Décomposition de Jordan - Chevalley - Dunford

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec χ_A scindé. Alors il existe $D, N \in \mathbb{R}[A]$ tq $A = D + N$ et : • D dgble • N nilp • $DN = ND$.

Remarque : en fait, ils sont uniques dans $M_n(\mathbb{R})$

Preuve

Posons $P = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$ sans.

Remarque (*) Comme $\chi_A(A) = 0$ et $\exists m \in \mathbb{N}$, $\chi_A \mid P^m$, la matrice $P(A)$ est nilpotente.

On recherche D tq $P(D) = 0$, d'où D dgble avec les mêmes valeurs propres que A.

idée : méthode de Newton !

À partir d'ici, on calcule dans l'algèbre commutative $\mathbb{R}[A]$. On prendra soin de vérifier que toutes les opérations sont autorisées.

Sous réserve d'existence, on pose : $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = A_k - P(A_k) P'(A_k)^{-1} \end{cases}$

(D'après les résultats d'analyse on voudrait $D = \lim_k A_k$)

Notation : On dit $X = Y + O(Z)$ si $X - Y \in \langle Z \rangle$ ← idéal bilatère de $\mathbb{R}[A]$

Montrons par récurrence sur k :

(i) $P(A_k) = O(P(A)^{2^k})$

(ii) $P'(A_k)$ est inversible

((ii) permet de construire A_{k+1} et vérifier que $A_{k+1} \in \mathbb{R}[A]$ car $\mathbb{R}[A]$ est stable par $+, \times$ et inverse car $A^{-1} \in \mathbb{R}[A]$.)

$\boxed{k=0}$ (i) $P(A_0) = P(A) = O(P(A))$

(ii) $P \wedge P' = 1$ car P est sans. Donc $PU + P'V = 1$. En évaluant en A, on a $P'(A)V(A) = \underbrace{I_n}_{\text{inversible}} + \underbrace{O(P(A))}_{\text{nilpotent par } (*)}$ est inversible.

$\boxed{k>0}$

On veut calculer $P(A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1})$ et $P'(A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1})$

L'idée est d'utiliser un développement de Taylor, justifié par le lemme suivant :

<u>Lemme</u> Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors $Y^2 \mid Q(X+Y) - Q(X) - YQ'(X)$

<u>Preuve</u> : si $Q = X^p$,

$$Q(X+Y) = (X+Y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k Y^{p-k} = X^p + YpX^{p-1} + Y^2 \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} X^k Y^{p-k-2}$$

Si Q est une combinaison linéaire de X^k, la relation est encore vraie.

(i) lemme appliqué à $Q = P$, $X = A_k$, $Y = -P(A_k)P'(A_k)^{-1}$:

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1}) \\ &= P(A_k) - P(A_k)P'(A_k)^{-1}P'(A_k) + O(P(A_k)^2) \\ &= O(P(A_k)^2) \\ &= O(P(A)^{2^k}) \end{aligned}$$

(ii) lemme appliqué à $Q = P'$, $X = A_k$, $Y = P(A_k)P'(A_k)^{-1}$:

$$\begin{aligned} P'(A_{k+1}) &= P'(A_k) - P(A_k)P'(A_k)^{-1}P''(A_k) + O(P(A_k)) \\ &= \underbrace{P'(A_k)}_{\text{inversible}} + \underbrace{O(P(A_k))}_{\text{nilpotent par } (*)} \end{aligned}$$

donc $P'(A_{k+1})$ inversible.

On a donc obtenu par récurrence une suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}[A]$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(A_k) = O(P(A)^{2^k})$.
Or $P(A)$ est nilpotent, donc après k_0, $P(A_k) = 0$ (l'idéal engendré par $P(A)^{2^k} = 0$ est $\{0\}$).
Donc (A_k) est stationnaire et on note D sa limite.
On a $P(D) = 0$ donc D est bien diagonalisable.
Posons $N = A - D$ (qui commute avec D car les deux sont dans l'algèbre $\mathbb{R}[A]$.)
Alors, $N = A - D = \sum_{k=0}^{k_0} (A_k - A_{k+1}) = \sum_{k=0}^{k_0} P(A_k) P'(A_k)^{-1} = O(P(A))$
donc N est nilpotent.
Tous les points du théorème sont vérifiés. $\square$

<u>Preuve de la remarque (unicité)</u>

Si N', D' vérifient aussi les hypothèses du théorème, $N' - N = D - D'$.
Comme N et N' commutent, $N' - N$ est nilpotente, et comme D et D' commutent, $D - D'$ est diagonalisable (car D, D' codiagonalisables).
Donc $N' - N = D - D'$ est diagonalisable et nilpotente, donc est nulle.

- La notation "O" est une invention de Mathieu Romagny.
Elle s'avère utile pour éviter les tergiversations chronophages, d'autant que l'analogie "infinitésimaux de l'analyse = nilpotents de l'algèbre" fonctionne bien, mais elle reste dangereuse :
  - À moins que Matthieu Romagny ne rédige un bouquin avant les oraux, il n'y a pas de référence.
  - il est très important de comprendre solidement ce qu'elle cache, notamment l'importance du fait que $\mathbb{R}[A]$ est une algèbre commutative, argument utilisé implicitement tout au long de la démonstration.
- référence sans "O" : voir <u>131 développements pour l'oral</u> par Lesesvre, Montagnon, Le Barbenchon, Pierron, et les remarques que les auteurs apportent.
- historiquement, la démo est de Claude Chevalley au début du $\underline{XX}^e$ siècle.