Étude de la loi Gamma

2013 – 2014

Soit $a > 0$ et $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi $\Gamma(a, \lambda)$, de densité

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Calcul de $\mathbb{E}[X]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^a \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{u^a}{\lambda^a} \frac{\mathrm{d}u}{\lambda} \\
&= \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda \Gamma(a)} \\
&= \frac{a}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathrm{Var}(X)$.

Le même calcul donne $\mathrm{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$.

Calcul de la transformée de Laplace L_X de X.

$$L_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x} x^{a-1} \,\mathrm{d}x$$

lorsque cette intégrale existe. L'intégrande est intégrable en 0 car $e^{(t-\lambda)x} x^{a-1} \sim x^{a-1}$ avec $a - 1 > -1$.

En $+\infty$, l'intégrande n'est intégrable que pour $t - \lambda < 0$, donc L_X est définie sur $]-\infty, \lambda[$. On a alors, pour $t < \lambda$, en effectuant le changement de variables $x = \frac{u}{\lambda - t}$,

$$L_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^u \frac{u^{a-1}}{(\lambda - t)^{a-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^a.$$

Calcul de la fonction caractéristique φ_X de X.

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} x^{a-1} \, \mathrm{d}x.$$

Montrons que L_X peut se prolonger en une fonction holomorphe F sur $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < \lambda\}$ et que $F(it) = \varphi_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour $z \in D$, on pose

$$F(z) := \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{(z-\lambda)x} x^{a-1} \, \mathrm{d}x.$$

Appliquons le théorème d'holomorphie sous l'intégrale pour montrer que F est bien définie et holomorphe sur D. On pose $g(x,z) := e^{(z-\lambda)x} x^{a-1}$, on a alors

- pour tout $z \in D, g(\cdot, z)$ est mesurable ;
- pour tout $x > 0, g(x, \cdot)$ est holomorphe sur D ;
- soit $\varepsilon > 0$, pour $x > 0$ et $z \in D$ tel que $\Re(z) < \lambda - \varepsilon$, on a

$$|g(x,z)| = e^{(\Re(z)-\lambda)x} x^{a-1} \leq e^{-\varepsilon x} x^{a-1} \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

On en déduit que F est bien définie et holomorphe sur D. On a bien par ailleurs $F(it) = \varphi_X(t)$.

D'autre part, pour tout $z \in D, \Re(\lambda - z) > 0$, donc on peut écrire $(\lambda - z)^a = e^{a \log(\lambda - z)}$ avec log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. La fonction G définie sur D par

$$G(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z} \right)^a$$

est ainsi holomorphe et prolonge également la fonction L_X sur D.

Finalement, F et G coïncident sur $]-\infty, \lambda[$ donc, par le principe de prolongement analytique, $F = G$ sur D, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = F(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a.$$

Références

[1] Marie Cottrell, Valentin Genon-Catalot, Christian Duhamel, Thierry Meyre, *Exercices de probabilités*, Cassini.