Théorème de stabilité de Lyapunov

Références :

- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, 3e édition **Cassini**, p.

Développement :

Contexte : On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(u) = 0$ et on note $A = Df(u)$. On veut comparer le système différentiel (E) :

$$y' = f(y) \ , \quad y(0) = y_0$$

Au système linéarisé au voisinage de u (point d'équilibre) [1] :

$$z' = Az \ , \quad z(0) = y_0 - u$$

On se propose de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 (*Stabilité de* Lyapunov)

Avec les notations qui précèdent, si les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négatives ($\sigma_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}^{-*} + i\mathbb{R}$), alors

- *0 est un point attractif du système linéarisé*
- *u est un point attractif de (E)*
- *Et si y_0 est assez voisin de u alors $y(t)$ tends exponentiellement vite vers u quand $t \to +\infty$.*

Démonstration :

Régularité de e^{tA} On montre le résultat suivant dans le cas d'une application linéaire a sans s'encombrer du formalisme matriciel.

Lemme 1

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$. On note λ_i pour $1 \leq i \leq r$ les valeurs propres distinctes de a.

Alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$|\!|\!| \, e^{ta} \, |\!|\!| \leq P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe\lambda_i}$$

(où $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ est la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, on utilisera seulement que c'est une norme d'opérateurs sous-multiplicative).

Notons $\chi_a(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ le polynôme caractéristique de a (qui est scindé dans $\mathbb{C}$ comme tous les polynômes bien élevés). Par lemme des noyaux, on obtient la décomposition suivante :

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(a - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

1. moralement $z \simeq y - u$. En effet si $z = y - u$ alors $z' = y' = f(y) = f(u+z) = f(u) + Df(u)z + o(z) = Az + o(z)$

On notera alors $p_i : E \to E_i$ et $q_i : E_i \to E$ la projection et respectivement l'inclusion canonique. On a les propriétés suivantes :

- $p_i q_i = \mathrm{id}_{E_i}$
- $p_j q_i = 0$ pour $i \neq j$a
- $\sum_i q_i p_i = \mathrm{id}_E$

Ainsi en notant $a_i = p_i a q_i$, on a $\sum_i q_i a_i p_i = a$ et on montre alors que cette décomposition est stable : $a^n = \sum_i q_i a_i^n p_i$ et donc $\exp(ta) = \sum_i q_i \exp(ta_i) p_i$.

Or $e^{ta_i} = e^{t\lambda_i} \exp(t(a - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i}))$ et l'on sait par construction que l'endomorphisme $a - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i}$ est nilpotent d'indice m_i. Donc

$$\| e^{ta_i} \| \leq |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} \| a - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i} \|^k$$

En regroupant :

$$\| e^{ta} \| \leq \sum_{i=1}^{r} \| e^{ta_i} \| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} \| a - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i} \|^k \right)}_{P(|t|)} \sum_{i=1}^{r} \exp(t \mathrm{Re} \lambda_i)$$

D'où le résultat. $\square$

Il résulte immédiatement du lemme que la solution z du système linéarisé, qui est de la forme $z(t) = e^{tA} z(0)$ tend exponentiellement vite vers 0 pourvu que les valeurs propres de A soient toute de partie réelle strictement négative.

Fonction de Lyapunov : Posons, pour $x, x' \in \mathbb{R}^d$,

$$b(x, x') = \int_{\mathbb{R}^+} \langle e^{tA} x, e^{tA} x' \rangle \, \mathrm{d}t$$

Cette intégrale existe sous les hypothèses précédentes sur le spectre de A et il est facile de montrer que b est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^d$ et donc que $q : x \mapsto b(x, x)$ est une norme.

De plus, on a

$$Dq(x)Ax = 2b(x, Ax) = \int_{\mathbb{R}^+} 2\langle e^{tA} x, e^{tA} Ax \rangle \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\langle e^{tA} x, e^{tA} x \rangle \right) \mathrm{d}t = -\|x\|^2$$

Notons alors $r(y) = f(y) - A(y-u)$ pour y solution de (E). Alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q(y(t) - u)) = Dq(y-u)f(y) = Dq(y-u)A(y-u) - Dq(y-u)(A(y-u) - f(y)) = -\|y-u\|^2 + 2b(y-u, r(y))$.

La différentiabilité de f en u s'écrit alors à l'aide de la norme q : il existe $\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tel que $\varepsilon(y-u) \to 0$ quand $y \to u$ et tel que :

$$f(y) = f(u) + Df(u)(y-u) + \sqrt{q(y-u)} \varepsilon(y-u)$$

Ainsi $r(y) = \sqrt{q(y-u)} \varepsilon(y-u)$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire b, on obtient : $b(y-u, r(y)) \leq \sqrt{q(y-u)} \sqrt{q(y-u)} \sqrt{q(\varepsilon(y-u))} = q(y-u) \sqrt{q(\varepsilon(y-u))}$. De plus l'équivalence des normes nous donne $-\|y-u\|^2 \leq -2\beta q(y-u)$

Ainsi pour y suffisamment proche de u, on peut avoir $\sqrt{q(\varepsilon(y-u))} \leq \beta/2$ et en regroupant :

$$-\|y-u\|^2 + 2b(y-u, r(y)) \leq -\beta q(y-u)$$

En résumé, on a montré :

Proposition 1

Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que si $q(y-u) \leq \alpha$ alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q(y-u)) \leq -\beta q(y-u) \leq 0$$

Conclusion : Supposons désormais $q(y_0 - u) < \alpha$, et y solution maximale de (E). Alors pour tout t du domaine de définition, $q(y-u) \leq q(y_0 - u) < \alpha$ (ce qui entraine entre-autre que la solution est globale car maximale et bornée).

En effet si il existe t_1 tel que $q(y(t_1) - u) \geq \alpha$, par théorème des valeurs intermédiaires, il va exister un premier $t_2 < t_1$ tel que $q(y(t_2) - u) = \alpha$, et l'inégalité recherchée et vraie sur $[0, t_2]$. Alors pour $\varepsilon > 0$, on a :

$$q(y(t_2) - u) = q(y(t_2 - \varepsilon) - u) + \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} q(y-u)' \,\mathrm{d}t \leq \alpha - \beta\alpha\varepsilon < \alpha$$

d'où la contradiction.

Enfin en regroupant, d'après le résultat précédent, on a si on note $g(t) = q(y(t) - u)$: $\forall t > 0$, $g' \leq -\beta g$ et donc $g(t) \leq e^{-\beta t} g(0) \leq e^{-\beta t}\alpha$. D'où le théorème. $\square$

Recasements : (according to Marnat)

- 220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives de solutions.
- 221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemple et applications.
- 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.