Méthode de Gauss

Ce développement se trouve dans Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*. Il est sans doute préférable d'inclure la note dans le développement.

Soit ω une fonction continue sur $]a,b[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b |x^n|\omega(x)dx < \infty$. On note $L^2(\omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à ce poids. On cherche une méthode d'intégration approchée du type

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j).$$

Il existe alors un unique choix des points x_j et des coefficients λ_j tels que la méthode soit d'ordre $2l+1$. Les points x_j sont alors, dans $]a,b[$ et racines du $(l+1)^{\mathrm{e}}$ polynôme orthogonal pour le poids ω.

Unicité. Supposons qu'il existe de tels x_j, λ_j. Posons $\pi_{l+1}(x) = \prod(x-x_j)$. Pour tout $p \in \mathbb{R}_l[X]$, $\deg(p\pi_{l+1}) \leqslant 2l+1$ donc

$$\int_a^b p(x)\pi_{l+1}(x)\omega(x)dx = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j p(x_j)\pi_{l+1}(x_j) = 0$$

donc π_{l+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$. Comme il est unitaire, c'est nécessairement le $(l+1)^{\mathrm{e}}$ polynôme orthogonal pour le poids ω. Les x_j en sont donc les racines.
De même, si on introduit le polynôme L_i de Lagrange de degré l, tel que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, on a

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_i(x_j) = \int L_i(x)\omega(x)dx,$$

ce qui détermine uniquement les coefficients λ_j.

Existence. Le polynôme orthogonal pour ω de degré $l+1$, qu'on note π_{l+1}, a exactement $l+1$ racines distinctes dans $]a,b[$ [1]. On les note $x_0, \cdots, x_l$. On pose

$$\lambda_j = \int_a^b L_j(x)\omega(x)dx.$$

Si f est continue sur $[a,b]$, on note $p_l(x) = \sum_{j=0}^{l} f(x_j)L_j(x)$ le polynôme interpolateur de Lagrange. Alors

$$\int_a^b p_l(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j).$$

1. Pour montrer cela, on considère $x_1, \cdots, x_k$ les racines de π_n de multiplicité $m_1, \cdots, m_k$. On a $\sum m_k \leqslant n$. On pose alors $\varepsilon_i = 0$ si m_i est pair et $\varepsilon_i = 1$ si m_i est impair. Alors, si

$$q = \prod_{i=1}^{k} (x-x_i)^{\varepsilon_i},$$

on polynôme $\pi_n q$ n'a que des zéros de multiplicité paire, donc il est de signe constant dans $]a,b[$. De fait, $\int \pi_n q\omega \neq 0$ (le polynôme n'est pas constamment nul). Comme $\pi_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$, ceci impose que q soit de degré n, donc que π_n ait n racines distinctes.

De fait, si $f \in \mathbb{R}_l[X]$, la méthode est exacte, donc elle est d'ordre $\geqslant l$. On peut montrer facilement qu'elle est d'ordre $\geqslant 2l+1$ en écrivant la division euclidienne de $f \in \mathbb{R}_{2l+1}[X]$ par π_{l+1} : $f = q\pi_{l+1} + r$, $\deg(q) < l$ et $\deg(r) < l$. Comme $\pi_{l+1} \perp \mathbb{R}_l[X]$, on a

$$\int_a^b q(x)\pi_{l+1}(x)\omega(x) = 0$$

donc

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b r(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j r(x_j) = \sum \lambda_j f(x_j).$$

La méthode n'est pas d'ordre $l2+2$ car $\int_a^b \pi_{l+1}^2(x)\omega(x)dx > 0$ alors que $\sum \lambda_j \pi_{l+1}^2(x_j) = 0$.