

Théorème de Molien

2012-2013

Référence : Eric Leichtnam, *Exercices d'oraux X-ENS : tome Algèbre et Géométrie*, Ellipses, 1999, p. 95.

Théorème.

Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de V .

Soit G un sous-groupe fini de $GL(V)$.

On note $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et on pose :

$$\begin{aligned} \sigma & : G \longrightarrow \mathfrak{S}(A) \\ g & \longmapsto (P \mapsto P(g^{-1} \cdot (X_1, \dots, X_n))) \end{aligned}$$

où (X_1, \dots, X_n) est identifié avec la colonne ayant pour coordonnées X_1, \dots, X_n et \cdot est le produit matriciel.

i.e., si $g^{-1} = (u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$\sigma(g)(P)(X_1, \dots, X_n) = P \left(\sum_{j=1}^n u_{1,j} X_j, \dots, \sum_{j=1}^n u_{n,j} X_j \right)$$

Alors :

- σ définit une action de G sur A et est à valeurs dans $GL(A)$, on notera $\sigma(g)(P) = g \cdot P$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'espace des polynômes homogènes de A de degré k . L'action de G sur A induit alors une action de G sur A_k .
- Finalement, on note A_k^G l'ensemble des points fixes sous cette action, i.e.

$$A_k^G = \{P \in A_k \mid \forall g \in G, g \cdot P = P\}$$

et $a_k(G) = \dim A_k^G$.

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(G) X^k = \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\text{Id} - Xg)}$$

Lemme.

Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n et G un groupe fini.

Soit $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ un morphisme de groupes.

On note :

$$V^G = \bigcap_{g \in G} \ker(\varphi(g) - \text{Id})$$

Alors :

$$\dim V^G = \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \text{Trace } \varphi(g)$$

Démonstration. On considère :

$$p_G = \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \varphi(g)$$

Montrons que $p_G(V) = V^G$:

– Soit $v \in V, h \in G$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi(h)(p_G(v)) &= \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \varphi(h)\varphi(g)(v) \\ &= \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \varphi(hg)(v) \\ &= p_G(v) \end{aligned}$$

car $g \mapsto hg$ est une bijection de G , donc $p_G(V) \subseteq V^G$.

– Réciproquement, on a $p_G(v) = v$ pour tout $v \in V^G$, donc $V^G \subseteq p_G(V)$.

L'égalité $\varphi(h)p_G = p_G$ pour tout $h \in G$ montre que $p_G^2 = p_G$, donc p_G est un projecteur d'image V^G .

D'où :

$$\text{rang } p_G = \dim V^G = \text{Trace } p_G$$

D'où le résultat par linéarité de la trace. □

Démonstration du théorème.

– Montrons d'abord que σ définit bien une action de G sur A . On a :

$$\begin{aligned} (g \cdot (g' \cdot P))(X_1, \dots, X_n) &= (g' \cdot P)(g^{-1} \cdot (X_1, \dots, X_n)) \\ &= P((gg')^{-1} \cdot (X_1, \dots, X_n)) \\ &= (gg') \cdot P \end{aligned}$$

et $\text{Id} \cdot g = g$.

De plus, $\sigma(g)$ est clairement linéaire, donc $\sigma(g) \in GL(A)$.

– Pour $k \in \mathbb{N}$, $g \cdot A_k \subseteq A_k$, donc l'action de G sur A induit une action de G sur A_k . Notons $\sigma_k : G \rightarrow GL(A_k)$ le morphisme induit par σ .

– Soit $g \in G$. Observons d'abord que g est diagonalisable. En effet, le polynôme $X^{\text{Card } G} - 1$ annule g et est scindé à racines simples.

Soit alors $u \in GL(V)$ tel que la matrice de ugu^{-1} dans la base (e_1, \dots, e_n) soit diagonale et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de g .

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\text{Id} - Xg)} &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \lambda_i X} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_i^k X^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} \right) X^k \end{aligned}$$

D'autre part, si $k_1 + \dots + k_n = k$, alors :

$$\sigma_k(ugu^{-1})(X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}) = \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$$

Donc $\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}$ est valeur propre de $\sigma_k(ugu^{-1})$. Or les $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ forment une base de A_k , donc :

$$\text{Trace}(\sigma_k(g^{-1})) = \text{Trace}(\sigma_k(ugu^{-1})) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}$$

D'où :

$$\frac{1}{\det(\text{Id} - Xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Trace}(\sigma_k(g^{-1})) X^k$$

En appliquant le lemme avec $V = A_k$ et $\varphi = \sigma_k$, on obtient :

$$\dim A_k^G = a_k(G) = \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \text{Trace}(\sigma_k(g^{-1}))$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(G) X^k &= \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{g \in G} \text{Trace}(\sigma_k(g^{-1})) X^k \\ &= \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{+\infty} \text{Trace}(\sigma_k(g^{-1})) X^k \\ &= \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\text{Id} - Xg)} \end{aligned}$$

□