124 (ex 114)

# Anneau des séries formelles. Applications.

$\mathbb{K}$ designera un corps commutatif de caractéristique nulle.

## I Définition et propriétés de l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$

### 1) Définition et valuation [SP] p 110-114 [AF] p 343-345

Déf 1 : On note $\mathbb{K}[[X]]$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (i.e. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) muni de
l'addition $(x_n)_{n\geq 0} + (y_n)_{n\geq 0} = (x_n+y_n)_{n\geq 0}$
du produit de Cauchy $(x_n)_{n\geq 0} \cdot (y_n)_{n\geq 0} = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k b_{n-k}\right)_{n\geq 0}$

Prop 2 $\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau commutatif.

Prop 3 Un élément de $\mathbb{K}[[X]]$ est inversible ssi le premier terme de la suite est non nul.

Rem 4 On a donc plus d'inversibles que dans $\mathbb{K}[X]$.

Ex 5 : $(1,-1,0,0,0,\dots)^{-1} = (1,1,1,1,\dots)$

Déf 6 [valuation]
Pour $S \in \mathbb{K}[[X]]$, on appelle valuation de $S$, notée $val(S)$, l'indice du premier terme non nul de la suite $S$. (Par convention $val(0) = +\infty$)

Rem 7 $S$ est inversible $\Leftrightarrow val(S) = 0$.

Prop 8
- $val(A+B) \geq \min(val(A), val(B))$
- $val(A\cdot B) = val(A) + val(B)$

Cor 9 : $\mathbb{K}[[X]]$ est intègre

Prop 10 : $(\mathbb{K}[[X]], val)$ est un anneau euclidien.

Prop 11 : On pose $X := (0,1,0,0,\dots)$ alors
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $X^n = (0,0,\dots,0,\underset{n^{\text{ième}} \text{ position}}{1},0,\dots) = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$
- Si $val(S) = n$, $\exists S_1 \in \mathbb{K}[[X]]$, $val(S_1) = 0$ tq $S = X^n S_1$

Prop 12 : Les idéaux de $\mathbb{K}[[X]]$ sont les $\langle X^p \rangle = \{X^p S, S \in \mathbb{K}[[X]]\}, p \in \mathbb{N}$
$\mathbb{K}[[X]]$ est donc principal.

### 2) Familles sommables et injection de $\mathbb{K}(X)_0$.

Déf 13 [sommable] Soit $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille de séries formelles. $S_\lambda = (a_{\lambda,m})_{m\in\mathbb{N}}$.
$(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ est sommable si $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a_{\lambda,m})_{\lambda\in L}$ est à support fini. [AF] p345
On pose alors $c_m = \sum_{\lambda\in L} a_{\lambda,m} \in \mathbb{K}$ et $C = (c_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
$C$ est appelée la somme de $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$, notée $C = \sum_{\lambda\in L} S_\lambda$.

Rem 14 : Si $L$ est fini, $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ est sommable.

Exemple fondamental 15 Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]]$,
la famille $(a_n X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et sa somme est $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$.

Ex 16 : Pour $(S_k)_{k\geq 0}$ si $\forall k \in \mathbb{N}$ $val(S_k) \geq k$ alors $(S_k)_{k\geq 0}$ est sommable.

Prop 17 : Si $(S_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable alors
$\forall k \in \mathbb{N}$ $(S_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ sommable, $T_k := \sum_{n\in\mathbb{N}} S_{n,k}$, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sommable
$\forall n \in \mathbb{N}$ $(S_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sommable, $R_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} S_{n,k}$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable
Et $\sum_{k\geq 0} T_k = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} S_{n,k} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} S_{n,k} = \sum_{n\geq 0} R_n$.

Prop 18 : Soit $\mathbb{K}(X)_0$ le sous anneau de $\mathbb{K}(X)$, constitué des fractions rationnelles dont $0$ n'est pas un pôle. [AF] p 351 [SP] p 112
Alors $\mathcal{J} : \mathbb{K}(X)_0 \longrightarrow \mathbb{K}[[X]]$, $\frac{P}{Q} \longmapsto PQ^{-1}$ est un morphisme d'anneau injectif.

On note $\mathbb{K}((X))$ le corps des fractions de $\mathbb{K}[[X]]$.

Prop 19 : $\mathbb{K}((X)) = \left\{ \sum_{n\geq -p} a_n X^n, p \in \mathbb{N}, a_p, a_{p+1}, \dots, a_0, a_1, \dots \in \mathbb{K} \right\}$ [SP] p 124

[AF] 346-348

### 3) La composition

**Déf 20** : Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$ tq $val(S) \geq 1$ et $T = \sum_{n \geq 0} b_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$ d'après l'exemple 16, $(b_n S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. La somme $\sum_{n \geq 0} b_n S^n$ est appelée la composée de $T$ par $S$ notée $T \circ S$.

**Prop 21** $val(T \circ S) \geq val(T) \times val(S)$ (avec $val(S) \geq 1$)

**Prop 22** : $S, T, U \in \mathbb{K}[[X]]$, $val(S) \geq 1$, $val(T) \geq 1$. Alors

(i) $\varphi : \mathbb{K}[[X]] \longrightarrow \mathbb{K}[[X]]$, $V \longmapsto V \circ S$ est un morphisme d'anneau.

(ii) (Associativité) $U \circ (T \circ S) = (U \circ T) \circ S$.

**Ex 23** : $(1-S)^{-1} = \sum_{n \geq 0} S^n$ (avec $val(S) \geq 1$)

## II Les séries génératrices et les suites récurrentes linéaires.

### 1) Premières applications des séries génératrices.

[SP] p116

**Déf 24** : Soit $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a vu dans l'exemple 15 que $(s_n X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Sa somme, notée $G(S) = \sum_{n \geq 0} s_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$ est appelée série génératrice de $S$.

**Ex 25** : a) $S = (1, 1, 1, \dots)$ $G(S) = \sum_{n \geq 0} X^n = \frac{1}{1-X}$

b) $S = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ $G(S) = \frac{1}{1-X^2}$

c) $S = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ $G(S) = \frac{1}{(1-X)^2}$

d) $S = \left(1, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \dots, \binom{k+n}{k}, \dots\right)$ $G(S) = \frac{1}{(1-X)^{k+1}}$

**Appli 26** : Soit $u_{n,k+1}$ le nombre de façons d'écrire l'entier $n$ comme somme de $k+1$ entiers.
$\frac{1}{(1-X)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} u_{n,k+1} X^n$ donc $u_{n,k+1} = \binom{k+n}{k}$.

[DVP]

**Appli 27** : [Partitions d'un entier en parts fixées]
$a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers dans leur ensemble.
$u_0 = 0$ et pour $n \geq 1$ $u_n = \mathrm{Card}\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k, \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n\}$
On a alors $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

[AF] p354

**Appli 28** Soit $u_n$ le nombre de couples $p, q$ tq $3p + 2q = n$
$F = \sum_{n \geq 0} u_n X^n = \frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)}$, on en déduit la valeur de $u_n$
$u_n = \frac{1+(-1)^n}{4} + \frac{n+1}{6} + \frac{2}{9}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{3}\right)\right)$.

### 2) Les suites récurrentes linéaires

[SP] p117-119

**Déf 29** : Une suite $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]]$ est récurrente linéaire d'ordre $k$ à partir du rang $k_0 \geq k$, ssi il existe $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}^k$ tel que $\forall n \geq k_0$ $s_n = a_1 s_{n-1} + \dots + a_k s_{n-k}$.
On définit alors le polynôme réciproque $P^* = -a_k X^k - a_{k-1} X^{k-1} - \dots - a_1 X + 1$

**Prop 30** : $G(S) \in \mathfrak{Im}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow S$ est réc. linéaire.

**Appli 31** $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}$ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Soit $F$ sa série génératrice
$F = \frac{X}{1-X-X^2}$. On en déduit sa forme close :
$F_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

[SP] p132

**Appli 32** : Par la même méthode, pour les suites
$r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_{n+2} = 3r_{n+1} + 4r_n$ $\forall n \geq 0$ et
$s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_{n+3} = 5s_{n+2} - 8s_{n+1} + 4s_n$,
on obtient $R = \frac{X}{(1+X)(1-4X)}$ et $S = \frac{X - 3X^2}{(1-X)(1-2X)^2}$.
On en déduit $r_n = \frac{(-1)^{n+1} + 4^n}{5}$ et $s_n = -\left(2 + (n-4)2^{n-1}\right)$.

[AF] p 352

**Appli 33** On définit les polynômes de Tchebychev (2e espèce) par $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$, $\forall n \geq 0$ $U_{n+2} = 2X U_{n+1} - U_n$.
Alors $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$
Par deux méthodes de calcul de $F = \frac{1}{1 - 2X\cos\theta + X^2}$
On trouve $U_n(X) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \leq n}} \binom{n-k}{n} (-1)^k 2^{n-2k} X^{n-2k}$.

[SP] p 133

**Appli 34** : [Nbres de Stirling] $S_n^k$ = le nombre de partitions en $k$ ss ensembles (non vides) de $\{1, 2, \dots, n\}$.
($S_n^k = 0$ si $k > n$). (i) $S_n^2 = 2^{n-1} - 1$
(ii) $S_n^k = k S_{n-1}^k + S_{n-1}^{k-1}$
(iii) $\sum_{n \geq 0} S_n^m X^n = \frac{X^m}{(1-X)(1-2X)\dots(1-mX)}$.

# III Dérivations et équations différentielles.

## 1) La dérivation

[SP] p114-115

**Déf 35** : On définit la dérivation par $D : \mathbb{K}[[X]] \longrightarrow \mathbb{K}[[X]]$
$D\left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n\right) = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n$.

**Prop 36** : (i) $D$ est linéaire, surjective, de noyau $\mathbb{K}$
(ii) $(PQ)' = P' Q + P Q'$
(iii) $(P^{-1})' = -P' P^{-2}$ (iv) $(P Q^{-1})' = (P'Q - PQ')Q^{-2}$
(v) $(T \circ S)' = (T' \circ S) \cdot S'$ (avec val$(S) \geq 1$)

**Prop 37** Si $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, $P^{(k)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} X^n$
$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

**Déf 38** : $\exp(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!}$, $\mathrm{Log}(1+X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} X^n}{n}$

**Prop 39** : $\forall a \in \mathbb{K}$ $\exp(aX)$ est l'unique solution de l'équation différentielle $E' = aE$ et $E(0) = 1$.

**Cor 40** : $\exp(aX)\exp(bX) = \exp((a+b)X)$, $a, b \in \mathbb{K}$

[AF] p 356

**Prop 41** (i) $\exp(\mathrm{Log}(1+X)) = 1+X$ (ii) $\mathrm{Log}(1 + \exp(X) - 1) = X$
(iii) $\mathrm{Log}[(1+aX)(1+bX)] = \mathrm{Log}(1+aX) + \mathrm{Log}(1+bX)$.

[SP] p116

**Prop 42** $S = \sum_{n \geq 0} s_n X^n$ alors $(XD)^k(S) = \sum_{n \geq 0} n^k s_n X^n$

[SP] p117

**Cor 43** : $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3 + 2n - 1}{n!} = 6e + 1$.

[AF] p 357-358

**Appli 44** : $D_n$ = le nbre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (= permutations sans point fixe) $D_0 = 1$ et $D_1 = 0$.
a) $D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \dots + \binom{n}{n} D_0 = n!$ Si $S = \sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} X^n$
b) $S \exp(X) = \frac{1}{1-X}$.
c) On en déduit $D_n = n! \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}$

## 2) Les suites P-récurrentes et les séries Δ-finies.

[SP] p121-123

**Déf 45** : Une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite P-récurrente ssi $\exists k \in \mathbb{N}$, $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \geq n_0$
$P_k(n) s_{n+k} + P_{k-1}(n) s_{n+k-1} + \dots + P_0(n) s_n = 0$.

**Déf 46** : $S \in \mathbb{K}[[X]]$ est dite différentiellement finie, ou Δ-finie, ssi $\exists k \in \mathbb{N}$, $Q_0, \dots, Q_k \in \mathbb{K}[X]$, $Q_k S^{(k)} + \dots + Q_0 S = 0$.
ssi $\exists k \in \mathbb{N}$, $Q, Q_0, \dots, Q_k \in \mathbb{K}[X]$, $Q_k S^{(k)} + \dots + Q_0 S = Q$.

**Th 47** : $S \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est P-récurrente $\iff G(S)$ est Δ-finie.

[SP] p128-129

**Appli 48** [Nbres de Catalan]
$\gamma_n$ = nbre de parenthésage de $x_0 x_1 \dots x_n$. $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$
Ex $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = 5$. $\forall n > 0$ $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \gamma_{n-1-i}$.
On pose $C = \sum_{n \geq 0} \gamma_n X^n$ alors $XC^2 - C + 1 = 0$.
donc $C' = \frac{-C^2}{2XC - 1}$. Donc $X(4X-1)C' + (2X-1)C + 1 = 0$
D'où $\gamma_{i+1} = \frac{4i+2}{i+2} \gamma_i$ et enfin $\forall n \geq 0$ $\gamma_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

[DVP]

**Appli 49** : [Nbres de Bell] $B_n$ = nbre de partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$
a) $\forall n \geq 0$ $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$. On pose $B = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$ ($B_0 = 1$) alors
b) $B' = \mathrm{Exp} \cdot B$ donc $B = E_1 \circ (E_1 - 1)$
c) Finalement $B_i = \sum_{k \geq 0} k^i / k! \times e^{-1}$.

## IV Interprétation topologique

Déf 50 : On définit l'opérateur

$$d : \mathbb{K}[[X]] \times \mathbb{K}[[X]] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(S, T) \longmapsto e^{-val(S-T)}$$

avec la convention $S-T=0 \Leftrightarrow val(S-T)=+\infty$

Prop 51 :
1) $d(S,T) \geq 0$
2) $d(S,T)=0 \Leftrightarrow S=T$
3) $d(S,T) = d(T,S)$
4) $d(S,T) \leq \quad (d(S,R), d(R,T))$

$\Rightarrow$ d est une distance ultramétrique.

Prop 52 $(\mathbb{K}[[X]], d)$ est un espace métrique complet.

Rem 53 : $(\mathbb{K}[X], d)$ n'est pas complet
en effet $S_p = \sum_{m=0}^{p} X^m \in \mathbb{K}[X]$ est de Cauchy
mais ne converge pas dans $\mathbb{K}[X]$ pour d.

Prop 54 : $\mathbb{K}[X]$ est dense dans $\mathbb{K}[[X]]$ pour d
$\mathbb{K}[[X]]$ est donc le complété de $\mathbb{K}[X]$.

Prop 55 : Soit $S_\lambda = \sum_{m \geq 0} a_{\lambda,m} X^m, \ \forall \lambda \in \mathbb{N}$
$\sum_\lambda S_\lambda$ converge pour $d \Leftrightarrow (S_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ est sommable au sens de la déf 13.

Et on retrouve à nouveau

$$\left(\lim_{p \to +\infty} \sum_{\lambda=0}^{p} S_\lambda =: \right) \sum_{\lambda \in \mathbb{N}} S_\lambda = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{N}} a_{\lambda,m}\right) X^m$$


[SP] : Philippe Saux Picart
« Cours de calcul formel. Algorithmes fondamentaux »
ellipses

[AF] . J.M. Arnaudiès et H. Fraysse
« cours de mathématiques - 1 . Algèbre »
Dunod


Autres développements possibles :
- Les nombres de Catalan
- Théorème de Molien