127

Exponentielle de matrices. Applications.

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre

I Premières propriétés et calcul

1) Définition et premières propriétés

Prop 1 : La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est complet.

Déf 2 : La somme de cette série, notée $\exp(A)$, est appelée exponentielle de la matrice A.

Prop 3 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

Prop 4 : Si $A = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ alors $\exp(A) = \mathrm{diag}(\exp(d_1), \dots, \exp(d_n))$

Prop 5 : Si N est nilpotente d'ordre p alors,
$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Prop 6 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\exp(A) = P(A)$.

Prop 7 : Si A et B commutent, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et $A, B, \exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent toutes 2 à 2.

Contre-ex 8 : $\theta \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, $\exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $\exp(A+B) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\neq \exp(A)\exp(B)$.

Cor 9 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

Prop 10 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ $\quad \exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$!

Prop 11 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

2) Décomposition de Dunford et application au calcul

Th 12 [Décomposition de Dunford]
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique χ_f de f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
(i) $f = d + n$ (ii) $d \circ n = n \circ d$
(iii) d diagonalisable (iv) n nilpotent
de plus d et n sont des polynômes en f.

Rem 13 : La décomposition est toujours possible dans $\mathbb{C}$.

Cor 14 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_A scindé $\Rightarrow \chi_{\exp(A)}$ scindé et si $A = D + N$ sa décomposition de Dunford, celle de $\exp(A)$ est $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D) N_1$, avec $N_1 = \exp(N) - I$ nilpotente.

Cor 15 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_A scindé :
A diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(A)$ diagonalisable.

Calcul de l'exponentielle

- Si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$

- Si P et D sont connus $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{d_1} & (0) \\ (0) & e^{d_n} \end{pmatrix}P^{-1}$

- Si on connait juste les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit Π un polynôme interpolateur de Lagrange tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \Pi(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$$

Alors $\exp(A) = \Pi(A)$.

- Si A est quelconque, $A = D + N$ sa décomposition de Dunford.

- Si D et N sont connus, $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ car D et N commutent. $\exp(D)$ se calcul comme avant et N étant nilpotente, on applique la prop 5.

- Sinon, à partir d'un polynôme annulateur de A $F = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. On décompose $\frac{1}{F}$ en éléments simples, $\frac{1}{F} = \sum_{j=1}^{r} \frac{a(X)}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$

alors $1 = \sum_{i=1}^{r} U_i Q_i$, $Q_i = \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)^{\alpha_j}$.

On a alors $p_i = (U_i Q_i)(f)$, f endomorphisme canoniquement associé à A.

$d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ et $n = \sum_{i=1}^{r} (f - \lambda_i Id) p_i$

enfin $\exp(f) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \left(\sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!} \right) p_i$.

Ex 16 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$

alors, $p_1 = -(A-I)(A-3I)$, $p_2 = (A-2I)^2$

$$\exp(A) = e^2 (A-I) p_1 + e^3 p_2$$

II Propriétés de la fonction exponentielle

1) Le logarithme

Déf 17 : Soit $A \in B(I, 1)$. On appelle logarithme de A noté $\mathrm{Log}(A)$, la série normalement convergente : $\mathrm{Log}(A) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (A-I)^k$

Rem 18 : On peut aussi le définir sur $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices unipotentes (i.e. $\{I+N, N \text{ nilpotente}\}$) car la somme est alors finie.

Th 19 : $\forall A \in B(I, 1) \quad \exp(\mathrm{Log}(A)) = A$
$\forall A \in B(0, \ln(2)) \quad \mathrm{Log}(\exp A) = A$.

2) Régularité

Prop 20 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) et sa différentielle en 0 est l'identité.

Th 21 : Il existe U voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, V un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$ tels que $\exp : U \to V$ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Cor 22 : Le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ n'a pas de sous groupe arbitrairement petit (Il en est donc de même pour tout sous groupe de $GL_n(\mathbb{K})$)

3) Surjectivité, injectivité, homéomorphisme

Notation : On note $\mathcal{N}$ (resp $\mathcal{N}_p$) les matrices nilpotente (resp. d'ordre p) et $\mathcal{U}$ (resp $\mathcal{U}_p$) les matrices unipotente (resp. d'ordre p).

Th 23 : $\exp : \mathcal{N}_p \to \mathcal{U}_p$ est un homéomorphisme (bijection bicontinue)
$\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$ également.

Th 24 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Appli 25 :
- $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists B \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = B^p$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$
- $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Rem 26 Par un argument de connexité le Th 24 est faux sur $\mathbb{R}$

Th 27 : $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $A = \exp(P(A))$

Th 28 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \{M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists N \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $M = N^2\}$ est surjective.

Th 29 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Rem 30 : L'exponentielle n'est pas injective :
- sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\exp(A) = I_n \iff \begin{cases} A \text{ diagonalisable} \\ Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z} \end{cases}$
- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}\right] = I_n$

Th 31 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme
$\exp : H_n(\mathbb{C}) \longrightarrow H_n^{++}(\mathbb{C})$ homéomorphisme

Appli 32 : Par la décomposition polaire on a les homéomorphismes suivants :
$GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$
$GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

III Applications aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Prop 33 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}$

Csq 34 : Si $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exp(tA) = \exp(tB)$ alors $A = B$

Rem 35 : $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas $\frac{d}{dt}(\exp(X(t))) = X'(t)\exp(X(t))$

Th 36 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le système différentiel $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ possède une unique solution :
$$X(t) = \exp((t-t_0)A)X_0.$$

Appli 37 [Sous groupe à 1 paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$]
Les morphismes continues de $(\mathbb{R},+) \longrightarrow (GL_n(\mathbb{C}),\times)$ sont de la forme $t \longmapsto \exp(tA)$, $A \in GL_n(\mathbb{C})$

Déf 38 : Soit $Y(t,z)$ la solution au temps du système du th 36 de condition initiale z, $Y(t_0,z) = z$.
- $Y(t,z_0)$ est stable ssi $\exists r>0, c>0$ tq $\forall z \in \overline{B(z_0,r)}, \forall t \geq t_0$
$\|Y(t,z) - Y(t,z_0)\| \leq c\|z - z_0\|$
- $Y(t,z_0)$ asymptotiquement stable ssi $\exists r>0$, $\gamma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$
$\|Y(t,z) - Y(t_0,z_0)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|$, $\gamma(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Th 39 : $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A.
- Les solutions sont asymptotiquement stables ssi $Re(\lambda_i) < 0$ $\forall i$
- Les sol. sont stables ssi $\forall i$ $Re(\lambda_i) < 0$ ou $Re(\lambda_i) = 0$ et $\dim(E_{\lambda_i}) = mult(\lambda_i)$

IV Algèbres de Lie [MT] p64-69

(pour les plus audacieux)

<u>Déf 40</u> : Soit G un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$. On appelle algèbre de Lie de G l'ensemble
$\mathfrak{g} := \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \exp(tX) \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$

<u>Lem 41</u> : $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

- $\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty} \left[\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right]^n$
- $\exp(XY-YX) = \lim_{n\to\infty} \left[\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\exp\left(\frac{-X}{n}\right)\exp\left(\frac{-Y}{n}\right)\right]^{n^2}$

<u>Prop 42</u> : $\mathfrak{g}$ est un sous ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par l'application $(X,Y) \longmapsto XY-YX$.

<u>Rem 43</u> G est discret $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \{0\}$

<u>Th 44</u> [Cartan - Von Neumann]

- $\exists V$ vois. de 0 dans $\mathfrak{g}$ et W vois. de I_n dans G tels que $\exp : V \to W$ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme
- Tout sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $GL_n(\mathbb{R})$.

<u>Rem 45</u> :
- La dimension de la sous variété vaut $\dim \mathfrak{g}$
- Si G est connexe, $\exp(\mathfrak{g})$ engendre G
- L'espace tangent à G en I_n est $\mathfrak{g}$.

<u>Appli 46</u> :
- $SO_n(\mathbb{R})$ sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ et $T_{SO_n(\mathbb{R})}(I_n) = \{$ Matrices antisymétriques $\}$
- $SL_n(\mathbb{K})$ sous variété de $\mathbb{K}^{n^2}$ et $T_{SL_n(\mathbb{K})}(I_n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ Tr(M) = 0\}$