0 \\ u_{k+1} &= Bu_k + c, k \geq 0 \end{aligned}$$

avec

$$\rho(B) < \rho(\tilde{B}),\ u_0 = \tilde{u}_0.$$

Alors, $\forall \epsilon > 0, \exists l(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$k \geq l(\epsilon) \Rightarrow \sup_{\|u_0 - u\| = 1} \left(\frac{\|\tilde{u}_k - u\|}{\|u_k - u\|} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B) + \epsilon}.$$

Pour les méthodes que nous venons d'exposer, il y a des théorèmes plus spécifiques :

Théorème 84.51. *Soit* A *une matrice hermitienne définie positive, décomposée sous la forme :*

$$A = M - N$$

avec M *une matrice inversible. Si la matrice hermitienne* $M^* + N$ *est définie positive alors*

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

Théorème 84.52 (Condition suffisante de convergence de la méthode de relaxation)**.** *Si la matrice* A *est hermitienne définie positive, la méthode de relaxation converge si* $0 < \omega < 2$.

Théorème 84.53 (Condition nécessaire de convergence de la méthode de relaxation)**.** *La méthode de relaxation ne peut converger que si* $\omega \in]0, 2[$.

Théorème 84.54 (Comparison des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel)**.** *Pour une matrice tridiagonale par blocs, les deux méthodes convergent simultanément. Lorsqu'elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que la méthode de Jacobi.*

Remarque. Résoudre $Ax = b$ avec A symétrique définie positive revient à minimiser $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ ce qui permet de revenir aux méthodes d'optimisation.

Dans quels cas on utilise les méthodes itératives à la place des méthodes directes ? Quand on a des matrices de grande taille, les méthodes itératives peuvent être beaucoup plus rapides que les méthodes directes. On peut donner la formule de la vitesse de convergence pour les méthodes itératives (on la calcule en fait). On a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n + c \\ x &= Bx + c \\ x_{k+1} - x &= B(x_k - x) \\ \|x_{k+1} - x\| &\leq \|B\|^k \|x_0 - x\| \end{aligned}$$

Et en général, on a toujours $\rho(B) \leq \|B\|$ en effet en notant x le vecteur propre associé à la valeur propre qui vaut $\rho(B)$ en module on a

$$\begin{aligned} Bx &= \rho(B)x \\ \frac{\|Bx\|}{\|x\|} &= \|\rho(B) \leq \|B\|. \end{aligned}$$

On peut sinon démontrer que, $\forall \epsilon > 0$ il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ telle que $\|B\| \leq \rho(B) + \epsilon$. On a aussi $\rho(B) = \liminf_k \|B^k\|^{1/k}$. Du coup, l'erreur vérifie

$$\|x_{k+1} - x\| \leq (\rho(B) + \epsilon)^k \|x_k - x\|.$$

Si $\rho(B)$ est très proche de 1, la convergence est lente.

84.10 Comment résoudre un problème aux valeurs propres ? Difficultés et méthodes.

Comme dans le cas des systèmes linéaires, il faut considérer le conditionnement du problème aux valeurs propres : en effet, une petite perturbation sur la matrice de départ peut tout à fait entraîner de grosses modifications sur ses valeurs propres. On a le théorème suivant :

Théorème 84.55. *Soit A une matrice diagonalisable et P une matrice telle que*

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_i)$$

et $\|\cdot\|$ une norme matricielle telle que

$$\|diag(\lambda_i)\| = \max_i |\lambda_i|$$

pour toute matrice diagonale. Alors, pour toute matrice δA,

$$sp(A + \delta A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

où

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}; |z - \lambda_i| \leq cond(P)\|\delta A\|\}.$$

Nous allons nous intéresser à la méthode de la puissance et à la méthode de la puissance inverse qui sont les méthodes les plus simples à mettre en oeuvre algorithmiquement. Elles sont décrites dans *Rappaz-Picasso* et les paragraphes suivants sont très exactement ceux qui sont en en-tête des TP de modélisation faits en classe. On considère une matrice carrée A réelle ou complexe dont on recherche les valeurs et vecteurs propres.

La *méthode de la puissance* permet d'approcher la plus grande valeur propre en module de A (si cette dernière est unique. Et sinon, il suffit de considérer la matrice $A + \epsilon I$ et de décaler les valeurs propres de la quantité ϵ), elle consiste à construire la suite de vecteurs définie par

$$x^{n+1} = \frac{Ax^n}{\|Ax^n\|}$$

avec x^0 un vecteur de départ (presque) quelonque. On a le résultat suivant : pour presque tout x^0 la suite x^n converge (ce n'est pas le terme exact) vers une direction associée à la plus grande valeur propre en module. Cette dernière peut être approchée en considérant les quotients $\frac{(Ax^n)_i}{x_i^n}$ pour les composantes non nulles x_i^n de x^n. Dans le cas d'une matrice A symétrique, on peut ensuite estimer la seconde valeur propre de A en module en projetant à chaque étape sur l'orthogonal de la direction trouvée précédemment (c'est la *méthode de déflation*). Toutefois, on ne peut répéter l'opération que pour un petit nombre de vecteurs propres. Si le vecteur de départ est orthogonal à la direction du vecteur propre qu'on cherche ne fonctionne pas. Mais si on tire au hasard un vecteur de départ, la probabilité que ça ne marche pas est 0. Si la valeur propre de plus grand module est de multiplicité 2, que se passe-t-il pour la méthode de la puissance ? La valeur propre sort bien, mais pour le vecteur propre, la suite des approximations de vecteurs propres ne convegent plus, mais les composantes de cette suite de vecteurs dans par rapport aux autres vecteurs propres tendent vers 0 : on va vers un vecteur qui est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre qu'on cherche.

Par ailleurs, la méthode de la puissance appliquée à A^{-1} (lorsque A est inversible) permet de considérer la plus petite valeur propre en module de A. On peut aussi considérer $(A - \mu I)^-1$ pour estimer la valeur propre la plus proche de $\mu \in \mathbb{C}$.

Dans le cas où on a deux valeurs propres distinctes de plus grand module, c'est d'ailleurs cette méthode qui nous permet de résoudre le problème.

Si l'on souhaite obtenir toutes les valeurs propres de la matrice A et pas seulement les quelques plus grandes ou plus petites, on peut utiliser la méthode QR qui consiste à construire la suite de matrices A_n par récurrence

$$\begin{aligned} A_0 &= A \\ \forall n \geq 0, A_n &= Q_n R_n (\text{ décomposition QR de } A_n) \\ A_{n+1} &= R_n Q_n \end{aligned}$$

La matrice A devient triangulaire supérieure (mais la suite A_n est en général non convergente), sa diagonale tendant vers les valeurs propres de A. Pour obtenir les vecteurs propres associés, on peut utiliser une méthode de la puissance inverse avec translation. Cette méthode est détaillée dans *Ciarlet*. La méthode QR donne un résultat pour toute matrice carrée A. Mais il n'y a toujours pas de démonstration.

Il existe aussi une autre méthode : la *méthode de Jacobi*.

L'utilisation de la matrice compagnon d'un polynôme permet de transformer la recherche de zeros d'un polynôme en recherche de valeurs propres. On écrit

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

on a alors

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On peut trouver les zéros de P en calculant les valeurs propres de C_p car $\Xi_{C_p} = P$.

84.11 Comment résoudre numériquement un système d'équations non-linéaires ?

On considère

$$F(x) = 0$$

où $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ n'est pas forcément linéaire (même dans ce paragraphe, forcément non linéaire). On fait une liste des méthodes possibles :

1. Les méthodes de type Newton, qui ont des propriétés de convergence quadratique. Par contre, ça implique de savoir calculer le jacobien de F et de savoir l'inverser. Il faut connaître les schémas qui vont avec Newton.

2. Méhode de la sécante (mais c'est en dimension 1 seulement).
3. Méthode de la corde ou quasi-Newton qui a l'avantage de ne calculer qu'une fois la différentielle et ne l'inverser qu'une seule fois. Mais d'un point de vue mathématique, ça ne converge plus de manière quadratique. En pratique ça va quand même.
4. En transformant un peu le problème, on peut éventuellement écrire une méthode de point fixe. Si λ est donné, on pose $G(X) = X - \lambda F(X)$ et alors $G(x) = X \Leftrightarrow F(X) = 0$. Et on peut en général prendre λ pour que G vérifie les hypothèses du point fixe.
5. On peut aussi se ramener à une méthode de type gradient (en considérant la norme de F). Il faut aussi savoir faire un dessin.

Pour toutes ces méthodes, il faut connaître les conditions pour avoir la convergence.

84.12 C'est quoi les moindres carrés ? Dans quelles situations est-ce utile ?

C'est pour les systèmes linéaires avec beaucoup plus d'équations que d'inconnues, on cherche à minimiser la norme euclidienne de $Ax - b$. Si A est de rang maximal, il y a une unique solution au problème de minimisation. (Il faut savoir faire les calculs qui vont avec). Si on multiplie par A^T, on se ramène un système $A^TA = A^Tb$ et là c'est cool parce que on a une matrice carrée et on peut retomber sur une méthode de résolution de systèmes linéaires carrés. Il faut absolument connaître l'interprétation géométrique de la méthode des moindres carrés. Les moindres carrés sont très utilisés pour les régressions linéaires, mais on peut aussi les utiliser pour des matrices de plus grande taille.
Il est aussi intéressant de se demander ce que devient la décomposition QR de A dans ce cadre.