Développement : nombre de matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q^n$
(Nouvelles histoires hédonistes, tome 2)

Prop Le nombre de matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q^n$ est :

$$d = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_r=n \\ m_i \geq 0}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|} = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_r=n \\ m_i \geq 0}} \frac{(q^n-1)\dots(q-1)q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{q}\left[(q^{m_i}-1)\dots(q-1)q^{\frac{m_i(m_i-1)}{2}}\right]}$$

$\boxed{\text{Preuve}}$

Soit (m_i) une suite finie d'entiers ≥ 1 dont la somme vaut n. On se propose de calculer le nombre de décompositions de $E = \mathbb{F}_q^n$ en somme directe de sous-espaces de dimensions $n_1, \dots, n_r$.

Soit $\mathcal{E}_{(m_i)} = \left\{ (E_1, \dots, E_q) \,\middle|\, E_1 \oplus \dots \oplus E_q = E,\ \dim E_i = m_i\ \forall i \right\}$.

<u>$GL_n(\mathbb{F}_q)$ agit transitivement sur $\mathcal{E}_{(m_i)}$:</u>

On définit "l'action" $G\cdot(E_1, \dots, E_q) = (GE_1, \dots, GE_q)$. Il faut vérifier que $(GE_1, \dots, GE_q) \in \mathcal{E}_{(m_i)}$.

- Clairement, $\dim(GE_i) = \dim E_i = m_i$ car $G \in GL_n(\mathbb{F}_q)$.
- Si $x \in E$, soit $y = G^{-1}x$. Soit $y = y_1 + \dots + y_q$ décomposition de y adaptée à $E_1 \oplus \dots \oplus E_q$.
  Alors $x = Gy = Gy_1 + \dots + Gy_q \in GE_1 + \dots + GE_q$.
- (argument de dimension) Si les (GE_i) n'étaient pas en somme directe, (soit $(GE_{i_1} + \dots + GE_{i_k}) \cap (GE_{i_{k+1}} + \dots + GE_{i_\ell}) \neq \{0\}$,)
  alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{q} GE_i\right) < \sum_{i=1}^{q} \dim GE_i = \sum_{i=1}^{q} n_i = n$

  donc $GE_1 + \dots GE_q \subsetneq E$, ce qui contredit le point précédent.

Donc on a bien défini une action de groupe.

Transitivité :

Soit $(E_1, \dots, E_q) \in \mathcal{E}_{(n_i)}$ et $(F_1, \dots, F_q) \in \mathcal{E}_{(n_i)}$.

Soient $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{B}')$ des bases adaptées resp à $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$ et $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_q$.

Alors la matrice de passage G de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ vérifie

$$G \cdot (E_1, \dots, E_q) = (F_1, \dots, F_q). \quad ✓$$

Par la relation orbite - stabilisateur, on a donc $|\mathcal{E}_{(n_i)}| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{Stab}(E_1, \dots, E_q)|}$

où $(E_1, \dots, E_q)$ est un q-uplet quelconque de $\mathcal{E}_{(n_i)}$. Calculons son stabilisateur.

$u \in \mathcal{L}(E)$ inversible stabilise $(E_1, \dots, E_q)$ ssi $\forall i,\ u(E_i) \subseteq E_i$

Dans $\boxed{\text{une}}$ base adaptée $\mathcal{B}$, u s'écrit par blocs, de taille n_i :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} G_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & G_q \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{stab}(E_1, \dots, E_q) \simeq GL_{n_1}(\mathbb{F}_q) \times \dots \times GL_{n_q}(\mathbb{F}_q)$

Donc $|\mathcal{E}_{(n_i)}| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{n} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$

mq $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q) \xleftrightarrow{\text{bij}} \bigsqcup_{n_1 + \dots + n_p = n} \mathcal{E}_{(n_i)}$

On met maintenant en bijection l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ des matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q^n$ avec l'ensemble $\bigsqcup_{n_1+\dots+n_q=n} \mathcal{E}_{(n_i)}$.

numérotons les éléments de $\mathbb{F}_q$: $\mathbb{F}_q = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$.

Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$, on note $E^{(\lambda_i)}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i (potentiellement $E^{(\lambda_i)} = \{0\}$). Comme A est diagonalisable, on a $\mathbb{F}_q^{(n)} = \bigoplus_{i=1} E^{(\lambda_i)}$, si bien que $\varphi : A \longmapsto (E^{(\lambda_i)})_{1 \leq i \leq q}$ est bien à valeur dans $\bigsqcup_{n_1+\dots+n_q=n} \mathcal{E}_{(n_i)}$.

Réciproquement, considérons $n_1, \dots, n_q$ tels que $n_1 + \dots + n_q = n$ et $(E_i)_{i \leq q} \in \mathcal{E}_{(n_i)}$.

On construit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_q^n)$ en posant $u(z) = \lambda_i z \quad \forall z \in E_i$.
Comme $\mathbb{F}_q^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$, u est correctement définie sur $E = \mathbb{F}_q^n$.
Sa matrice A dans n'importe quelle base est diagonalisable, et on a $\varphi(A) = (E_i)_{i \leq q}$.
D'autre part en posant $u =: \psi((E_i)_{1 \leq i \leq q})$, on a $\psi \circ \varphi(A) = \psi((E^{(\lambda_i)})) = u$

donc $|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{n_1+\dots+n_q=n} |\mathcal{E}_{(n_i)}|$ et on conclut.