Théorème de Stabilité de Lyapounov

Théorème. *Soit le système différentiel*

$$y' = f(y), \quad y(0) = x$$

Avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$. Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : il existe $v \in \mathcal{V}(0)$ tel que $\forall x \in v$, $y(t) \to 0$ exponentiellement quand $t \to \infty$.

Démonstration. On introduit le système linéarisé $z' = Az$, $z(0) = x$ ($A = Df(0)$). On note aussi $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ les valeurs propres de A de multiplicité respective $(m_1, \cdots, m_k)$.

- Étudions son comportement :
  On a $z(t) = \exp(tA)x$. Or, on peut écrire, grâce au lemme des noyaux : $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_i \in \ker(A - \lambda_i)^{m_i}$. Chaque sous-espace est stable par A et

  $$\exp(tA)x_j = \exp(t\lambda_j)\exp(t(A - \lambda_j I))x_j = \exp(t\lambda_j)\left(\sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!}(A - \lambda_j)^p\right) x_j.$$

  Pour toute norme sur $\mathbb{C}^n$, on a alors

  $$\|\exp(tA)x_j\| \leqslant \exp(t\Re(\lambda_j))C_j(1 + |t|)^{m_j-1}\|x_j\| \leqslant C\exp(t\Re(\lambda_j))(1 + |t|)^{n-1}\|x_j\|.$$

  De fait,

  $$\|\exp(tA)x\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|\exp(tA)x_j\| \leqslant C(1 + |t|)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_j)}\right)\max_j \|x_j\|.$$

  Puisque les normes sons toutes équivalentes, c'est exactement dire qu'il existe un polynôme P tel que, pour la norme euclidienne

  $$\|\exp(tA)x\| \leqslant P(|t|)\left(\sum e^{t\Re(\lambda_j)}\right)\|x\|.$$

  Ainsi, par hypothèse sur les valeurs propres, il existe $a > 0$ et $C > 0$ tels que $\|z(t)\| \leqslant Ce^{-at}\|x\|$.
- On introduit alors la forme linéaire symétrique

  $$b(x, y) = \int_0^{\infty} \langle \exp(tA)x\,,\, \exp(tA)y\rangle\, dt.$$

  Elle est bien définie grâce à la majoration précédente, et elle est définie positive. On note q la forme quadratique associée. On note aussi $r(y) = f(y) - Ay$, si y est une solution du problème de Cauchy initial. Remarquons que

  $$\langle \operatorname{grad} q(x)\,,\, Ax\rangle = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2.$$

  (On aura reconnu dans l'intégrande, la dérivée de $\|\exp(tA)x\|^2$ et utilisé la majoration précédente). De fait,

  $$(q(y))' = Dq(y)\cdot y'(t) = 2b(y, y') = 2b(y, r(y) + Ay) = 2b(y, r(y)) - \|y\|^2.$$

- Il s'agit maintenant de majorer $b(y, r(y))$. Pour cela, remarquons que $\sqrt{q}$ définit une norme (euclidienne) pour laquelle l'inégalité de Cauchy Schwarz s'écrit $\|b(y, r(y))\| \leqslant \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$. La définition de la différentielle de f $r(y) = f(y) - f(0) - Df(0) \cdot y$ montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $q(y) \leqslant \alpha$ implique $\sqrt{q(r(y))} \leqslant \varepsilon\sqrt{q(y)}$, donc $2b(y, r(y)) \leqslant 2\varepsilon q(y)$ (Cauchy-Schwarz).
  Par équivalence des normes, $(q(y))' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leqslant -Cq(y) + 2\varepsilon q(y) \leqslant -\beta q(y)$. avec $\beta > 0$ si $\varepsilon < C/2$.
- Si $q(x) < \alpha$, on a $q(y(t)) \leqslant \alpha$ pour tout $t \geqslant 0$. En effet, sinon, il existerait un t_0 premier instant tel que $q(y(t_0)) = \alpha$, auquel cas $q(y)'(t_0) \leqslant -\beta\alpha < 0$ et $q(y(t)) > \alpha$ pour t dans un voisinage à gauche de t_0, ce qui est donc absurde.
  Ceci implique donc que $q(y)' \leqslant -\beta q(y)$, ce qui s'écrit $(e^{\beta t} q(y))' \leqslant 0$ donc, puisque $q(y(0)) = q(x)$,

$$q(y(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x),$$

  ce qu'il fallait montrer.

$\square$