202 - Exemples de parties denses et applications

DVT 1

Intro : (E,d) espace métrique, A partie de E

[Gou p10] • Déf 1 : - L'adhérence de A, notée $\overline{A}$ est le plus petit ensemble fermé contenant A.
- A est dite dense dans E si $\overline{A}=E$.

[Gou p19] • Prop 2 (Caractérisation séquentielle) : A est dense dans E ssi $\forall x\in E, \exists x_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

I - Exemples de parties denses dans des espaces de dimension finie :

1) Exemples sur $\mathbb{R}$:

[Gou p10] • Prop 3 : A dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall a,b\in\mathbb{R}^2, a<b$, $]a,b[\cap A \neq \emptyset$.

• Expl 4 : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

• Applic 5 : Le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité.

[Gou p197] • Prop 6 : Tout sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a>0$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

• Applic 7 : * $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$.
* $\{e^{2i\pi n\theta}, n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$ ssi $\theta\notin\mathbb{Q}$.
En particulier, $\{\sin(n), n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

[X-ENS 2 p48] • Déf 8 : $(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est équirépartie si $\forall a,b$ tq $0\leq a\leq b\leq 1$, $\frac{X_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$ où $X_n(a,b)=\mathrm{Card}\{k\in[\![1,n]\!], u_k\in[a,b]\}$.

• Thm 9 (Critère de Weyl) : Il y a équivalence entre
(i) $(u_n)_n$ est équirépartie.
(ii) $\forall f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$
(iii) $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

• Expl 10 : Si $\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $(n\theta-\lfloor n\theta\rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie.

2) Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[Gou p185] • Prop 11 : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

• Applic 12 : - $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB}=\chi_{BA}$
- la différentielle du déterminant est : $D(\det)(X) : H\longmapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(X).H)$. [Rou p]

• Prop 13 : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$
En particulier, si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(=\mathcal{T}_n(\mathbb{C}))$. [OA p179]

• Applic 14 : L'application $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\longmapsto D_M$ la décomposition de Dunford de M, n'est pas continue.

II - Exemples de parties denses dans des espaces de dimension quelconques :

• Déf 15 : E est dit séparable s'il existe une partie ~~D~~ de E dénombrable dense. [H-L p7]

1) Stone Weierstrass et applications : Ici, E est compact.

• Déf 16 : $H\subset\mathcal{C}(E,\mathbb{K})$ est séparante si $\forall(x,y)\in E^2$ $x\neq y \Rightarrow \exists h\in H$ tq $h(x)\neq h(y)$

• Thm 17 : - cas réel : Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. [H-L p28]
- cas complexe : Si de plus on a : $h\in H \Rightarrow \overline{h}\in H$, alors H est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$.

• Contre-expl 18 : $H=\{z\mapsto P(z), P\in\mathbb{C}[X]\}$ est une sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(\mathbb{U},\mathbb{C})$ et contient les constantes, mais H non dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{U},\mathbb{C})$.
En effet $\overline{z} : z\mapsto\overline{z}$ $\mathcal{C}(\mathbb{U},\mathbb{C})\setminus\overline{H}$.

• Applic 19 (Thm de Weierstrass) : Toute fonction de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes

- Applic 20 : • $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est séparable.
- Thm 21 : Les polynômes trigonométriques sont dense dans $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continues, 2π-périodiques$\}$
- [Gou p286] Applic 22 : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, alors $f = 0$.

2) Densité dans les L^p :

- [Rud p84 ou BriPé] Thm 23 : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
- [OA p119 ou BriPé p68] Déf 24 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive tq $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : x \mapsto n\varphi(nx)$, $(\varphi_n)_n$ est une identité approchée
- Thm 25 : $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi_n$ CV vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.
- Thm 26 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
- [Rud p132] Applic 27 (lemme de Riemann-Lebesgue) : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-int}\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- Applic 28 : $L^p \cap L^q$ est dense dans L^q. En particulier $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2.
- [BriPé p62] Applic 29 : $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable $\forall 1 \leq p < +\infty$.

3) Prolongement de fonctions :

- [Gou p24] Thm 30 : $(E,d), (F,d')$: espaces métriques. $A \subset E$ une partie dense. $f : A \to F$ uniformément continue. On suppose F complet. Alors $\exists!\, g : E \to F$ tq $g_{|A} = f$ et g est uniformément continue.
- Applic 31 : (E,d) espace métrique. Il existe un espace $(\hat{E},\hat{d})$ complet et $i : E \to \hat{E}$ une isométrie injective tq $i(E)$ est dense dans $\hat{E}$. $(\hat{E},\hat{d})$ est appelé complété de (E,d). De plus le complété est unique au sens suivant : si (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont deux complétés de (E,d) avec les injections isométriques $i_1 : E \to E_1$ et $i_2 : E \to E_2$, alors il existe une unique isométrie $\varphi : E_1 \to E_2$ bijective telle que $\varphi \circ i_1 = i_2$.
- [Rud p225] Applic 32 (Fourier-Plancherel) : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \begin{cases} L^1 \cap L^2 \to L^2 \\ f \mapsto \hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$ se prolonge en une isométrie $\overline{\mathcal{F}}$ qui est alors un isomorphisme de L^2.

III - Bases Hilbertiennes :

1) Espaces de Hilbert : $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ espace de Hilbert

- [OA p100] Prop 33 : Soit F un sev de H, alors $H = \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp = \overline{F} \oplus F^\perp$ et ainsi : F dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$.
- [OA p107] Déf 34 : Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est orthonormée et totale (ie $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i, i \in I)}$)
- Thm 35 : H espace de Hilbert séparable et $(e_n)_n$ une famille orthonormée de H. Sont équivalents :
  - (i) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.
  - (ii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.
  - (iii) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$
  - (iv) On a $(e_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$. De plus l'application $\Delta : \begin{cases} H \to \ell^2(\mathbb{N}) \\ x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ est bien définie et réalise une isométrie surjective de H sur $\ell^2(\mathbb{N})$.
- Expl 36 : $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to$ série de Fourier.

2) Polynômes orthogonaux :

- [OA p110] Déf 37 : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. On appelle poids toute fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, >0 et tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$. On note $L^2(I,\rho)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable pour la

DVT 2

mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$.
En orthonormalisant la famille $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$, on obtient une famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux tq $\deg(P_n)=n$.

• <u>Thm 38</u> : $I\subset\mathbb{R}$ intervalle. ρ fonction poids. s'il existe $\alpha>0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx<+\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

• <u>Expl 39</u> : • $I=\mathbb{R}$ et $\rho(x)=e^{-x^2}$, $P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$
(P_n) : polynômes de Hermite, forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},\rho)$.
• $I=[-1,1]$, $\rho(x)=1$, $P_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$
(P_n) : polynômes de Legendre, forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

IV - Théorème de Baire et application :

1) Théorème :

[Gou p 397]

• <u>Thm 40 (de Baire)</u> : Si E est un espace métrique complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E, ce qui est équivalent à : toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide.

2) Applications :

• <u>Prop 41</u> : l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ partout et nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

• <u>Thm 42 (de l'applic ouverte)</u> : Soit $T:E\to F$ où E,F sont des espaces de Banach, $T\in\mathcal{L}_c(E,F)$ T surjective, alors T est une application ouverte.

• <u>Thm 43 (de Banach)</u> : Si $T:E\to F$ (E,F : Banach) est une application linéaire continue et bijective, alors T^{-1} est continue.

• <u>Thm 44 (Banach-Steinhauss)</u> : E Banach, F evn. Soit $H\subset\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors ou bien $(|||f|||)_{f\in H}$ est borné, ou bien il existe $x\in E$ tq $\sup_{f\in H}\|f(x)\|=+\infty$.

• <u>Applic 45</u> : Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

• <u>Prop 46</u> : Il n'existe pas d'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

<u>Références</u> :

[GOU] : Gourdon Analyse
[GOU Al] : Gourdon Algèbre
[X-ENS 2] : Oraux X-ENS Analyse 2.
[Rou] : Rouvière
[OA] : Objectif Agrégation
[H-L] : Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.
[Rud] : Rudin, Analyse réelle et complexe.
[Bre] : Brezis, Analyse fonctionnelle