Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents. Mémoire de M2

Maxime Stauffert

2 avril 2014

Table des matières

Introduction : Lorsque nous sommes face à un problème d'algèbre linéaire, il peut être intéressant de savoir réduire une matrice, en l'exprimant dans une base adaptée dans laquelle elle pourra être triangulaire, ou ne comportera qu'un minimum de coefficients sur-diagonaux égaux à 1. C'est le cas lorsque l'on modélise un problème physique dont la résolution fait intervenir des calculs matriciels, ou lorsque l'on cherche à étudier un endomorphisme par exemple.

1 Généralités

On commence par rappeler quelques définitions et propriétés de base d'algèbre linéaire, qui nous serviront ensuite dans les autres parties.

Définition 1. Soit k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\lambda \in k$, on dit que λ est valeur propre de u si il existe $x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$. On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Lorsque λ est valeur propre de u, le vecteur x est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. De plus, on notera $E_\lambda = \{x \in E, u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ l'ensemble des vecteurs propres associés à λ, et on appellera cet ensemble espace propre de u associé à λ.

Définition 2. Si $n \in \mathbb{N}$ est la dimension de E en tant que k-espace vectoriel, on appelle polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(k)$ le polynôme de $k[X]$ défini par $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Remarque 3. Comme $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, on a l'égalité $\chi_{{}^tA} = \chi_A$. Ce résultat sert notamment dans certaines démonstrations par récurrence sur la dimension. On considère alors un vecteur propre x de ${}^tu$ et on utilise l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Vect}(x)^{\perp}$. C'est le cas par exemple pour le résultat de trigonalisation simultanée que l'on verra par la suite.

Si l'on développe le déterminant, on obtient $\chi_A(X) = (-1)^n\left[X^n - \alpha_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \alpha_n\right]$ avec $\alpha_1 = \mathrm{Tr}(A)$ et $\alpha_n = \det(A)$.

Enfin, nous savons qu'il est possible de définir le déterminant d'un endomorphisme car le déterminant est stable par conjugaison. De la même manière nous pouvons définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Définition 4. On appelle polynôme caractéristique de u, et on note χ_u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base quelconque.

Remarque 5. L'application

$$\varphi_u : \begin{array}{ccc} k[X] & \to & k[u] \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbre. Son noyau, $\ker(\varphi_u) = \{P \in k[X], P(u) = 0\}$, est un idéal de $k[X]$.

Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie sur k, le noyau $\ker(\varphi_u)$ est non nul. Enfin, grâce à la division euclidienne sur $k[X]$, on en déduit qu'il existe un unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal $\ker(\varphi_u)$.

Définition 6. On appelle polynôme minimal de u sur k le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in k[X], P(u) = 0\}$ et on le note π_u.

Remarque 7. On a l'inégalité grossière $d^\circ(\pi_u) \leq n^2$ car $\left(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n^2}\right)$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$. On verra qu'en réalité $d^\circ(\pi_u) \leq n$ grâce au théorème de Cayley-Hamilton.

Proposition 8. *Les valeurs propres de u sont exactement les racines des polynômes caractéristique et minimal de u, en effet, pour tout $\lambda \in k$,*

$$[\lambda \text{ valeur propre de } u] \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors l'application induite par u sur F est un endomorphisme de F, c'est-à-dire que $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$, et on a de plus $\chi_{u_{|F}} | \chi_u$ et $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$.

Remarque 9. Le premier résultat est un résultat important qui nous permet notamment de trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ainsi que de caractériser la diagonalisabilité ou la trigonalisabilité d'un endomorphisme comme on le verra plus tard.

Le deuxième résultat est d'avantage un lemme utile dans plusieurs démonstrations par récurrence comme dans le théorème qui suit.

Théorème 10. *(de Cayley-Hamilton)*

$$\chi_u(u) = 0$$

Corollaire 11. *On a par conséquent $\pi_u | \chi_u$ par définition même du polynôme minimal. De plus, comme le degré du polynôme caractéristique est exactement n, on a l'inégalité $d^\circ(\pi_u) \leq n$.*

Lemme 12. *(des Noyaux)*

Soit $P = P_1 \cdots P_s \in k[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux. Alors

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(P_i(u))$$

Remarque 13. Il sera donc intéressant de décomposer χ_u ou π_u en facteurs irréductibles pour avoir une décomposition en somme directe de $E = \ker(\chi_u) = \ker(\pi_u)$.

Maintenant que l'on a fait tous ces rappels, nous pouvons nous intéresser à la caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

2 Endomorphismes trigonalisables

2.1 Définition et caractérisations

Définition 14. On dit que u est <u>trigonalisable</u> sur k s'il existe $\mathcal{B}$ une base de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.

Théorème 15. *(de caractérisation) Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est trigonalisable sur k*
2. *χ_u est scindé sur k*
3. *π_u est scindé sur k*

Corollaire 16. *Si k est algébriquement clos, tout endomorphisme de E est trigonalisable.*

Remarque 17. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement trigonalisable sur $\mathbb{R}$, mais peut être vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui sera alors trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exemple 18. Voici plusieurs exemples et contre-exemples sur des matrices vues dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Au vu du corollaire ci-dessus, toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables. Rappelons enfin que la caractérisation des endomorphismes diagonalisables est :

$$[u \text{ diagonalisable}] \Leftrightarrow [\pi_u \text{ scindé à racines simples}]$$

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = \pi_A = X^2$, la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_B = \pi_B = X^2+1$, la matrice B n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_C = \pi_C = \left(X^2+1\right)^2$, la matrice C n'est ni trigonalisable sur $\mathbb{R}$ ni diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Remarque 19. Si A est trigonalisable, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in k^n$ tels que $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et on a

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Application : Soit u trigonalisable, avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, et soit $P \in k[X]$.
Alors $\mathrm{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\}$ et $\mathrm{Sp}(\exp(u)) = \left\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right\}$.

2.2 Trigonalisation simultanée

Lorsque l'on travaille avec une famille d'endomorphismes, il peut être intéressant de trouver une base commune de trigonalisation, dans le but de travailler sur des formes simplifiées pour tous ces endomorphismes. C'est le cas par exemple lorsque l'on travaille avec un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(k)$.

Proposition 20. *Si u est trigonalisable et que F est un sous-espace vectoriel stable de E, alors $u_{|F}$ est trigonalisable.*

Proposition 21. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux, alors ces endomorphismes sont cotrigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ commune de trigonalisation.*

Exemple 22. Contrairement au cas de la codiagonabilité, la condition de commutativité n'est pas nécessaire : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont cotrigonalisables mais ne commutent pas.

Remarque 23. Si u et v sont cotrigonalisables, alors $u+v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables.

Exemple 24. Deux contre-exemples pour chacun des cas :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice $A+B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ car $\chi_{A+B} = X^2+1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ car $\chi_{A \cdot B} = X^2 - X + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

On a une application à des sous-groupes particuliers de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$:

Théorème 25. *(de Lie-Kolchin)*
Tout sous-groupe connexe résoluble de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.

2.3 Propriétés topologiques

Ici, on considère $k = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on note $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a deux résultats topologiques sur les matrices trigonalisables :

Proposition 26. *L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables à valeurs propres distinctes et, par conséquent, celui des matrices diagonalisables, sont denses dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. En particulier, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables est dense dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Application : Soit $\varphi : M \mapsto D_M$ où D_M est la partie diagonalisable de M dans la décomposition de Dunford, alors pour $n \geq 2$, φ n'est pas continue.

Proposition 27. *$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

3 Endomorphismes nilpotents

3.1 Définition et caractérisations

Définition 28. On dit que u est nilpotent sur k s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$. Pour u nilpotent, on note $r = \min\{n \in \mathbb{N}, u^n = 0\}$ que l'on appelle indice de nilpotence de u. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

Exemple 29. Si A est nilpotente, alors $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(k) & \to & \mathcal{M}_n(k) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ est nilpotent.

Dans $k_n[X]$, tout endomorphisme qui fait baisser strictement le degré des polynômes est nilpotent. Par exemple : $\varphi : P \mapsto P'$ et $\psi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Ces deux endomorphismes sont nilpotents sur $k[X]$ si $k = \mathbb{F}_p$. En revanche, ils ne le sont pas si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, bien que pour tout $P \in k[X]$, on ait $\varphi^{\mathrm{d}^\circ P+1}(P) = \psi^{\mathrm{d}^\circ P+1}(P) = 0$.

Théorème 30. *(de caractérisation) Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est nilpotente sur k*
2. *$\chi_u = (-1)^n X^n$ dans $k[X]$*
3. *Il existe $r \leq n$ tel que $\pi_u = X^r$ dans $k[X]$*
4. *u trigonalisable sur k et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$*

Remarque 31. En particulier, [u nilpotente sur k] $\Rightarrow$ [u trigonalisable sur k]

Exemple 32. Deux contre-exemples :

- I_n est trigonalisable mais non nilpotente
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ mais A n'est ni trigonalisable ni nilpotente

Proposition 33. *On a deux caractérisations supplémentaires lorsque k vérifie certaines conditions :*

– *si* $\mathrm{car}(k) = 0$,

$$\begin{aligned}[u \text{ nilpotente sur } k] &\Leftrightarrow \forall \lambda \in k \setminus \{0\}, u \sim \lambda u \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, \mathrm{Tr}\left(u^i\right) = 0\end{aligned}$$

– *si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'endomorphisme u est nilpotent si et seulement si l'endomorphisme nul est dans la classe de conjugaison de u.*

Exemple 34. Si $\mathrm{car}(k) = p$, on a l'égalité $\mathrm{Tr}\left(I_p^i\right) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

La caractérisation des endomorphismes nilpotents grâce à la trace est un lemme du résultat :

Théorème 35. *(de Burnside)*
Tout sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini.

Démonstration.
1. Démonstration d'un lemme :
Nous commençons par prouver la caractérisation par la trace vue à la proposition 33.
Soit A nilpotente, alors elle est A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Donc il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}P$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A^i = P^{-1}\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}P$. On en déduit, $\mathrm{Tr}\left(A^i\right) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Réciproquement, raisonnons par l'absurde en supposant A non nilpotente.
Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A et $n_1, \ldots, n_r$ leur multiplicité respective.
La matrice A est semblable à la matrice triangulaire

$$M = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & & \\
& \ddots & \vdots & & & & & & \\
& & \lambda_1 & & & & * & & \\
& \cdots & & \ddots & & \cdots & & & \\
& & & & \lambda_r & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & & \\
& & & & & & \lambda_r & & \\
& & 0 & & & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

où les λ_i apparaissent n_i fois sur la diagonale.
On a l'égalité $A = P^{-1}MP$ donc la matrice $A^k = P^{-1}M^kP$ est semblable à M^k et $0 = \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = n_i\lambda_i^k + \cdots + n_r\lambda_r^k$, pour tout $k \geq 1$.
Si on écrit ces égalités pour $k \in \{1, \ldots, r\}$ sous forme matricielle, on obtient

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_r\end{pmatrix} = 0$$

Or le déterminant de la matrice carrée de gauche est $\lambda_1 \cdots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$.

Donc nécessairement $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 0$ et la matrice A est semblable à une matrice triangulaire ne comportant que des 0 sur la diagonale, donc elle est nilpotente et par conséquent A est elle-même nilpotente, ce qui est absurde.
2. Démonstration du théorème :
Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini N, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $M \in G$, on ait $M^N = I_n$.
Le théorème peut se démontrer en plusieurs étapes.

– Tout d'abord observons que tous les éléments de G sont diagonalisables.
En effet, toute matrice de G annule le polynôme $X^N - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres appartiennent à l'ensemble des racines $N^{\text{ième}}$ de l'unité : $\mathbb{U}_N$.
– Soit $(M_i)_{1\leq i\leq m} \in G^m$ une base de $\mathrm{Vect}\,(G)$ et considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C}^m \\ A & \mapsto & (\mathrm{Tr}\,(AM_i))_{1\leq i\leq m} \end{array}$$

On veut montrer que f est injective. Commençons par montrer

$$[f(A) = f(B)] \Rightarrow \left[AB^{-1} - I_n \text{ est nilpotente}\right]$$

Supposons $f(A) = f(B)$, par linéarité de la trace, on obtient $\mathrm{Tr}\,(AM) = \mathrm{Tr}\,(BM)$, pour tout $M \in \mathrm{Vect}\,(G)$ donc en particulier pour toute matrice de G.
Posons $D = AB^{-1}$, la matrice D est dans G et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{Tr}\left(D^k\right) = \mathrm{Tr}\left(AB^{-1}D^{k-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(BB^{-1}D^{k-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(D^{k-1}\right)$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $\mathrm{Tr}\left(D^k\right) = \mathrm{Tr}\,(I_n) = n$ et pour tout $k \geq 1$,

$$\mathrm{Tr}\left((D - I_n)^k\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j D^{k-j}\right) = n \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j = n\,(1-1)^k = 0$$

On en déduit le résultat grâce au lemme de caractérisation de la nilpotence par la trace.
– Terminons la preuve en montrant que f est injective est que son image est finie.
La matrice D appartient à G donc elle est diagonalisable et la matrice $D - I_n$ également. Or, cette dernière étant nilpotente, c'est la matrice nulle et on obtient $D = I_n$. On a bien montré $[f(A) = f(B)] \Rightarrow \left[AB^{-1} = I_n\right] \Rightarrow [A = B]$ et f est injective.
L'image de f est incluse dans X^m, où X est l'ensemble des traces des éléments de G. Or, les valeurs propres des éléments de G étant dans $\mathbb{U}_N$, l'ensemble X est fini, et donc le groupe G est fini.

□

3.2 Structure de $\mathcal{N}$

Remarque 36. L'ensemble $\mathcal{N}$ est un cône. En effet, pour tout $u \in \mathcal{N}$ et tout $\lambda \in k$, on a $\lambda u \in \mathcal{N}$.
En dimension 2, cela nous donne :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det(M) = 0 \\ \mathrm{Tr}\,(M) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = a \\ -a^2 - bc = 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît bien ici l'équation d'un cône de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 37. *Soient u nilpotent et v commutant avec u, alors :*
- *$u \circ v$ $(= v \circ u)$ est un endomorphisme nilpotent*
- *si v est également nilpotent, $u + v$ est nilpotent*

Remarque 38. L'ensemble $\mathcal{N}$ n'est pas un sous-groupe. En effet, on a par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{N}$$

En revanche, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}$ peut être caractérisé par la forme linéaire trace :

Proposition 39. $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{N}) = \ker(\mathrm{Tr})$.

3.3 Unipotence

Définition 40. On note $\mathcal{U} := \mathrm{Id}_E + \mathcal{N} = \{\mathrm{Id}_E + u, u \in \mathcal{N}\}$ l'ensemble des endomorphismes unipotents de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 41. $u \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \chi_u = (1-X)^n \Leftrightarrow [u$ trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}]$

Proposition 42. *Si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$ réalise un homéomorphisme.*

Remarque 43. Pour tout endomorphisme u nilpotent, on a l'égalité $\pi_u = X^r$, avec $r \leq n$. Donc pour tout entier $i \geq n$, $u^i = 0$. On peut donc réécrire pour tout $u \in \mathcal{N}$,

$$\exp(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} u^i$$

Si $k = \mathbb{F}_q$ et $n \leq q$, l'application $\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$ est bien définie. En effet, pour tout $i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $\frac{1}{i!}$ a un sens dans $\mathbb{F}_q$. L'application $\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$ réalise encore une bijection.

L'homéomorphisme réalisé par l'exponentielle sur $\mathcal{N}$ dans le cas $k = \mathbb{C}$ permet de prouver le résultat :

Théorème 44. *L'exponentielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. 1. Commençons par montrer que pour toute matrice U unipotente, il existe N une matrice nilpotente, qui s'exprime comme un polynôme en U, telle que $\exp(N) = U$.

Soit U unipotente, la matrice $U - I_n$ est nilpotente et on pose $N = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (U - I_n)^k$ qui est une matrice nilpotente également.

On pose ensuite

$$A(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-t)^{k+1}}{k} (U - I_n)^k\right) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^{k+1}}{k+1} (U - I_n)^{k+1}\right)$$

qui est solution du système différentiel

$$\begin{cases} A'(t) = A(t) \cdot (U - I_n) \cdot (I_n + t(U - I_n))^{-1} \\ A(0) = I_n \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a une unique solution définie sur $\mathbb{R}^+$. Or, l'application $t \mapsto I_n + t(U - I_n)$ est également solution et on en déduit $\exp(N) = A(1) = U$ avec N un polynôme en U.

2. Montrons maintenant la surjectivité de l'exponentielle.

Tout d'abord, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a les égalité $\exp(M) \cdot \exp(-M) = \exp(0_n) = I_n$ et par conséquent $\exp(M) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, la décomposition de Dunford, que nous verrons dans le théorème 51, nous donne N nilpotente et D diagonalisable, les matrices N et D étant des polynômes en M, et telles que $M = D + N$. En posant $U = N \cdot D^{-1} + I_n$, qui est unipotente, on obtient que $M = U \cdot D$. De plus, la matrice U est un polynôme en M, car D^{-1} est un polynôme en D. En effet, si on note $\pi_D = a_0 + a_1 X + \cdots + a_r X^r$ le polynôme minimal de D, on a $a_0 \neq 0$ sinon $a_1 + a_2 X + \cdots + a_r X^{r-1}$ annulerait D, puisque M et D sont inversibles. Donc $D^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left(a_1 + a_2 D + \cdots + a_r D^{r-1}\right) \in \mathbb{C}[D] \subset \mathbb{C}[M]$. D'après ce qui précède, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(U)) = U$.

Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et des λ_i distincts et non nuls tels que $D = P \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r) \cdot P^{-1}$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit α_i tel que $\lambda_i = \exp(\alpha_i)$, et soit $R \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in \{1, \ldots, r\}, R(\lambda_i) = \alpha_i$.

On a alors

$$\begin{aligned} \exp(R(D)) &= \exp\left(R\left(P \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r) \cdot P^{-1}\right)\right) \\ &= P \cdot \exp(R(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r))) \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \mathrm{Diag}(\exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_r), \ldots, \exp(\alpha_r)) \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r) \cdot P^{-1} = D \end{aligned}$$

Finalement, si l'on pose $A = Q(U) + R(D)$, comme U et D sont des polynômes en M, les endomorphismes $Q(U)$ et $R(D)$ commutent et A est un polynôme en M vérifiant

$$\exp(A) = \exp(Q(U)) \cdot \exp(R(D)) = U \cdot D = M$$

□

Remarque 45. On sait que $\exp\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) \neq \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)) > 0$, donc toute matrice de déterminant strictement négatif n'a pas d'antécédent par l'exponentielle.

On montre que $\exp\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = \left\{M^2, M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.

En effet, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\exp(M) = \exp\left(\frac{1}{2}M\right)^2 \in \left\{M^2, M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.

Réciproquement, soit $M \in \left\{M^2, M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$ et $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = B^2$.

D'après ce qui précède, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(B)) = B$ et on a les égalités $\exp\left(\bar{Q}(B)\right) = \exp\left(\bar{Q}\left(\bar{B}\right)\right) = \exp\left(\overline{Q(B)}\right) = \overline{\exp(Q(B))} = \bar{B} = B$.

D'où $\exp\left(\left(Q + \bar{Q}\right)(B)\right) = B^2 = M$ avec $\left(Q + \bar{Q}\right) \in \mathbb{R}[X]$, et donc $\left(Q + \bar{Q}\right)(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'exponentielle n'est injective ni sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P$$

et

$$\exp\left(2\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = P^{-1} \cdot \exp\left(2\pi \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right) \cdot P = P^{-1} \cdot I_n \cdot P = I_n = \exp(0_n)$$

4 Application à la réduction

4.1 Noyaux itérés et sous-espaces caractéristiques

Proposition 46. *Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\{0_E\} = \ker\left(u^0\right) \subsetneq \ker(u) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(u^r) = \ker\left(u^{r+1}\right) = \cdots = \ker(u^m) = \cdots$$

L'entier r est appelé l'indice de u et il vérifie de plus :

- $E = \mathrm{Im}\left(u^0\right) \supsetneq \mathrm{Im}(u) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Im}(u^r) = \mathrm{Im}\left(u^{r+1}\right) = \cdots = \mathrm{Im}(u^m) = \cdots$
- $E = \ker(u^r) \oplus \mathrm{Im}(u^r)$ *avec* $\begin{cases} u_{|\ker(u^r)} \text{ nilpotente} \\ u_{|\mathrm{Im}(u^r)} \text{ inversible} \end{cases}$

Remarque 47. Si u est nilpotente, l'entier r est l'indice de nilpotence de u et $E = \ker(u^r)$.

Définition 48. Soit u trigonalisable, tel que $\chi_u = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_s)^{\alpha_s}$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, on note $N_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}$ et on l'appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ_i.

Proposition 49. *On a les résultats suivants :*

- *Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, N_i est stable par u et $\dim(N_i) = \alpha_i$*
- $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} N_i$
- *Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & \cdots & & & \cdots & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & & & \cdots & & \cdots & \\ & & & & & \lambda_s & & * \\ & 0 & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

Théorème 50. *Soit u trigonalisable, alors $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{r_i}$ avec $r_i \leq \alpha_i$ et r_i égal à l'indice de $u - \lambda_i \mathrm{Id}_E$.*

4.2 Décomposition de Dunford

Théorème 51. *Soit u un endomorphisme trigonalisable. Il existe un unique couple $(n,d) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :*
- *d est diagonalisable et n est nilpotent*
- *$u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$*

De plus, les endomorphismes d et n sont des polynômes en u.

Démonstration. Nous allons prouver le résultat en trois étapes :

1. Commençons par montrer l'existence.
   Soit χ_u le polynôme caractéristique de u, il est scindé sur k car u est trigonalisable :
   $$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$
   Par le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, l'espace E s'écrit comme somme directe des sous-espaces caractéristiques $F_i = \ker (u - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}$:
   $$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$
   Soit d l'endomorphisme de E dont la restriction à chaque F_i est $\lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$. En d'autres termes, l'endomorphisme d est diagonalisable et admet chaque sous-espace F_i comme espace propre pour la valeur propre λ_i.
   Posons $n = u - d$. Comme les F_i sont stables par u et d, ils le sont également par n. Si on note avec un indice i la restriction à F_i de ces endomorphismes, on a $n_i = u_i - d_i$. Or, par définition de F_i, on a l'égalité $n_i^{m_i} = (u_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})^{m_i} = 0$, donc n_i est nilpotent et commute avec d_i. D'où, l'endomorphisme n est nilpotent et commute avec d, et on en déduit bien l'existence.
2. Vérifions que d et u sont des polynômes en u.
   Pour cela on utilise le résultat d'un lemme :
   Lemme. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, la projection π_i sur F_i, parallèlement à $\underset{j \neq i}{\oplus} F_j$, est un polynôme en u.*
   Donc
   $$d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i \in \mathbb{C}[u]$$
   Et $n = u - d \in \mathbb{C}[u]$.
3. Terminons la preuve en montrant l'unicité.
   Soit (d', n') un autre couple répondant au problème. Comme $u = d' + n'$ et d' commute avec n', l'endomorphisme d' commute avec u, donc avec tout polynôme en u. En particulier, l'endomorphisme d' commute avec d, ainsi, ces derniers sont codiagonalisables donc $d' - d$ est diagonalisable.
   De même, l'endomorphisme n' commute avec n, donc $(n - n')^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j n'^j n^{k-j}$. Or, puisque $\min_{0 \leq j \leq k} \{j; k-j\} \geq k/2$, on a l'égalité $(n - n')^k = 0$ pour k suffisamment grand et l'endomorphisme $n - n'$ est nilpotent.
   Or, puisque $n - n' = u - d - (u - d') = d' - d$, l'endomorphisme $n - n'$ est nilpotent et diagonalisable. D'où, les égalités $n - n' = 0$, $n' = n$ et $d' = d$.

□

Démonstration. (du Lemme)

On pose pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, le polynôme $P_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$. Aucun facteur n'est commun à tous les P_i donc ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. Le théorème de Bézout nous dit qu'il existe $U_1, \ldots, U_r \in \mathbb{C}[X]$ tels que $U_1 P_1 + \cdots + U_r P_r = 1$. Posons pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, l'endomorphisme $\pi_i = U_i P_i(u) \in \mathbb{C}[u]$.

- Montrons que les π_i sont des projecteurs :
  On a, pour tout $j \neq i$, que le polynôme χ_u divise $P_i P_j$, donc $P_i P_j(u) = 0$ et
  $$\pi_i \circ \pi_j = U_i P_i(u) \circ U_j P_j(u) = U_i P_i U_j P_j(u) = U_i U_j P_i P_j(u) = U_i U_j(u) \circ P_i P_j(u) = 0$$

Donc pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, comme $\sum_{j=1}^{r} \pi_j = U_1 P_1(u) + \cdots + U_r P_r(u) = \mathrm{Id}$, on a les égalités

$$\pi_i = \pi_i \circ \sum_{j=1}^{r} \pi_j = \sum_{j=1}^{r} \pi_i \circ \pi_j = \pi_i^2$$

Et les π_i sont bien des projecteurs.

– Montrons pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, l'égalité $\mathrm{Im}\pi_i = F_i$:
Soit $y = \pi_i(x) \in \mathrm{Im}\pi_i$, on a les égalités

$$(X - \lambda_i)^{m_i}(u)(y) = (X - \lambda_i)^{m_i}(u) \circ U_i P_i(u)(x) = U_i(u) \circ \chi_u(u)(x) = 0$$

Donc on obtient l'inclusion $\mathrm{Im}\pi_i \subset F_i$.
Soit $x \in F_i$, pour tout $j \neq i$, on a les égalités $\pi_j(x) = U_j(u) \circ P_j(u)(x) = 0$ car $(X - \lambda_i)^{m_i}$ divise P_j. Donc on obtient l'inclusion $F_i \subset \ker \pi_j$ et et l'égalité $x = \sum_{j=1}^{r} \pi_j(x) = \pi_i(x)$.
D'où, $x = \pi_i(x) \in \mathrm{Im}\pi_i$ et $\mathrm{Im}\pi_i = F_i$.

– Pour terminer la preuve, montrons pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, l'égalité $\ker \pi_i = \underset{j \neq i}{\oplus} F_j$:
On a déjà vu, l'inclusion $F_j \subset \ker \pi_i$, pour tout $j \neq i$, donc $\underset{j \neq i}{\oplus} F_j \subset \ker \pi_i$.
Soit $x \in \ker \pi_i$, on a $x = \sum_{j \neq i} \pi_j(x) \in \underset{j \neq i}{\oplus} F_j$.
On a bien montré que $\ker \pi_i = \underset{j \neq i}{\oplus} F_j$, d'où le résultat du lemme.

□

Exemple 52. On a l'inégalité $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 53. Cette décomposition peut être effectuée sur un corps quelconque k dès lors que le polynôme caractéristique de u est scindé sur k, c'est-à-dire dès lors que u est trigonalisable. C'est bien une condition nécessaire. En effet, si $u = d + n$, avec d diagonalisable et n nilpotente, les endomorphismes d et n commutent et sont par conséquent cotrigonalisables. Donc l'endomorphisme u est trigonalisable.

Application : Calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme.

$$u = d + n \text{ et } d \circ n = n \circ d \text{ donc } \exp(u) = \exp(d)\exp(n) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix} \cdot \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} n^k \right).$$

4.3 Réduction des endomorphismes nilpotents

Remarque 54. Pour $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(u)$, l'espace N_i est stable par u et l'endomorphisme $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)_{|N_i}$ est nilpotent.
Pour étudier u trigonalisable, il suffit de savoir réduire les nilpotents.

4.3.1 Tableaux de Young

Définition 55. À toute suite finie d'entiers $(n_1, \ldots, n_r)$ vérifiant $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0$, on peut associer son tableau de Young à r lignes, dont la i-ème ligne comporte n_i cases. On note $\mathrm{TY}(n_1, \ldots, n_r)$ ce tableau.

Exemple 56. On donne l'exemple du tableau de Young de la suite $(6, 4, 3, 1)$:

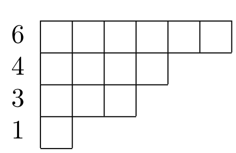

Table 1 – Un exemple de tableau de Young, $\mathrm{TY}(6, 4, 3, 1)$

Définition 57. À une suite finie d'entiers $(n_1, \ldots, n_r)$ on associe la suite finie $(m_1, \ldots, m_p)$ des longueurs des colonnes de $\mathrm{TY}\,(n_1, \ldots, n_r)$. On a encore les inégalités $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p > 0$ et on définit le tableau de Young conjugué à $\mathrm{TY}\,(n_1, \ldots, n_r)$ par le tableau de Young $\mathrm{TY}\,(m_1, \ldots, m_p)$. On note $\mathrm{TY}^*\,(n_1, \ldots, n_r) = \mathrm{TY}\,(m_1, \ldots, m_p)$.

Exemple 58. On donne l'exemple du tableau de Young conjugué à celui vu juste au-dessus.

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 4 & \square & \square & \square & \square \\ 3 & \square & \square & \square & \\ 3 & \square & \square & \square & \\ 2 & \square & \square & & \\ 1 & \square & & & \\ 1 & \square & & & \end{array}$$

TABLE 2 – Un exemple de tableau de Young conjugué, $\mathrm{TY}^*\,(6,4,3,1) = \mathrm{TY}\,(4,3,3,2,1,1)$

Proposition 59. *Soient $u \in \mathcal{L}\,(E)$ et $i \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme u induit une injection, appelée injection de Frobenius,*

$$\left[\ker\left(u^{i+1}\right) / \ker\left(u^{i}\right)\right] \hookrightarrow \left[\ker\left(u^{i}\right) / \ker\left(u^{i-1}\right)\right]$$

Remarque 60. Soit $u \in \mathcal{L}\,(E)$. On considère la suite des noyaux itérés de u. On note $d_i = \dim\left(\ker\left(u^i\right)\right)$ et $n_i = d_i - d_{i-1}$. D'après ce qui précède, on a $n_{i+1} = d_{i+1} - d_i \leq d_i - d_{i-1} = n_i$ donc la suite finie $(n_1, \ldots, n_r)$ ainsi définie vérifie : $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r > 0$, $n_1 = d_1 - d_0 = d_1 = \dim\left(\ker\left(u\right)\right)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{i=1}^{r} d_i - d_{i-1} = d_r - d_0 = n$.

Définition 61. Soit $u \in \mathcal{N}$, on définit le tableau de Young associé à u par $\mathrm{TY}\,(u) = \mathrm{TY}^*\,(n_1, \ldots, n_r) = \mathrm{TY}\,(m_1, \ldots, m_{n_1})$.

Exemple 62. Le tableau de Young de l'endomorphisme $u \in \mathcal{N} \subset \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^{14}\right)$ tel que $d_1 = \ker\,(u) = 6$, $d_2 = 10$, $d_3 = 13$ et $d_4 = 14$ est $\mathrm{TY}^*\,(6,4,3,1)$ vu à l'exemple 58.

Remarque 63. On peut lire beaucoup d'informations sur le tableau de Young d'un endomorphisme, mais nous aurons besoin de la décomposition de Jordan pour pouvoir les visualiser. Pour le moment, nous pouvons simplement remarquer que le nombre de lignes, c'est-à-dire le nombre de cases de la première colonne n_1, est la dimension du noyau de u, et que la somme de toutes les cases est la dimension n de E. On peut également noter que le nombre de colonnes $m_1 = r$ est l'indice de nilpotence de u.

4.3.2 Décomposition de Jordan pour les endomorphismes nilpotents

Définition 64. On appelle bloc de Jordan élémentaire une matrice carré du type :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 65. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *$r = n$, c'est-à-dire que $\chi_u = (-1)^n X^n$ et $\pi_u = X^n$*
- *Il existe x tel que $\left(x, u\,(x), \ldots, u^{n-1}\,(x)\right)$ soit une base de E (u cyclique)*
- *Il existe B telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u) = J$*

Théorème 66. *(décomposition de Jordan pour les nilpotents)*
Soit $u \in \mathcal{N}$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u) = \mathrm{Diag}\,(J_1, \ldots, J_{n_1}) =: \tilde{J}$$

où J_i est de taille $m_i \times m_i$. $\tilde{J}$ est appelée la réduite de Jordan de u.

Remarque 67. Il y a autant de blocs de Jordan que la dimension du noyau de u. En effet, dans chaque bloc de Jordan, il y a un et un seul vecteur du noyau de u.

On peut trouver les tailles des blocs de Jordan qui interviennent dans la décomposition ci-dessus grâce au tableau de Young de u puisqu'elles sont égales aux m_i. Le nombre de blocs de Jordan de taille m dans la réduite est $n_m - n_{m+1}$.

Exemple 68. Si l'on reprend l'exemple 62, on voit que N admet 6 blocs de Jordan, un de taille 4, deux de taille 3, un de taille 2 et deux de taille 1. La réduite de Jordan s'exprime alors :

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & & & & 0 \\
& \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & & & \\
& & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & & \\
0 & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & \\
& & & & 0 & \\
& & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Corollaire 69. *Deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(k)$ sont semblables si et seulement si elles ont la même réduite de Jordan, à l'ordre des blocs près.*

Corollaire 70. *Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si et seulement s'ils ont le même tableau de Young.*

4.4 Décomposition de Jordan généralisée

Théorème 71. *(Décomposition de Jordan généralisée)*

Soit u trigonalisable, avec $\chi_u = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_s)^{\alpha_s}$.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}\left(\tilde{J}(\lambda_1), \ldots, \tilde{J}(\lambda_s)\right)$$

où $\tilde{J}(\lambda_i) = \lambda_i I_{\alpha_i} + \tilde{J}_i$ ($\tilde{J}_i$ étant la réduite de Jordan du nilpotent $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)_{|N_i}$ et $N_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}$).

Corollaire 72. *Deux matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(k)$ sont semblables si et seulement si elles ont la même décomposition de Jordan, à l'ordre des blocs près.*

Références

[1] V. Beck, J. Malick et G. Peyré. *Objectif agrégation.* H&K, 2005.

[2] A. Chambert-Loir. *Algèbre corporelle.* Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

[3] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas. *Oraux X-Ens, algèbre 2.* Cassini, 2009.

[4] X. Gourdon. *Algèbre.* Ellipse, 2009.

[5] J. Grifone. *Algèbre linéaire.* Cépaduès, 2011.

[6] R. Mansuy et R. Mneimné. *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes.* Vuibert, 2012.

[7] P. Tauvel. *Algèbre.* Dunod, 2005.

[8] M. Zavidovique. *Un max de maths.* Calvage & Mounet, 2013.