Réduction des matrices normales

Ce développement se trouve dans Gourdon, *Algèbre*. Il consiste en la démonstration du théorème suivant :

Théorème. *Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E. Alors, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que*

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & D_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & D_p \end{bmatrix}$$

où les λ_i sont réels et correspondent aux valeurs propres de u et les D_i sont des blocs 2×2 correspondant à des matrices de similitudes directes (de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$).

Démonstration.

Lemme. *Soit E un espace euclidien de dimension 2 et u un endomorphisme normal de E n'ayant pas de valeur propre réelle. Alors, dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u est de la forme*

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Démonstration. Puisque u n'a pas de valeur propre réelle, $b \neq 0$. Si $M = [u]_{\mathcal{B}}$, l'écriture de $MM^T = M^TM$ et la condition $b \neq c$ (sinon la matrice est symétrique réelle donc a une valeur propre réelle) fournit la forme demandée. □

Lemme. – *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. si F est un sous-espace de E stable par u, $F^{\perp}$ est stable par u^*.*
– *Si u est normal et que E_λ est un sous-espace propre pour u, alors $E_\lambda^{\perp}$ est stable par u.*

La première assertion est claire par calcul, et la seconde utilise la commutation de u et de u^* : elle donne la stabilité de E_λ par u^*. Le passage à l'adjoint / l'orthogonal donne le résultat.

Passons à la preuve du théorème, qu'on va mener par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 1$, c'est clair. Si on suppose que le théorème est vrai pour tout $k < n$, on se place dans E de dimension n, et on prend $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si u admet une valeur propre réelle λ, le sous-espace propre associé E_λ a un orthogonal (qu'on note F) stable par u (2e lemme), et par u^*. Comme u_F et u_F^* commutent et que F est de dimension $\leqslant n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence qui donne une base $\mathcal{B}_2$ de F où $[u_F]_{B_2}$ a la forme (**??**). Si $\mathcal{B}_1$ est une base quelconque de E_λ, la concaténation des deux bases convient.

Si u n'admet pas de valeur propre réelle, on considère $Q = X^2 - 2\alpha + \beta$ un facteur irréductible de χ_u, et on pose $N = \ker Q(u)$. $N \neq \{0\}$ car en écrivant $Q = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$, on a $\ker(u-\lambda) \neq 0$ (λ est une valeur propre complexe), donc $N = \ker((u-\lambda Id)(u-\overline{\lambda}Id)) \supset \ker(u-\lambda Id) \supsetneq \{0\}$.

N est clairement stable pas u. Il l'est aussi par u^* car $Q(u)u^* = u^*Q(u)$. On pose $v = u_N$. L'endomorphisme v^*v est symétrique et admet donc une valeur propre réelle μ. Soit x un vecteur propre associé. Alors, soit $F = vect(x, u(x))$. Puisque u n'a pas de valeur propre réelle, $(x, u(x))$ est uen famille libre, donc F est de dimension deux. F est de plus stable par u car

$$u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x. \tag{2}$$

Montrons que F est stable par u^*. D'après (**??**), puisque $\beta \neq 0$ (Q est irréductible), $F = vect(u(x), u^2(x))$. Or, $u^*(u(x)) = u(u^*x) = vv^*(x) = \mu x \in F$ et $u^*(u^2(x)) = u(u^*u(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F$, ce qu'il fallait montrer.

On peut donc parler de u_F. Comme $(u_F)^* = (u^*)_F$, u_F est normal et, d'après le premier lemme, il existe une base (e_1, e_2) orthonormale de F telle que $[u]_{(e_1,e_2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. F est stable par u et u^* donc $F^\perp$ l'est par u^* et $u^{**} = u$, donc (unicité de l'adjoint) $(u_{F^\perp})^* = (u^*)_{F\perp}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_{F\perp}$ qui donne une base $(e_3, \cdots, e_n)$ orthonormée telle que $u_{F\perp}$ est de la forme (**??**). La base $(e_1, \cdots, e_n)$ convient alors pour finir la preuve du théorème. □

Application : on dispose grâce à ce théorème de la réduction des matrices symétriques et antisymétriques réelles et des matrices orthogonales. Par ailleurs, on peut effectuer tout le raisonnement dans $\mathbb{C}$: il est un peu plus simple car au moment de la récurrence, u admet toujours une valeur propre complexe, et est donc ortho-diagonalisable. On peut aussi en déduire qu'une matrice anti-hermitienne est ortho-diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.