Densité des fonctions continues nulle part dérivables.

2013 – 2014

Référence : Xavier Gourdon, *Analyse (2e édition)*, Ellipses, 2008, p.401.

On note $I := [0,1]$ et $\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

Théorème.
Le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}$.

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on considère

$$U_{\varepsilon,n} := \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in I, \exists y \in I, 0 < |y-x| < \varepsilon, \quad \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| > n \right\}.$$

Les étapes de la preuve sont les suivantes :

1. $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert de $\mathcal{C}$.
2. $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}$.
3. L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables contient une intersection dénombrable d'ensembles $U_{\varepsilon,n}$, ce qui permettra de conclure par le théorème de Baire.

1. Montrons que le complémentaire $F_{\varepsilon,n}$ de $U_{\varepsilon,n}$ dans $\mathcal{C}$ est fermé. On a
$$F_{\varepsilon,n} = \{ f \in \mathcal{C} \mid \exists x \in E, \forall y \in I, |y-x| < \varepsilon, \quad |f(y)-f(x)| \leq n|y-x| \}.$$
Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $F_{\varepsilon,n}$ convergeant vers $f \in \mathcal{C}$, montrons que $f \in F_{\varepsilon,n}$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_p \in F_{\varepsilon,n}$ donc il existe $x_p \in I$ tel que
$$\forall y \in I, |y-x_p| < \varepsilon, \quad |f_p(y)-f_p(x_p)| \leq n|y-x_p|.$$
La suite (x_p) prend ses valeurs dans le compact I donc quitte à extraire on peut supposer qu'elle converge vers $x \in I$.
Soit $y \in I$ tel que $|y-x| < \varepsilon$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $|y-x_p| < \varepsilon$ pour tout $p \geq P$. Ainsi
$$\forall p \geq P, \qquad |f_p(y)-f_p(x_p)| \leq n|y-x_p|.$$
En faisant tendre p vers l'infini on a alors $|f(y)-f(x)| \leq n|y-x|$. En effet, la suite (f_p) converge uniformément vers f continue donc $f_p(x_p) \longrightarrow f(x)$.
On en déduit que $f \in F_{\varepsilon,n}$.

2. Soit désormais $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$. Pour montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est dense, il s'agit de trouver $g \in U_{\varepsilon,n}$ tel que $\|f-g\|_\infty \leq \delta$. Cherchons g sous la forme $x \mapsto f(x) + \delta \sin(Nx)$. On a bien $\|f-g\|_\infty \leq \delta$.
   Soit $x \in I$. Pour $y \in I$ on a
$$\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| \geq \delta \left|\frac{\sin(Ny)-\sin(Nx)}{y-x}\right| - \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|.$$
   Le but étant de minorer ce terme par n pour un y proche de x. Il est alors nécessaire d'encadrer $|y-x|$.
   Pour tout $N \geq 4\pi$, il existe $y \in I$ tel que
$$2\pi \leq |Nx - Ny| \leq 4\pi \qquad \text{et} \qquad |\sin(Nx) - \sin(Ny)| \geq 1.$$
   On a alors
$$\frac{2\pi}{N} \leq |x-y| \leq \frac{4\pi}{N}.$$
   D'où
$$\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| \geq \frac{\delta N}{4\pi} - |f(y)-f(x)|\frac{N}{2\pi}.$$
   Or f est uniformément continue sur I compact donc :
$$\exists \alpha \in]0, \varepsilon[, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \alpha, \quad |f(x)-f(y)| < \frac{\delta}{4}.$$
   En choisissant N tel que $\frac{4\pi}{N} < \alpha$, on a alors
$$\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| > \frac{\delta N}{8\pi}.$$
   Puis en choisissant N tel que $\frac{\delta N}{8\pi} > n$ on obtient la minoration souhaitée et on a bien $0 < |y-x| < \alpha < \varepsilon$.
3. Posons
$$R := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_{1/n,n}.$$
   Alors, par le théorème de Baire, R est dense dans $\mathcal{C}$ complet comme intersection dénombrable d'ouverts denses.
   Soit $f \in R$, montrons que f est nulle part dérivable.
   Soit $x \in I$. Pour tout $n, f \in U_{1/n,n}$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in I, 0 < |x - x_n| < \frac{1}{n}, \quad \left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| > n.$$
   Donc $x_n \longrightarrow x$ et $\left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right| \longrightarrow +\infty$, donc f n'est pas dérivable en x.
   Finalement, f est nulle part dérivable.

□