Classification des groupes de pavage du plan

2012-2013

Référence : Rémi Goblot, *Thèmes de géométrie*, Masson, 1998, p.311.

On se place dans P un plan affine euclidien et on considère $\vec{P}$ son plan vectoriel euclidien associé.
Un réseau est un sous-groupe additif $\mathcal{R} \subseteq \vec{P}$ ayant les propriétés :
– $\mathcal{R}$ engendre $\vec{P}$ comme espace vectoriel
– Toute partie bornée de $\mathcal{R}$ est finie.

Proposition.
Les réseaux sont les sous-groupes additifs de $\vec{P}$ de la forme $\mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Soit $\mathcal{R}$ un réseau, $\vec{u}$ de norme minimum parmi les vecteurs non nuls de $\mathcal{R}$, $\vec{v}$ de norme minimum parmi les vecteurs non colinéaires à $\vec{u}$. Alors $\mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$.

On note $T(P)$ le groupe des translations de P.
Un sous-groupe G de $\mathrm{Isom}(P)$ est un groupe de pavage si $T := G \cap T(P)$ est formé des $t_{\vec{w}}$ où $\vec{w}$ décrit un réseau $\mathcal{R}$ de $\vec{P}$.

Théorème.
*Soit G un groupe de pavage inclus dans $Isom^+(P)$ (*i.e.* G est composé de déplacements).*
Soit T le sous-groupe des translations de G et $\mathcal{R}$ le réseau associé.
On note $\overline{G}$ le groupe des rotations vectorielles de G.
Alors :
– $\overline{G}$ est cyclique d'ordre $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
– $G = T \rtimes \overline{G}$
Il y a donc 5 groupes de pavage composés de déplacements à isomorphisme près.

Le produit semi-direct est le même que celui de $\mathrm{Isom}(P)$.

Démonstration. Soit $f \in G$. Pour tout $\vec{w} \in \mathcal{R}$, $f t_{\vec{w}} f^{-1} = t_{\vec{f}(\vec{w})} \in G$, donc $\vec{f}(\vec{w}) \in \mathcal{R}$, donc $\mathcal{R}$ est stable par $\vec{f}$.
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathcal{R}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{f}) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est à coefficients entiers.
Or $f \in \mathrm{Isom}^+(P)$ donc f est une rotation d'angle θ et on a :
$\mathrm{Tr}(f) = a + d = 2\cos\theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, d'où :

$$\theta \in \left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0\right\}$$

Le groupe $\overline{G}$ est donc un groupe de rotations vectorielles fini, donc cyclique (car isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$) d'ordre appartenant à $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Décrivons maintenant G en fonction de l'ordre n de $\overline{G}$. Pour cela, on définit :

$$\mathcal{E} := \left\{M \in P \ / \ r_M := \mathrm{rot}\left(M, \frac{2\pi}{n}\right) \in G\right\}$$

et on va étudier l'action naturelle de T sur $\mathcal{E}$.
On pose aussi $\overline{G} =< r >$ où r est la rotation vectorielle $r := \mathrm{rot}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
Si $n = 1$, alors $G = T$. On suppose dorénavant $n > 1$.
Montrons que $\mathcal{E}$ est un réseau affine dont le réseau vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$ est image de $\mathcal{R}$ par l'application linéaire $(\vec{\mathrm{id}} - r)^{-1}$.
Soit $\Omega \in \mathcal{E}$. Alors

$$M \in \mathcal{E} \iff r_M \in G \iff t_{\vec{w}} := r_M r_\Omega^{-1} \in T$$

Cherchons le lien entre $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\vec{w}$.
On a

$$t_{\vec{w}}\, r_\Omega = r_M = t_{\overrightarrow{\Omega M}}\, r_\Omega\, t_{\overrightarrow{M\Omega}}$$

L'expression de gauche donne $r_M(\Omega) = \Omega + \vec{w}$.
Soit $N = t_{\overrightarrow{M\Omega}}(\Omega)$ le symétrique de M par rapport à Ω,
i.e.

$$r_M(\Omega) = r_\Omega(N) + \overrightarrow{\Omega M}$$

Alors

$$r_\Omega(N) + \overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \vec{w} = r_\Omega(\Omega) + \vec{w}$$

D'où

$$\vec{w} = r(\overrightarrow{\Omega N}) + \overrightarrow{\Omega M} = (\vec{\mathrm{id}} - r)(\overrightarrow{\Omega M})$$

On en déduit

$$M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{\Omega M} = (\vec{\mathrm{id}} - r)^{-1}(\vec{w})$$

pour un certain $\vec{w} \in \mathcal{R}$.

- Supposons $n = 2$, alors $r = -\vec{\mathrm{id}}$.
  $\vec{\mathcal{E}}$ est donc l'image de $\mathcal{R}$ par l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{2}$.
  Il y a ici 4 orbites pour l'action de T : si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{R}$, les 4 orbites sont $\Omega + \mathcal{R}$, $\Omega + \frac{1}{2}\vec{u} + \mathcal{R}$, $\Omega + \frac{1}{2}\vec{v} + \mathcal{R}$ et $\Omega + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \mathcal{R}$, où $\Omega \in \mathcal{R}$.

– Supposons $n \in \{3,4,6\}$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{R}$ de norme minimum et $\vec{v} = r(\vec{u})$. Alors $\vec{v} \in \mathcal{R}$ et $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$ donc $\vec{v}$ est aussi de norme minimum non colinéaire à $\vec{u}$, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{R}$ par la proposition.
On pose $\zeta := \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$, on a $\zeta \in \{i, j, -j^2\}$.
Prenons la bijection définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow P \\ a + b\zeta &\longmapsto \Omega + a\vec{u} + b\vec{v} \end{aligned}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors le réseau affine $\Omega + \mathcal{R}$ est formé des points dont l'affixe est dans l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta]$.
Le réseau $\mathcal{E}$ est formé des points dont l'affixe est $\dfrac{z}{1-\zeta}$ où $z \in \mathbb{Z}[\zeta]$ car $(\vec{\mathrm{id}} - r)^{-1}$ est identifié à $z \mapsto \dfrac{z}{1-\zeta}$ ici.
On veut maintenant compter le nombre d'orbites pour l'action de T.
Si $n = 6$,

$$\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{1+j^2} = \frac{1}{-j} = -j^2 \in \mathbb{Z}[-j^2]$$

donc $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{R}$ et il n'y a qu'une orbite.
Si $n = 4$,

$$\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} \notin \mathbb{Z}[i]$$

donc il y a 2 orbites $(2.\frac{1+i}{2} \in \mathbb{Z}[i])$.
Si $n = 3$,

$$\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{1-j} = \frac{1-j^2}{3} \notin \mathbb{Z}[j]$$

donc il y a 3 orbites.

$\square$

Détails supplémentaires

– La deuxième partie de la preuve peut sembler un peu obscure et on comprend mieux ce qu'on fait si on a la représentation graphique en tête. Cette représentation consiste à considérer pour chaque valeur de n un pavage du plan qui est préservé par G. Le dénombrement des orbites de l'action de T sur les centres de rotations de G revient alors à compter le nombre de ces centres de rotations dans chaque parallélogramme porté par les vecteurs de base du réseau associé au pavage (ce parallélogramme est appelé domaine fondamental du réseau).

– *Démonstration de la proposition.*

- Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\vec{P}$ et $\mathcal{R} := \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$.
  Alors $\mathcal{R}$ engendre bien $\vec{P}$.
  Les normes étant équivalentes, on choisit la norme infinie :
$$\|x\vec{u} + y\vec{v}\| = \max(|x|, |y|)$$
  Alors toute partie bornée pour cette norme est finie, donc $\mathcal{R}$ est un réseau.

- Soit $\mathcal{R}$ un réseau et $r > 0$ tel que $\{\vec{w} \in \mathcal{R} \setminus \{\vec{0}\} \ / \ \|\vec{w}\| \leq r\} \neq \emptyset$.
  Cet ensemble étant fini, il existe $\vec{u}$ dans cet ensemble de norme minimum.
  De même, il existe $\vec{v} \in \mathcal{R}$ de norme minimum parmi les vecteurs non colinéaires à $\vec{u}$.
  Montrons que $\mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$.
  Soit $\vec{w} \in \mathcal{R}$, $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que
$$|x - p| \leq \frac{1}{2}, |y - q| \leq \frac{1}{2}$$
  Posons
$$\lambda := x - p, \mu := y - q, \vec{W} := \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathcal{R}$$
  On a
$$\|\vec{W}\| \leq |\lambda|\|\vec{u}\| + |\mu|\|\vec{v}\|$$
  avec égalité si et seulement si $\lambda\vec{u}$ et $\mu\vec{v}$ sont colinéaires, donc si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$.
  Donc pour λ, μ non nuls, on a
$$\|\vec{W}\| < |\lambda|\|\vec{u}\| + |\mu|\|\vec{v}\| \leq \frac{1}{2}(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|) \leq \|\vec{v}\|$$
  Sous ces conditions, $\vec{W}$ doit donc être colinéaire à $\vec{u}$, ce qui contredit $\mu \neq 0$.
  Donc $\mu = 0$ et $\|\vec{W}\| \leq \frac{1}{2}\|\vec{u}\| < \|\vec{u}\|$, d'où $\lambda = 0$, ce qui conclut la preuve.
  $\square$