

1 Quelques commentaires

Le développement rentre dans les leçons 158,171,170,214,215. Éventuellement 191.
Il est tiré du Petit Guide du Calcul Différentiel de Rouvière, exercices 66,109 et 114.
Il contient 3 parties : Lemme de réduction \mathcal{C}^1 des formes quadratiques, le lemme de Morse puis une application en géométrie.
Il contient des éléments d'analyse (Formule de Taylor, inversion locale, différentielle) ainsi que des éléments d'algèbre et de géométrie (réduction des formes quadratiques réelles et signature, application à l'étude d'un point double). Le développement est long, pour une leçon d'analyse on peut omettre l'application à la géométrie. En revanche, celle-ci est essentielle pour les leçons d'algèbres car non seulement elle illustre géométriquement le théorème qui est plutôt analytique dans son énoncé et sa démonstration, mais aussi elle souligne l'importance de la signature : ce développement sans l'application peut être considéré hors-sujet dans une leçon d'algèbre. Pour cette raison, il convient d'être précis durant la défense du plan pour détailler ce qui va être présenté dans le développement.

2 Le développement

2.1 Lemme de réduction \mathcal{C}^1 des formes quadratiques

Lemme 2.1

On note \mathcal{S}_n l'espace des matrices symétriques réelles de taille $n \in \mathbb{N}$, et on prend A dans \mathcal{S}_n inversible. On dispose alors d'un voisinage \mathcal{W} de A_0 dans $\mathcal{S}_n \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et une application :

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{W} &\rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto M\end{aligned}$$

Où M est telle que : $A = {}^t M A_0 M$. De plus, ψ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur son image.

On commence par définir l'application :

$$\begin{aligned}\alpha : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}_n \\ M &\mapsto {}^t M A_0 M\end{aligned}$$

L'application α est de classe \mathcal{C}^1 comme produit et composée de telles applications. On a, par différentiation d'une application bilinéaire :

$$d\alpha(I) \cdot H = {}^t H A_0 + A_0 H = {}^t(A_0 H) + A_0 H$$

Où I est la matrice identité de taille n et H est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient les espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_0 M \text{ anti-symétrique}\} \\ \mathcal{G} &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_0 M \text{ symétrique}\}\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\ker(\alpha(I)) = \mathcal{F}$. De plus, on a : $\mathcal{F} \cong \mathcal{S}_n$ par la translation par A_0 . De même, \mathcal{G} est isomorphe à l'espace des matrices anti-symétriques. Comme : $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, on a : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Ainsi, on considère $\alpha|_{\mathcal{G}}$, qu'on appelle toujours α par abus de notation.

On a alors : $d\alpha(I) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ donc par théorème d'inversion locale, on dispose d'un voisinage \mathcal{W} de A_0 dans $\mathcal{S}_n \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ (quitte à le restreindre encore car $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert) et d'un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme :

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{W} &\rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto M\end{aligned}$$

Où M est telle que : $A = {}^t M A_0 M$. L'espace d'arrivée de ψ est bien $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ puisque A_0 et A sont inversibles.

2.2 Lemme de Morse

Théorème 2.2

Soit \mathcal{U} un voisinage ouvert de l'origine dans \mathbb{R}^n , n un entier naturel, et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose que l'origine est un point critique quadratique non dégénéré, i.e $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est une matrice symétrique réelle non dégénérée de signature $(p, n - p)$. Alors on dispose de deux voisinages \mathcal{U}_0 et \mathcal{V}_0 de l'origine et d'un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U}_0 &\rightarrow \mathcal{V}_0 \\ x &\mapsto \phi(x) =: y = (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

tels que :

$$\forall x \in \mathcal{U}_0, f(x) = f(0) + y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$$

Soit x dans \mathcal{U} . On commence par écrire le développement de Taylor avec reste intégral puisque f est de classe \mathcal{C}^3 :

$$f(x) = f(0) + {}^t x \int_0^1 (1-t) d^2 f(tx) dt =: f(0,0) + {}^t x Q(x)x$$

L'application Q ainsi définie est de classe \mathcal{C}^1 par théorème de dérivation sous le signe intégral, puisque f est de classe \mathcal{C}^3 . En particulier, Q est une application continue.

Soient ψ et \mathcal{W} définis dans le lemme précédent avec $A_0 := Q(0)$, ce qui est possible car $Q(0) = \frac{1}{2} d^2 f(0)$ qui est bien symétrique réelle et inversible.

Puisque Q est continue, on dispose d'un voisinage \mathcal{U}_0 tel que, pour $t \in \mathcal{U}_0$, $Q(t) \in \mathcal{W}$. De plus, par l'expression de $Q(0)$ obtenue précédemment, on dispose d'une matrice M_0 telle que ${}^t M_0 Q(0) M_0 = I_{p, n-p}$. Ainsi, on obtient en composant l'application ψ à l'application Q :

$$\begin{aligned} M : \mathcal{U}_0 &\rightarrow \mathcal{V}_0 \\ x &\mapsto M_0 \psi \circ Q(x) \end{aligned}$$

où \mathcal{V}_0 est l'image de \mathcal{U}_0 par l'application M . Ceci donne donc, pour $x \in \mathcal{U}_0$: ${}^t x Q(x)x = {}^t (x M(x)) I_{p, n-p} M(x)x$. En posant $y := \phi(x) := M(x)x$, on obtient finalement :

$$f(x) = f(0) + y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$$

Finalement, l'application $\phi : x \mapsto M(x)x$ est de classe \mathcal{C}^1 comme composée de telles applications (puisque M_0 est inversible), et on a par dérivée d'un produit : $d\phi(0) = M(0)$ qui est inversible. Par théorème d'inversion locale, quitte à restreindre \mathcal{U}_0 et \mathcal{V}_0 , ϕ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

2.3 Une application en géométrie

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^3 d'un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . On suppose que $df(0,0) = 0$, $f(0,0) = 0$ et que la signature de $d^2f(0,0)$ est $(+,-)$. D'après le lemme de Morse, on dispose d'un changement de coordonnées entre deux voisinages \mathcal{U}_0 et \mathcal{V}_0 de l'origine $\phi : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathcal{U}_0$, $f(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2 = (u(x, y) + v(x, y))(u(x, y) - v(x, y))$. On cherche à montrer que la courbe \mathcal{C} définie par $f(x, y) = 0$ admet deux tangentes en $(0, 0)$, et à calculer l'équation de ce couple de tangentes.

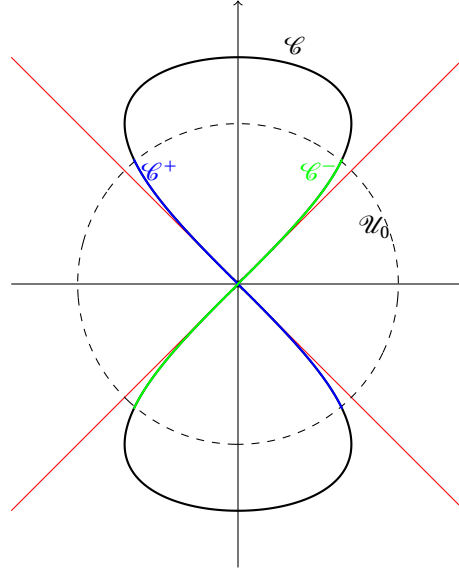


FIGURE 1 – Courbe d'équation $x^2 - y^2 + y^4/4 = 0$ et son couple de tangente en $(0,0)$

Ainsi, la courbe \mathcal{C} (plus précisément son intersection avec \mathcal{U}_0) s'écrit comme union des deux courbes \mathcal{C}^+ d'équation $u(x, y) + v(x, y) = 0$ et \mathcal{C}^- d'équation $u(x, y) - v(x, y) = 0$ dans le voisinage \mathcal{U}_0 .
On cherche alors d'éventuelles tangentes à chacune de ces courbes.

On commence par écrire la différentielle de ϕ en $(0,0)$ en fonction de u et v :

$$d\phi(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(0,0) & \partial_y u(0,0) \\ \partial_x v(0,0) & \partial_y v(0,0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$d(u+v)(0,0) = (a+c, b+d)$$

La matrice $d\phi(0,0)$ étant inversible puisque ϕ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, $d(u+v)(0,0)$ est inversible, donc la tangente en $(0,0)$ à la courbe \mathcal{C}^+ existe et est la droite d'équation :

$$(a+c)x + (b+d)y = 0$$

(resp. $(a-c)x + (b-d)y = 0$ pour \mathcal{C}^-)

Ainsi, la courbe \mathcal{C} a un couple de tangentes en l'origine, d'équation :

$$((a+c)x + (b+d)y)((a-c)x + (b-d)y) = 0$$

i.e. :

$$(ax + by)^2 - (cx + dy)^2 = 0$$

Or on peut écrire : $u(x, y) = ax + by + o(\|(x, y)\|)$ (resp. $v(x, y)$) donc :

$$u(x, y)^2 - v(x, y)^2 = (ax + by)^2 - (cx + dy)^2 + o(\|(x, y)\|^2)$$

On reconnaît au membre de gauche l'expression de $f(x, y)$ donnée par le lemme de Morse, et l'équation du couple de tangente à \mathcal{C} en l'origine au membre de droite. Par unicité du développement de Taylor à l'ordre 2, on trouve que l'équation du couple de tangentes en l'origine de \mathcal{C} est donnée par les termes d'ordre 2 de la série de Taylor de f .
Autrement dit, le couple de tangentes a pour équation :

$$\partial_{x^2} f(0,0)x^2 + \partial_{xy} f(0,0)xy + \partial_{y^2} f(0,0)y^2 = 0$$