Méthode de Newton

Références :

- Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de l'agrégation* 3e édition, Cassini. p.152

Développement :

Contexte : On a une fonction $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ strictement croissante, et telle que $f(c) < 0 < f(d)$.

On considère $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ définie par $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Interprétation géométrique. *F associe à un point l'image de l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente au graphe de f en ce point.*

Théorème de Taylor-Lagrange : Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]c,d[$ tel que $f(a) = 0$ et qui est unique par stricte croissance de f. Soit de plus $x \in [c,d] \backslash \{a\}$ En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à f sur l'intervalle $|a,x| = [\min(a,x), \max(a,x)]$, on a :

$$\exists z \in |a,x| \text{ tel que } f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) = \frac{(a-x)^2}{2} f''(z)$$

Ce qui s'écrit encore :

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

Or f' est continue sur le compact $[c,d]$ donc est minorée et atteint son minimum $M > 0$. Et de même f'' est continue sur le compact $[c,d]$ donc est majorée par M'. En posant $C = \frac{M'}{2M}$ on a :

$$|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$$

Et ce pour tout $x \neq a$. De plus le résultat reste vrai pour $x = a$ donc le résultat est vrai sur $[c,d]$.

Soit de plus $\alpha \in]0, 1/C[$, alors si $x \in]a-\alpha, a+\alpha[= I$, on a $|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$. D'où $F(x) \in I$ et donc I est stable par F.

Étude de suite. Posons pour $x_0 \in [c,d]$ la suite $(x_n)_n$ définie par récurrence par :

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Alors d'après le résultat précédent si $x_0 \in I$, alors la suite $(x_n)_n$ est dans I et de plus on a : $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.

On montre par récurrence sur n que $|x_n - a| \leq C^{2^n-1}|x_0 - a|^{2^n}$. Et par suite comme $|x_0 - a| \leq \alpha$ on obtient $|x_n - a| \leq \frac{1}{C}(C\alpha)^{2^n}$. Or on a choisit $C\alpha < 1$ ainsi la série converge et même $|x_n - a| \in O((C\alpha)^{2^n})$.

Amélioration cas convexe. On suppose $f'' \geq 0$ sur $[c, d]$. Posons $I = [a, d]$, alors F est décroissante, en effet :

$$F(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Or f et f'' sont positives sur $[a, d]$.

De plus $F(d) = d - f(d)/f'(d) < d$ et $F(a) = a$. Il s'en suit que $F(I) \subset I$.

On remarque également que $F - I = -(f/f')$ est négative sur I. Et donc la suite $(x_n)_n$ est décroissante. Et si $F(x_n) = x_n$ alors nécessairement la suite $(x_n)_n$ est constante égale à a. Dans le cas contraire, elle est strictement décroissante.

Le résultat précédent $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$ reste valable et se réécrit dans le cas présent : $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$.

De même on a toujours pour n momentanément fixé, sur l'intervalle $[a, x_n]$ (on a supposé $x_0 > a$), $\exists z_n$ tel que :

$$x_{n+1} - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}(x_n - a)^2$$

Comme $x_n \to a$, $z_n \to a$ et en passant à la limite (qui est non-nulle), on obtient l'équivalence $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$, pour $n \to \infty$.

Application au calcul des racines. Soit $y > 0$, pour calculer $\sqrt{y}$, on applique la méthode de Newton à $f : x \mapsto x^2 - y$.

La fonction F deviens, pour $x_0 \in [c, d]$ tels que $0 < c < d$ et $c^2 < y < d^2$, $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$.Ainsi

$$F(x) - a = \frac{(x - a)^2}{2x}$$

et de même :

$$F(x) + a = \frac{(x + a)^2}{2x}$$

Par suite, pour $x \in [c, d]$

$$\frac{F(x) - a}{F(x) + a} = \left(\frac{x - a}{x + a}\right)^2$$

En notant alors $G : x \mapsto x^2$ et $\varphi : x \mapsto \frac{x-a}{x+a}$ on a la propriété suivante $\varphi \circ F = G \circ \varphi$, on peut vérifier que φ est inversible sur $]-a, \infty[$ et donc en particulier sur $[c, d]$ et on a :

$$F = \varphi^{-1} \circ G \circ \varphi \quad \text{d'où} \quad F^n = \varphi^{-1} \circ G^n \circ \varphi$$

Soit maintenant $x_0 \in [c, d]$, on a : $\varphi(x_n) = (\varphi(x_0))^{2^n}$. En particulier si on avait pris $x_0 \in]a, d[$, alors $x_n > a$ et on aurait :

$$1 + \frac{2a}{x_n - a} = \frac{x_n + a}{x_n - a} = \left(\frac{x_0 + a}{x_0 - a}\right)^{2^n} = \left(1 + \frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$$

Or $(1 + t)^2 - 1 = (2 + t)t$ donc en appliquant le résultat à $t = 2a/(x_0 - a)$ on trouve :

$$\left(1 + \frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n} - 1 = \left(2 + \frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^{n-1}} \left(\frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^{n-1}} = \frac{2^{2^n} x_0^{2^{n-1}} a^{2^{n-1}}}{(x_0 - a)^{2^n}}$$

Finalement

$$x_n - a = 2a\left(\frac{x_0 - a}{2\sqrt{x_0 a}}\right)^{2^n} = 2a\eta^{2^n}$$

Et donc il y a convergence (et alors convergence hypergéométrique) dès lors que $\eta < 1$ ie dès que $0 < x_0 - a < 2\sqrt{x_0 a}$ et donc $x_0^2 - 6x_0 a + a^2 < 0$. Ce domaine est exactement l'intervalle ouvert entre les deux racines de l'équation $X^2 - 6aX + a^2 = 0$.

Il y a convergence vers a pour $x_0 \in](3-2\sqrt{2})a, (3+2\sqrt{2})a[$.

Cas général des polynômes. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, On cherche à résoudre $P(x) = y$. On est amené à supposer que sur $[c,d]$, $P' > 0$, $y \in P([c,d])$ en particulier, qu'il existe un unique $a \in [c,d]$ tel que $P(a) = y$ et que $P'(a) \neq 0$.

On considérera la fonction $f : x \mapsto P(x) - y$ sur $[c,d]$ (c'est aussi un polynôme et l'hypothèse précédente assure juste que y n'est pas racine double). On est donc ramené au cas de la recherche d'une racine de f.

En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes à f :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad \text{que l'on notera} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k!}(x-a)^k$$

On a alors :

$$F(x) - a = \frac{1}{f'(x)}\left(-f(x) + (x-a)f'(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k!}(x-a)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(k-1)!}(x-a)^k\right)$$

Ce qui donne après simplification :

$$F(x) - a = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\alpha_{k+2}}{(k+2)k!} \frac{(x-a)^k}{f'(x)}\right)(x-a)^2$$

Recasements : (according to Marnat)

- 232 - Méthode d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
- 218 - Application des Formules de Taylor.
- 226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
- 224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.