Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

14 décembre 2011

Pour que la preuve soit complète, il faut admettre le petit résultat suivant :

lemme 1. *La fonction $x \to (1+x)^\alpha$ est développable en série entière au voisinage de zéro, de rayon de convergence 1, et on a :*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_k x^k$$

avec

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

C'est simplement du à la formule qui dit que si une fonction est développable en série entière, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{n!}$. L'analicité de la fonction prouve qu'elle est bien développable en série entière.
Passons aux choses sérieuses :

1 Marche aléatoire et série entière

On considère un homme ivre (gai-luron) qui à chaque instant, choisit de façon arbitraire d'avancer ou de reculer. On cherche à connaitre des détails sur son mouvement...
On modélise le problème de la façon suivante : On prend une suite iid de variables de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$ (OK ce ne seront pas de vrais Bernouillis...) vérifiant :

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} = P(x_n = -1)$$

Ainsi $\{X_n = 1\}$ modélise l' événement "l'homme avance au temps n", et respectivement pour l'autre.
On notera :

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
- p_n la probabilité que l'homme soit en 0 au temps $2n$
- q_n la probabilité que ce soit le premier retour en 0

Les variables étant des Bernouilli iid, p_n revient à avoir autant de succès que de défaites (autant de pas vers l'avant et l'arriere) en $2n$ pas. Ainsi, elle est donné par (loi binomiale ou calcul) :

$$p_n = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{1}$$

1.1 relation entre q_n et p_n

Notons

- A_k l' événement "être de retour en 0 pour la première fois au temps $2k$"
- B_k l' événement "être en 0 au temps $2k$".

Ainsi, $P(A_k) = q_k$ et $P(B_k) = p_k$. Or,

$$B_k = \{S_n = 0\} = \bigcup_{m=1}^{k} (\{S_m = 0\} \cap_{j<m} \{S_j \neq 0\} \cap \{X_{m+1} + ... + X_n = 0\})$$

Heuristiquement, on découpe selon la première fois où notre homme est repassé par son point d'origine.

Or les variables (X_n) sont indépendantes. Ainsi, on peut calculer la probabilité :

$$P(B_k) = \sum_{m=1}^{k} P(A_k) P(X_{k+1} + ... + X_n = 0)$$

Or les variables suivaient toutes la meme loi, ainsi, cette somme représente S_{n-k}. D'où :

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k} \tag{2}$$

1.2 Serie entière, conclusion

Considérons les séries entières : $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n$ et $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n$. (Le rayon de convergence est au moins 1 car p_n et q_n sont bornés par 1, etant des probabilités).

On a par l'équation 2,(produit de Cauchy des séries entières)

$$P(x) - 1 = P(x)Q(x)$$

Or, par l'équation 1

$$P(x) = \sum \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n x^n$$

Par le lemme magique admis (un calcul analogue sera fait dans deux lignes), on a

$$P(x) = (1-x)^{-1/2}$$

donc

$$Q(x) = 1 - (1-x)^{1/2}$$

Allons y pour le calcul des coefficients du développement de Q (et on remarque qu'il est presque analogue pour P car $(1/2 - 1) = -1/2$ donc ce sont les mêmes à une presque translation près), qui sont les q_n par l'unicité du développement en série entière, et d'autre part, par le lemme magique, on a :

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}2^n n!(n-1)!} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(2n-1)} \end{aligned}$$

On a obtenu la probabilité de repasser à l'origine pour la première fois. Nous allons obtenir un peu plus : La série $\sum q_n x^n$ converge absolument pour $R < 1$: En effet, $|q_n x^n|_\infty \leq q_n$ et $\sum q_n \leq 1$ car il s'agit d'une probabilité (celle de l'éventuel retour en 0). Ainsi, on peut passer à la limite quand $x \to 1$ dans :

$$1 - (1-x)^{1/2} = \sum q_n x^n$$

et on obtient :

$$\sum q_n = 1$$

Ainsi, l'homme ivre repassera par son point d'origine ! (Vous retournerez au bar dans tous les cas, ne le quittez donc pas :))

1.3 leçons concernées

- 145 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Exemples.
- 243 : Propriétés des séries entières.
- 249 : Suites de Bernoulli indépendantes.