Nombres normaux

Arnaud Girand

19 juin 2012

Référence :
- [QZ07], p. 550–551

Soit $x \in [0,1)$ et $r \geq 2$ un entier. On sait qu'alors x admet un unique développement propre en base r :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{r^n}, \qquad \text{les } \varepsilon_n(x) \in \mathcal{A} := \{0, \dots, r-1\}$$

Soit $k \geq 1$ et soit $b \in \mathcal{A}^k$. Alors on pose :

$$N_x(b,n) := \mathrm{card}(\{i \in [n-k+1] \,|\, \varepsilon_i(x) = b_1, \dots, \varepsilon_{i+k-1} = b_k\})$$

$N_x(b,n)$ correspond donc au nombre d'occurrences du motif b dans l'écriture de x en base r. On pose alors la définition suivante :

Définition 1 (Nombre normal)
Soit $x \in [0,1)$.
Alors x est dit :

(i) r–normal, pour $r \geq 2$, si pour tout mot $b \in \mathcal{A}^k$ (où $\mathcal{A} := \{0, \dots, r-1\}$) on a :

$$\frac{N_x(b,n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{r^k}$$

(ii) normal si il est r–normal pour tout $r \geq 2$.

Un nombre normal est donc un nombre plein de bon sens, qui se comporte exactement comme on aimerait. Et il a raison. On se propose alors de démontrer le résultat suivant :

Proposition 1
Presque tout réel (au sens de Lebesgue) de $[0,1)$ (muni de sa tribu borélienne) est normal.

Démonstration : Soit $r \geq 2$ et posons[1] $\mathcal{A} := \{0, \dots, r-1\}$. Pour $x \in [0,1)$, on note par[2] $(\varepsilon_n(x))_n$ le développement de x en base r. On remarque alors que ce procédé nous fournit une suite i.i.d de variables aléatoires : la suite $(\varepsilon_n)_n$, avec :

$$\forall b \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(\varepsilon_1 = b) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{b}{r}, \frac{b+1}{r}\right)\right) = \frac{1}{r}$$

On définit également la variable aléatoire $N(b,n) : x \mapsto N_x(b,n)$.

Fixons à présent $b \in \mathcal{A}$ et posons, pour $j \in \mathbb{N}^*$, $X_j := 1_{\varepsilon_j = b}$. Alors les variables aléatoire X_j sont i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = b) = \frac{1}{r}$. De fait, par loi forte des grands nombres on a :

$$\frac{N(b,n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r}$$

Et donc le résultat est vrai pour b de longueur 1.

Si $b = (u,v) \in \mathcal{A}^2$, on modifie légèrement le procédé en posant $Y_j := 1_{\varepsilon_j = u, varepsilon_{j+1} = v}$. On a alors :

$$\frac{N(b,n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} Y_j$$

1. À nouveau ...
2. Ô surprise !

Cependant, les v.a Y_j, bien qu'étant identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}\left(1, \frac{1}{r^2}\right)$, ne sont pas indépendantes. On contourne ce problème en remarquant que les suites $(Y_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(Y_{2n})_{n\geq 1}$ sont, elles, i.i.d. Une application double de la loi forte des grands nombres nous donne alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r^2}$$

De fait :

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n} Y_j = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r^2} \tag{1}$$

Et :

$$\frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{2n-1} Y_j = \frac{n}{2n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{2j-1}\right) + \frac{n}{2n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} Y_{2j}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r^2} \tag{2}$$

En effet, le second membre converge comme on le souhaite car :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} Y_{2j} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} Y_{2j}\right)$$

En combinant (1) et (2) on obtient que :

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r^2}$$

In fine :

$$\frac{N(b,n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} Y_j = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} Y_j\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r^2}$$

En itérant ce procédé, on obtient le résultat suivant : pour tout b mot de longueur k sur $\mathcal{A}$, $\frac{N(b,n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \frac{1}{r^k}$. Presque tout réel de $[0,1)$ est donc r–normal.

Or si on note E (resp. E_r pour $r \geq 2$) l'ensemble des réels de $[0,1)$ normaux (resp. r–normaux) on a :

$$E = \bigcap_{r\geq 2} E_r$$

Cette intersection étant dénombrable on a, comme les $\mathbb{P}(E_r)$ sont égaux à 1, que $\mathbb{P}(E) = 1$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([0,1)\setminus E) &= \mathbb{P}\left([0,1)\setminus \bigcap_{r\geq 2} E_r\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{r\geq 2} [0,1)\setminus E_r\right) \\
&\leq \sum_{r=2}^{\infty} \mathbb{P}([0,1)\setminus E_r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Références

[QZ07] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation (3e édition)*. Dunod, 2007.