Développement : Méthode de Laplace

Léo Daures

Leçons 229, 236, 239, 253, 265

Référence : Zuily-Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.

1 Énoncé du théorème

L'objectif de ce développement est de montrer la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(I)$, et $g \in \mathcal{C}(I)$. On suppose de plus que :*

- *$t \mapsto e^{-x\varphi(t)}g(t)$ est intégrable pour tout $x \in [a, +\infty[$.*
- *φ' s'annule en exactement un point t_0, en lequel $\varphi''(t_0) > 0$ (c'est donc le minimum global de φ).*
- *$g(t_0) \neq 0$*

Alors,

$$\int_I e^{-x\varphi(t)}g(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{x}}e^{-x\varphi(t_0)} \quad \text{avec } A = g(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(t_0)}}$$

Ce résultat vient essentiellement de la croissance de l'exponentielle, puisque c'est le facteur $e^{-\varphi(t)x}$ qui décide où placer le poids dans l'intégrale : là où $e^{-\varphi(t)x}$ est très grand $e^{-\varphi(t)x}g(t)$ le sera aussi, et là où $e^{-\varphi(t)x}$ est très petit, $e^{-\varphi(t)x}g(t)$ l'est aussi, peu importe la valeur de g tant qu'elle est non nulle. Moralement, l'exponentielle vient donc accrocher le minimum de φ en t_0 et y placer tout le poids au fur et à mesure que x grandit. Si $\varphi(t_0) > 0$, c'est en t_0 que $e^{-\varphi(t_0)}$ décroît le moins vite, et si $\varphi(t_0) < 0$, c'est en t_0 que $e^{-\varphi(t)x}$ croît le plus vite ! Pas étonnant dès lors que l'intégrale ressemble asymptotiquement à son intégrande prise en t_0 ...

On remarquera qu'en effectuant le changement de variable $xu = t$ dans $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt$ et en prenant $\varphi(u) = u - \ln(u)$ et $g = 1$ on déduit simplement de ce résultat la :

Proposition 2 (formule de Stirling)**.**

$$n! \underset{x\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

2 Démonstration

Montrons l'équivalent annoncé

Démonstration. Une méthode classique pour obtenir des résultats sur une intégrale dépendant d'un paramètre est de sortir, par tous les moyens possibles, le paramètre de l'intégrande. Attelons nous donc à cette tâche : commencons par écrire φ à l'aide d'une formule de Taylor:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + 0 + (t-t_0)^2\psi(t)$$

$$\text{avec } \psi(t) = \int_0^1 (1-u)\varphi''(ut + (1-u)t_0)du$$

On obtient donc

$$\int_I e^{-x\varphi(t)}g(t)dt = e^{-x\varphi(t_0)}\int_I e^{-x(t-t_0)^2\psi(t)}g(t)dt$$

Par cette opération très simple, on n'a effectué qu'un petit pas dans la démonstration, mais on a déjà isolé le facteur prépondérant de l'équivalent : $e^{-x\varphi(t_0)}$.

Il faut encore s'occuper de l'intégrale restante. À la vue du facteur $e^{-x(t-t_0)^2\psi(t)}$, on est pris d'une irrésistible envie de se ramener à une intégrale de Gauss. Il faudrait donc effectuer le changement de variable $u=(t-t_0)\sqrt{\psi(t)}$. Seul problème : on ne sait pas s'il s'agit vraiment d'un changement de variable, c'est-à-dire si $\rho : t\mapsto (t-t_0)\sqrt{\psi(t)}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, ni même s'il est défnini !

- Montrons qu'on peut définir ρ. En effet, on observe que $\psi(t_0)=\frac{1}{2}\varphi''(t_0)>0$. Donc dans un intervalle $J=[t_0-\delta,t_0+\delta]\subset I$, on est certains que $\psi\geq 0$, ce qui permet de définir ρ sur J.

- Montrons maintenant que ρ est bien $\mathcal{C}^1$. En écrivant $\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)^2}$, on voit que ψ est au moins $\mathcal{C}^1$ sur $J\backslash\{t_0\}$. Donc ρ est $\mathcal{C}^1$ sur $J\backslash\{t_0\}$. En fait, elle est même $\mathcal{C}^1$ sur J tout entier. En effet, sur $J\backslash\{t_0\}$, on a d'une part $\rho'(t)=\frac{1}{2\sqrt{\psi(t)}}((t-t_0)\psi'(t)-2\psi(t))$, et d'autre part, en dérivant le développement de Taylor de φ, $\varphi'(t)=(t-t_0)^2\psi'(t)+2(t-t_0)\psi(t)$, d'où, sur $J\backslash\{t_0\}$, $\rho'(t)=\frac{\varphi'(t)}{2(t-t_0)\sqrt{\psi(t)}}\xrightarrow[t\to t_0]{}\sqrt{\frac{1}{2}\varphi''(t_0)}$, et on peut donc prolonger continuement ρ' sur tout J.

- Enfin, pour en faire un changement de variable, on veut que ρ soit une bijection. $\rho'(t_0)=\sqrt{\frac{1}{2}\varphi''(t_0)}>0$, donc sur un intervalle $J'=[t_0-\delta',t_0+\delta']\subset J$, on a $\rho'(t)>0$ et ρ strictement croissante donc injective.

On dispose maintenant du changement de variable désiré sur l'intervalle J'. Le reste de l'intervalle d'intégration ne nous intéresse pas, débarassons nous-en avec une fonction plateau θ qui vaut 1 sur $[t_0-\frac{\delta'}{2},t_0+\frac{\delta'}{2}]$ et 0 en dehors de J'. Elle permet d'écrire :

$$\int_I e^{-x\varphi(t)}g(t)dt = e^{-x\varphi(t_0)}\underbrace{\int_{J'}\theta(t)e^{-x(t-t_0)^2\psi(t)}g(t)dt}_{=:F_1(x)} + \underbrace{\int_I(1-\theta(t))e^{-x\varphi(t)}g(t)dt}_{=:F_2(x)}$$

Nous nous occuperons de F_2 en temps voulu. Pour l'instant, observons F_1 et profitons de pouvoir enfin effectuer le changement de variable auquel on préparait le terrain depuis si longtemps ! Avec $u=\rho(t)$, on a maintenant :

$$F_1(x)=\int_{J'}\theta(t)e^{-x(t-t_0)^2\psi(t)}g(t)dt=\int_{\rho(J')}e^{-xu^2}h(u)du$$

avec $h(u)=g(\rho^{-1}(u))\theta(\rho^{-1}(u))(\rho^{-1})'(u)$. Un deuxième changement de variable $v=xu$ donne une expression encore plus proche d'une intégrale de Gauss :

$$F_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{x\rho(J')}e^{-v^2}h(\frac{v}{\sqrt{x}})dv$$

Il n'y a plus qu'à appliquer un théorème de convergence dominée pour conclure sur le sort de F_1. h étant continue à support compact (car θ est à support compact), elle admet un maximum, permettant de fournir la majoration intégrable $|\mathbf{1}_{x\rho(J')}(v)e^{-v^2}h(\frac{v}{\sqrt{x}})|\leq ||h||_\infty\times e^{-v^2}$, d'où

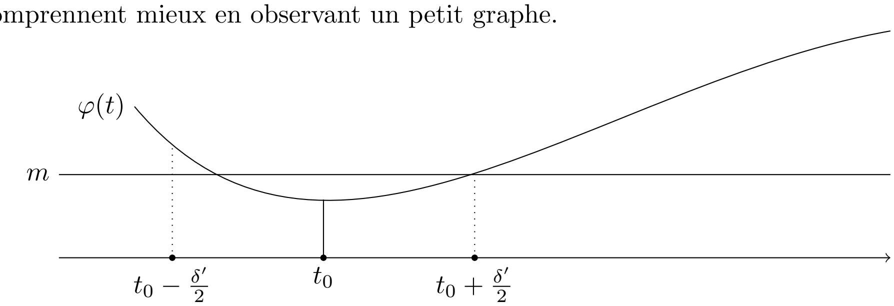
$$\int_{x\rho(J')}e^{-v^2}h(\frac{v}{\sqrt{x}})dv\xrightarrow[x\to\infty]{}h(0)\int_{\mathbb{R}}e^{-v^2}dv=\sqrt{\pi}h(0)$$

L'observation approfondie de l'expression de $h(u)$, épaulée par la formule de la dérivée de l'inverse $(\rho^{-1})'=1/\rho'\circ\rho^{-1}$ permet de voir que $h(0)=g(t_0)\sqrt{\frac{2}{\varphi''(t_0)}}$, et de s'assurer par là que $h(0)\neq 0$ par hypothèse. On a donc un équivalent de F_1 :

$$F_1(x)\underset{x\to\infty}{\sim}g(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{x\varphi''(t_0)}}$$

Il ne reste plus qu'à voir que F_2 est négligeable devant $e^{-x\varphi(t_0)}F_1(x)$. Ainsi on aura $\int e^{-x\varphi(t)}g(t)dt \sim e^{-x\varphi(t_0)}F_1(x)$, ce qui prouvera l'équivalent du théorème.

Pourquoi F_2 est elle négligeable ? Commençons par observer φ : l'hypothèse de stricte positivité de $\varphi''(t_0)$ et l'impossibilité pour φ' de s'annuler autre part qu'en t_0 impliquent que φ est strictement décroissante avant t_0 et strictement croissante après t_0. On peut donc trouver une constante $m > \varphi(t_0)$ telle que $\forall t \in I\backslash[t_0 - \frac{\delta'}{2}, t_0 + \frac{\delta'}{2}],\ \varphi(t) \geq m > \varphi(t_0)$. Un dessin vaut mille mots, et toutes ces explications se comprennent mieux en observant un petit graphe.



On voit que δ' avait été précisément défini tel que c'est exclusivement sur $[t_0 - \frac{\delta'}{2}, t_0 + \frac{\delta'}{2}]$ que φ est proche de son minimum ! Alors,

$$\begin{aligned}
|F_2(x)| &\leq \int_{I\backslash[t_0-\frac{\delta'}{2}, t_0+\frac{\delta'}{2}]} (1-\theta(t))e^{-x\varphi(t)}|g(t)|dt \\
&\leq e^{-xm}\int_{I\backslash[t_0-\frac{\delta'}{2}, t_0+\frac{\delta'}{2}]} |g(t)|dt \\
&= Ce^{-xm} \underset{x\to\infty}{=} o\Big(\frac{e^{-x\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}\Big)
\end{aligned}$$

Cela montre donc finalement que $F_1(x)e^{-x\varphi(t_0)}$ est asymptotiquement le seul terme qui compte, et que

$$\int_I e^{-x\varphi(t)}g(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} F_1(x)e^{-x\varphi(t_0)} \underset{x\to\infty}{\sim} g(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{x\varphi''(t_0)}}e^{-x\varphi(t_0)}$$

$\square$