Théorème de PALEY-WIENER

PAUL LAUBIE

On note $\hat{\varphi} : \xi \mapsto \int e^{-i\xi t}\varphi(t)dt$ la transmormé de FOURRIER de φ.

Théorème 1. *Pour $r > 0$ et f holomormphe, notons :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |f(x)| \leq C_N(1+|z|)^{-N}e^{r|\Im(z)|} \tag{1}$$

— *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ tel que* $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-r, r]$, *alors il existe f holomorphe vériviant (1) et telle que $\hat{\varphi} = f_{|\mathbb{R}}$.*
— *Réciproquement, pour f holomorphe, si il existe $r > 0$ tel que f vérifie (1), alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ tel que* $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-r, r]$ *et $\hat{\varphi} = f_{|\mathbb{R}}$.*

Démonstration. — Montrons d'abord le sens direct :
Soit $f : z \mapsto \int e^{-izt}\varphi(t)dt$. Cette intégrale est bien défini car φ est a support compact. Notons $g : (z, t) \mapsto e^{-izt}\varphi(t)$ et appliquons le théorème d'holomorphie sous le signe somme :
La fonction $z \mapsto g(z, t)$ est holomorphe.
La fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial z}(g)(z, t)$ est intégrable.
Pour $t \in \mathbb{C}$ tel que $|t| \leq R$ on a $|\frac{\partial}{\partial z}(g)(z, t)| \leq |re^{rR}\varphi(t)|$ car $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-r, r]$.
Par holomorphie sous sous le signe somme : f est holomorphe.
Par définition de f, on a $\hat{\varphi} = f_{|\mathbb{R}}$
Montrons que f vérifie (1) :
Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme φ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on peut calculer $\int e^{-izt}\varphi^{(n)}(t)dt$:

$$\int e^{-izt}\varphi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int (-iz)^n e^{-izt}\varphi(t)dt = (iz)^n f(z)$$

Par intégration par parties.

$$|z^n f(z)| = |\int e^{-izt}\varphi^{(n)}(t)dt|$$

$$|z^n f(z)| \leq \int |e^{-izt}\varphi^{(n)}(t)|dt$$

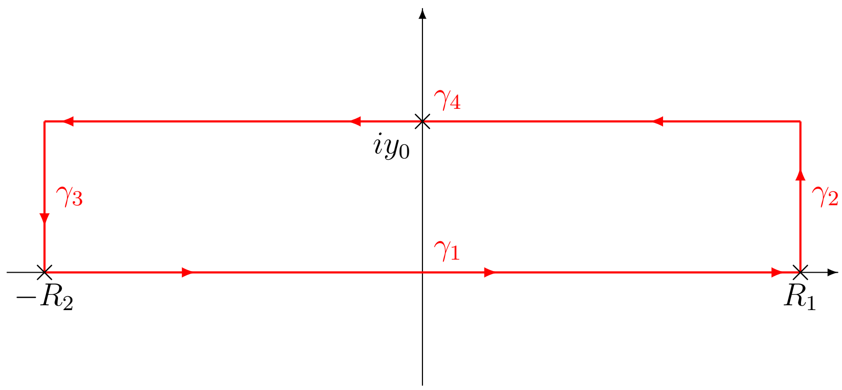
$$|z^n f(z)| \leq e^{r\Im(z)} \int |\varphi^{(n)}(t)|dt$$

Ce qui montre bien que f vérifie (1).

— Montrons la réciproque :
Soit $\varphi : t \mapsto 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x)dx$. Cette intégrale est bien défini car d'après (1), f est L^1.
Notons $g : (x,t) \mapsto e^{ixt} f(x)$ et appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme :
La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial t}^n(g)(x,t)$ est intégrable.

$$|\frac{\partial}{\partial t}^n (g)(x,t)| = |(ix)^n e^{ixt} f(x)| \leq \frac{C_{n+2}}{(1+|x|)^2}$$

En appliquant (1) en $n+2$.
Par le théorème de dérivation sous le signe somme, φ est $\mathcal{C}^\infty$.
D'après le théorème de la transformation de FOURIER inverse, on a $\hat{\varphi} = f_{|\mathbb{R}}$.
Montrons que $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-r, r]$, pour cela calculons $\int_{\mathbb{R}} e^{i(x+iy_0)t} f(x)dx$, avec $y_0 \in \mathbb{R}$.
Soit $R_1, R_2 > 0$ et considérons le contour suivant :



Comme $g_t : z \mapsto e^{izt} f(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a $\int_\gamma g_t(z)dz = 0$. On a donc :

$$\int_{\gamma_1} g_t(z)dz + \int_{\gamma_2} g_t(z)dz + \int_{\gamma_3} g_t(z)dz + \int_{\gamma_4} g_t(z)dz = 0$$

$$\int_{-R}^{R} g_t(x)dx + \int_0^{y_0} g_t(R+iy)dy + \int_R^{-R} g_t(x+iy_0)dx + \int_{y_0}^{0} g_t(-R+iy)dy = 0$$

Calculons $\int_{\gamma_2} g_t(z)dz$ (resp. $\int_{\gamma_4} g_t(z)dz$) quand $R_1 \to +\infty$ (resp. $R_2 \to +\infty$). Soit $R > 0$:

$$|\int_0^{y_0} g_t(\pm R+iy)dy| = |\int_0^{y_0} e^{i(\pm R+iy)t} f(\pm R+iy)dy| \leq \int_0^{y_0} e^{-yt} |f(\pm R+iy)|dy$$

En appliquant (1) avec $N = 1$, on a :

$$|\int_0^{y_0} g_t(\pm R+iy)dy| \leq \int_0^{y_0} e^{-yt} \frac{C_1}{1+|(\pm R+iy)|} e^{r|y|}dy \leq \frac{C}{R}$$

Avec C un constante. Donc $\int_{\gamma_2} g_t(z)dz \underset{R_1 \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $\int_{\gamma_4} g_t(z)dz \underset{R_2 \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(x+iy_0)t} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x)dx$$

Et en particulier, $\int_{\mathbb{R}} e^{i(x+iy_0)t} f(x)dx$ converge.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| > r$, calculons $\varphi(t)$:
Soit y du même signe que t. D'après (1), on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$|e^{it(x+iy)} f(x+iy)| \leq \frac{C_2}{(1+x)^2} e^{r|y|} e^{-ty}$$

Donc :

$$|\varphi(t)| \leq \frac{C_2}{(1+x)^2} e^{(r-|t|)|y|}$$

Donc en faisant tendre $|y| \to +\infty$, on a $\varphi(t) = 0$.

$\square$