Méthode de Gauss

2013-2014

Référence : Xavier Gourdon, *Algèbre (2e édition)*, Ellipses, 2009, p.232.

La méthode de Gauss permet d'écrire une forme quadratique sur un espace de dimension finie en une combinaire linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
On se donne la forme quadratique

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

- *Premier cas* : Il existe i tel que $a_{i,i} \neq 0$, disons par exemple $a := a_{1,1}$. On écrit Φ sous la forme

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = a x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n) + C(x_2, \ldots, x_n)$$

avec B forme linéaire et C forme quadratique. On réécrit Φ comme

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = a \left(x_1 + \frac{B}{2a} \right)^2 + C - \frac{B^2}{4a}$$

et on itère la méthode.

- *Second cas* : Pour tout $i, a_{i,i} = 0$. Si Φ est nulle, c'est terminé, sinon il existe $a_{i,j}$ non nul $(i < j)$, disons par exemple $a := a_{1,2}$. On écrit Φ sous la forme

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \ldots, x_n) + x_2 C(x_3, \ldots, x_n) + D(x_3, \ldots, x_n)$$

avec B et C formes linéaires et D forme quadratique. On réécrit Φ comme

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, \ldots, x_n) &= a \left(x_1 + \frac{C}{a} \right) \left(x_2 + \frac{B}{a} \right) + D - \frac{BC}{a} \\ &= \frac{a}{4} \left[\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a} \right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a} \right)^2 \right] + D - \frac{BC}{a}\end{aligned}$$

et on itère la méthode.