Système de Lotka-Volterra

2021-2022

1 Quelques commentaires

Ce développement peut être utilisé dans les leçons 220 et 267. Il est tiré des références [BC10] et [Nic]. L'objectif est de dessiner une courbe intégrale tout au long du développement pour déduire des informations sur les solutions de l'équation.

2 Le développement

Théorème 2.1 *Système de Lotka-Volterra*
Soit la fonction, pour a,b,c,d des réels strictement positifs :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax - bxy, -cy + dxy) \end{aligned}$$

Et le système, pour $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$:

$$\begin{cases} (X', Y') = f(X, Y) \\ (X(0), Y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases} \tag{E}$$

Alors ce système admet une unique solution maximale, qui est globale, bornée et périodique.

Tout d'abord, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'elle est polynomiale, donc en particulier elle est localement lipschitzienne, et pas théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (E) admet une unique solution maximale (X, Y) définie sur un intervalle I contenant 0.
Ensuite, on remarque que :

— Si $x_0 = 0$, la solution est globale et : $(X(t), Y(t)) = (0, y_0 e^{-ct})$
— Si $y_0 = 0$, la solution est globale et : $(X(t), Y(t)) = (x_0 e^{at}, 0)$

Ainsi, on peut tracer ces deux solutions particulières (cf figure 1).

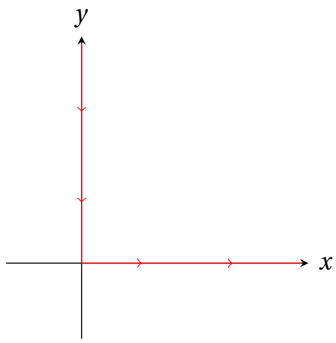

FIGURE 1 – Deux solutions particulières

Grâce à ces deux solutions et au théorème de Cauchy-Lipschitz, deux courbes intégrales ne s'intersectant pas, on déduit que toute solution pour $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ voit sa courbe intégrale rester dans le premier quadrant. On étudie désormais la fonction f. Tout d'abord, on recherche les points d'équilibre. Soit (x, y) un point d'équilibre, i.e. : $f(x, y) = 0$. On a donc : $(x, y) \in \{(0,0), (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})\}$. On peut donc découper le quadrant en 4 zones (cf figure 2). Une rapide étude de signes donne que, pour (x, y) dans la zone A, $ax - bxy > 0$ et $-cy + dxy < 0$. Une étude similaire sur les autres zones donne le sens de variation des solutions dans chaque zone (cf figure 2)

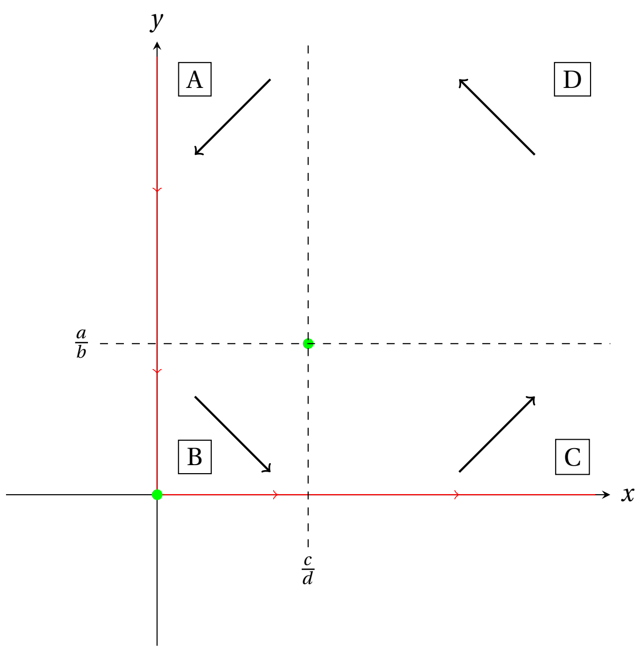

FIGURE 2 – Etude des variations et points d'équilibres

Soit $(\frac{c}{d}, y_0)$ avec $y_0 > \frac{a}{b}$ une condition initiale et (X,Y) une solution maximale associée. On a alors, à l'instant initial : $Y'(0) = 0$ donc la solution entre dans la zone A. Supposons pas l'absurde que la solution ne sorte pas de cette zone. Ainsi, X et Y sont des fonctions décroissantes et minorées, donc admettent une limite $(\overline{x}, \overline{y})$. Cette limite est alors un point d'équilibre, qui ne peut ni être $(0,0)$ qui n'est pas dans la zone A, ni $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ qui supposerait que X est constante. Finalement, la solution sort de la zone A, et donc entre dans la zone B d'après le sens de variation. Le même raisonnement donne que la solution entre dans la zone C (cf figure 3).

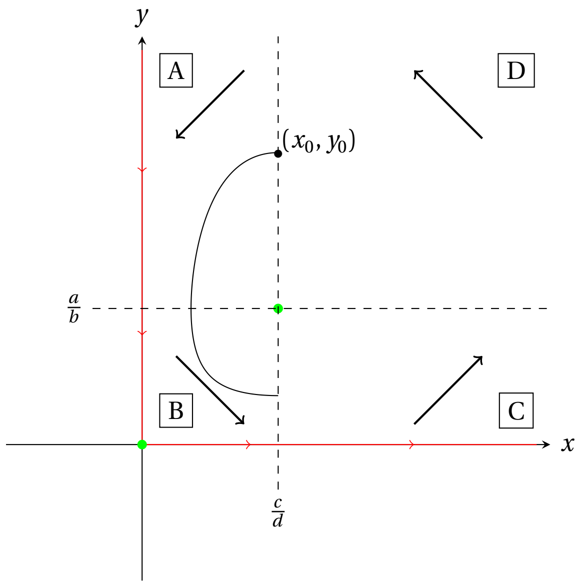

FIGURE 3 – début de la courbe intégrale

En revanche, dans la zone C, la solution X n'est pas bornée à priori, ce qui ne permet plus d'utiliser le raisonnement précédent. On introduit donc une intégrale première :

Soit : $\left| \begin{array}{l} H : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto dx - c\log(x) + by - a\log(y) =: f(x) + g(y) \end{array} \right.$

On vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(X(t), Y(t)) &= dX'(t) - c\frac{X'(t)}{X(t)} + bY'(t) - a\frac{Y'(t)}{Y(t)} \\ &= d(aX(t) - bX((t)Y(t)) - c\frac{aX(t) - bX((t)Y(t)}{X(t)} + b(-cY(t) + dX(t)Y(t)) - a\frac{-cY(t) + dX(t)Y(t)}{Y(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, H est bien une intégrale première. Or une étude de variations donne :

x	0	$\frac{c}{d}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	m_f	↗ $+\infty$

x	0	$\frac{a}{b}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	m_g	↗ $+\infty$

Où m_f et m_g sont les minima des fonctions réelles f et g. Ainsi, on a : $f(X) \leq H(x_0, y_0) - m_g$. Ainsi, puisque $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 ou $+\infty$, la solution X est bornée. De même, Y est bornée. On a donc que la solution est bornée

On peut ainsi reprendre le raisonnement précédent des zones A et B : Si (X, Y) restait dans la zone C, les solutions X et Y seraient croissantes et bornées, donc convergeraient vers un point d'équilibre, ce qui est absurde. Le même raisonnement s'applique pour la zone D. Finalement, la solution sort de la zone D pour rentrer dans la zone A. Par théorème des valeurs intermédiaires, la solution coupe l'axe vertical $x = \frac{c}{d}$ en un point $(\frac{c}{d}, y)$ (cf figure 4).

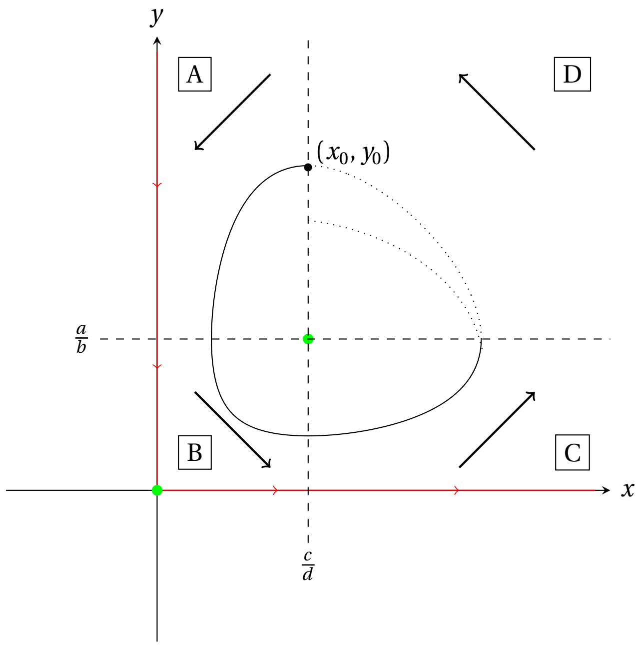

FIGURE 4 – Deux trajectoires à priori possibles

Puisque la solution est bornée, le théorème des bouts donne que la solution est globale.
Il s'agit maintenant de montrer que $y = y_0$. Pour cela, on remarque que d'après son tableau de variations, la fonction g est continue et croissante donc injective sur $[\frac{a}{b}, +\infty[$ donc $y = y_0$. Finalement, on peut compléter le dessin (cf figure 5).

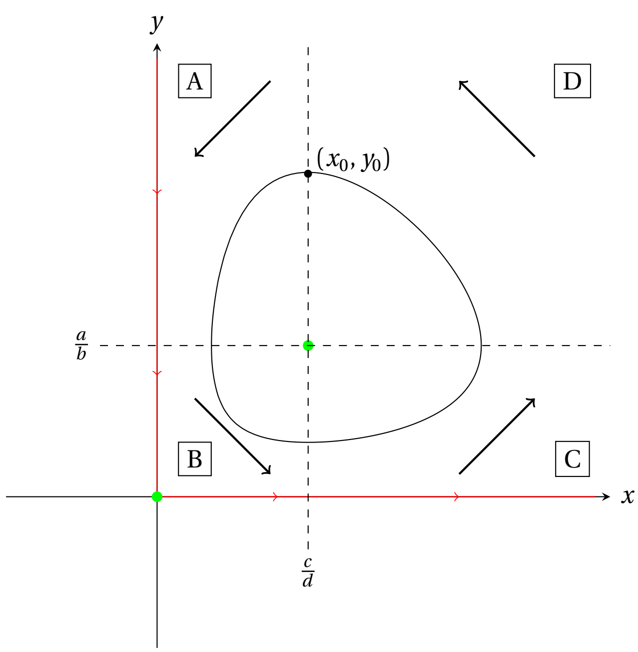

FIGURE 5 – Courbe intégrale complète

Soit T le premier moment tel que : $(X(T), Y(T)) = (x_0, y_0)$. Montrons que la solution est T-périodique : si on pose : $\tilde{X} = X(\cdot + T)$ (resp. $\tilde{Y}$), on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+ , \ \frac{d}{dt}(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)) &= (\frac{dX}{dt}(t+T), \frac{dY}{dt}(t+T)) \\ &= f(X(t+T), Y(t+T)) \\ &= f(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))\end{aligned}$$

Et : $(\tilde{X}(0), \tilde{Y}(0)) = (X(T), Y(T)) = (x_0, y_0)$ donc par théorème de Cauchy-Lipschitz : $X = \tilde{X}$ et $Y = \tilde{Y}$. Finalement : la solution est périodique.

3 Quelques questions possibles...

3.1 Que modélise ce système ?

Ce système modélise un système proie-prédateur, par exemple X représente une population de sardines et Y de requins. On peut expliquer chaque terme de l'équation : a représente un taux de natalité en l'absence de prédateurs pour les sardines. De même, c est un taux de mortalité des requins en absence de sardines. La grandeur bX représente le nombre de sardine que mange un requin, qui est proportionnelle au nombre de sardine que croise un requin. De même, dX est le taux de natalité des requins.

3.2 Connait-on la moyenne des fonctions X et Y sur une période ?

Oui, on peut les calculer de la façon suivante :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{X'(t)}{X(t)}dt = \frac{1}{T}[log(X)]_0^T = 0$$

où la dernière égalité résulte de la périodicité de X. Or on a également :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{X'(t)}{X(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T (a - bY(t))dt$$

D'où la moyenne de Y est : $\frac{1}{T}\int_0^T Y(t)dt = \frac{a}{b}$. En intégrant la fonction $\frac{Y'}{Y}$, on obtient : $\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = \frac{c}{d}$.
On peut remarquer qu'on peut modéliser l'influence de la pêche : si l'on pêche une proportion ϵ_s de sardines, on remplace a par $a - \epsilon_s$ et la population moyenne de sardine n'est pas affectée, en revanche celle des requins l'est.

3.3 Est-il restrictif de considérer $x_0 = \frac{c}{d}$ et $y_0 > \frac{a}{b}$?

Non, car si $x_0 > 0, y_0 > 0$ sont quelconques, soit $(x_0, y_0) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ et alors la solution est constante, soit la solution coupe le demi-axe vertical séparant les zones D et A en un point (x, y), donc en considérant la solution de conditions initiales (x, y), on a par théorème de Cauchy-Lipschitz que cette solution et la précédente coïncident, et donc elle rentre dans le cadre étudié dans le développement.

3.4 Connait-on la période T ? [d'a22]

Je ne sais pas comment calculer T, en revanche on peut montrer que pour tout T réel positif, on dispose de conditions initiales (x_0, y_0) telles que la solution correspondante soit de période au moins T.
Pour cela, on pose $x_0 = \frac{c}{d}$ et on cherche y_0 tel que le (premier) temps de sortie de la zone C soit au moins T (cf figure 6). Ainsi, la période sera au moins T.

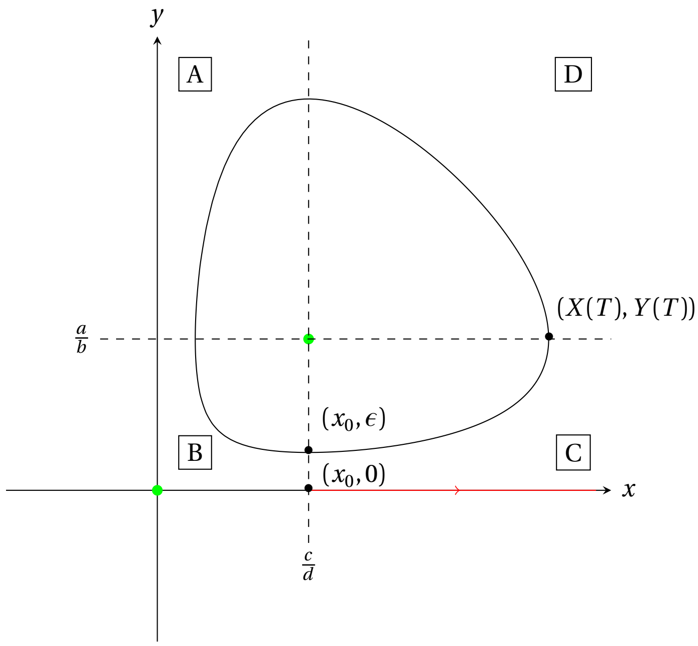

FIGURE 6 – Sortie en T de la zone C

On étudie d'abord la solution pour $y_0 = 0$. On a :

$$\begin{cases} X_0(t) = \dfrac{c}{d} e^{at} \\ Y_0(t) = 0 \end{cases}$$

Ensuite, pour la solution (X_ϵ, Y_ϵ) avec condition initiale $y_0 = \epsilon > 0$, on a d'après l'équation (E) :

$$\begin{cases} X_\epsilon'(t) = aX_\epsilon(t) - bX_\epsilon(t)Y_\epsilon(t) \leq aX_\epsilon(t) \\ Y_\epsilon'(t) = -c\,Y_\epsilon(t) + dX_\epsilon(t)Y_\epsilon(t) \leq dX_\epsilon(t)Y_\epsilon(t) \end{cases}$$

Le lemme de Grönwall donne alors :

$$\begin{cases} X_\epsilon(t) \leq \dfrac{c}{d} e^{at} \\ Y_\epsilon(t) \leq \epsilon e^{d\int_0^t X_\epsilon(s)ds} \end{cases}$$

On obtient donc : $Y_\epsilon(t) \leq \epsilon e^{d\frac{c}{d}(e^{at}-1)}$.
En particulier : $Y_\epsilon(T) = \frac{a}{b} \leq \epsilon e^{c(e^{aT}-1)}$ i.e. :

$$\frac{1}{a}\log\left(\frac{1}{c}\log\left(\frac{a}{b\epsilon}\right)+1\right) \leq T$$

Cette expression tends vers $+\infty$ quand ϵ tend vers 0, donc pour ϵ suffisamment petit, on trouve bien une période plus grande que T.

3.5 Comment retrouver l'intégrale première si on ne la connait pas à priori ?

On commence par supposer qu'on dispose de fonctions H, f, g telles que $H(x, y) := f(x) + g(y)$ soit une intégrale première. On écrit alors la relation $\frac{d}{dt}H(X(t), Y(t)) = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= X'(t)f'(X(t)) + Y'(t)g'(Y(t)) \\
&= (aX(t) - bX(t)Y(t))f'(X(t)) + (-cY(t) + dX(t)Y(t))g'(Y(t))
\end{aligned}
$$

i.e. pour tous réels x et y :

$$
\begin{aligned}
0 &= (ax - bxy)f'(x) + (-cy + dxy)g'(y) \\
&= (\frac{a}{y} - b)f'(x) + (-\frac{c}{x} + d)g'(y) \\
&= \frac{(\frac{a}{y} - b)}{g'(y)} + \frac{(-\frac{c}{x} + d)}{f'(x)}
\end{aligned}
$$

Une façon d'obtenir cela est :

$$
\begin{cases}
f'(x) = -\frac{c}{x} + d \\
g'(y) = -(\frac{a}{y} - b)
\end{cases}
$$

Donc :

$$
\begin{cases}
f(x) = -c\log(x) + dx \\
g(y) = -a\log(y) + by
\end{cases}
$$

Ce qui est l'expression utilisée dans le développement. Réciproquement, il reste à vérifier que cette fonction convient.

Références

[BC10] Sylvie Benzoni-Cavage. *Calcul différentiel et équations différentielles.* Dunod, 2010.

[d'a22] Jury d'agrégation. Exercice lors de l'oral d'analyse, Juin 2022.

[Nic] Francinou Gianella Nicolas. *Oraux X-ENS analyse 4.* Cassini.