223

Convergence des suites numériques. Exemples et Applications

1)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites réelles

I Définitions et Généralités

I-1) Définitions et Premières propriétés

Def 1 : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (noté CV) s'il existe $l\in\mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq n_0$ $|u_n - l|\leq \varepsilon$

Dans ce cas l est unique et on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Def 2 : • $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \exists (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} u_n = w_n v_n \ \forall n\geq 0 \\ w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{cases}$

• $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \exists (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} u_n = w_n v_n \\ w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$

Prop 3 : • Si $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\leq v_n$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ alors $u\leq v$

• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone bornée $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV.

Cor 4 (Th. des gendarmes) Si $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\leq v_n\leq w_n$ et si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV et même $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Ex 5 • $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k)!}$ • $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

I-2) Suites adjacentes

Def et cor 6 : Si • $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

• $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

• $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\leq v_n$

$\Rightarrow$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

Si de plus $u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

alors elles sont dites adjacentes et ont la même limite.

Ex 7 (Suite arithmetico-géométrique)

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definies par $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $0<u_0<v_0$ sont adjacentes.

Appli 8 (Critère des series alternées)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et CV vers 0

alors $\sum_n (-1)^n u_n$ CV et $\forall n\in\mathbb{N}$ $\left|\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k u_k\right| \leq u_n$

I-3) Valeurs d'adhérence

Def 9 $a\in\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Prop 10 : • Si $X_n = \{u_k, k\geq n\}$ alors

$\{\text{valeurs d'adhérence}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n}$ (et est donc fermé)

• Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence $a\in\overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Ex 11 : Pour $u_n = \sin(n)$, $\{\text{valeurs d'adhérence}\} = [-1, 1]$

Th 12 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée, on peut extraire une sous suite qui converge (i.e. Toute suite bornée a une valeur d'adhérence finie)

I-4) Les suites de Cauchy

Def 13 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ tq $\forall p\geq q\geq n_0$ $|u_p - u_q|\leq\varepsilon$

Ex 14 $\mathbb{R}$ se construit grâce aux suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ quotienté par la relation d'équivalence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_R (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Prop 15 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV.

Appli 16 : Toute série absolument convergente est convergente.

I-5) Liminf et limsup

Def 17 : On note $\overline{\lim}\, u_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} u_k \in\overline{\mathbb{R}}$

et $\underline{\lim}\, u_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} u_k \in\overline{\mathbb{R}}$

2/ **Prop 18** : Si $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n = a$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Appli 19 : (Les suites sous-additives ou sous multiplicatives)
Si $\forall n,m \geq 0$ $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n}$

Conséquence 20 : Si T est un opérateur borné dans un Banach alors $u_n = \|T^n\|^{1/n}$ converge.

II Applications aux fonctions continues

II-1) Caractérisation séquentielle

Prop 21 ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en a)
$$\Leftrightarrow \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) \right)$$

Ex 22 : Si $u_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$ alors $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = (-1)^n$
$\Longrightarrow x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

II-2) Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Prop 23 : Soit I intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to I$ continue. Définissons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$.

Rmq 24 : f admet un point fixe $\not\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV
exemple : $u_0 > 1$, $u_{n+1} = u_n$, $f(1) = 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Th 25 : (Banach-Picard)
I intervalle fermé, $f : I \to I$ contractante alors $\forall u_0 \in I$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f.

Prop 26 Si f est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Ex 27 : Sur $\mathbb{R}^+$ $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ est bornée et croissante $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

Ex 28 (Les suites homographiques)
$$u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d} \quad \text{avec } ad - bc \neq 0.$$
On pose (E) : $cx^2 - (a-d)x - b = 0$

Prop 29 : • Si (E) a deux racines distinctes α et β alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.
• Si (E) a une unique racine double α alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn$ où $k = \frac{c}{a - \alpha c}$.

Th 30 (Méthode de Newton)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ tq $f(a) < 0 < f(b)$ et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.
Considérons $u_{n+1} = F(u_n) := u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ et notons α l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $[a,b]$
Alors pour u_0 proche de α, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ et même $\exists C > 0$ tel que $|u_n - \alpha| \leq C^{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ex 31 On peut approcher le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en considérant $f(x) = x^2 - x - 1$ sur $[1,2]$.

II-3) Suites équiréparties.

Def 32 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est équirépartie si $\forall a,b$ tq $0 \leq a \leq b \leq 1$ $\frac{X_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} b - a$
où $X_n(a,b) = \mathrm{Card}\left\{ k \in \{1,\dots,n\},\ u_k \in [a,b] \right\}$

Th 33 (Critère de Weyl)
On a équivalence entre
(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie
(ii) $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$
(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) **Ex 34** Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
alors $(x_0 + n\theta - [x_0 + n\theta])_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie
($[\,]$ = partie entière)

III Comportements Asymptotiques

III-1) Sommation des équivalents

Th 35 : Soient $\sum_n u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs et telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$
alors (i) $\sum_n u_n$ CV $\Rightarrow$ $\sum_n v_n$ CV
et même $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$
(ii) $\sum_n u_n$ DV $\Rightarrow$ $\sum_n v_n$ DV
et même $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$

Appli 36 : Calcul du développement limité de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

III-2) Formule de Stirling

Lem 37 $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ CV $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

Appli 38 : (Stirling)
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

III-3) Moyenne de Cesàro

Prop 39 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors sa moyenne de Cesàro : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge aussi vers ℓ.

Rmq 40 : La réciproque est fausse :
$u_n = (-1)^n$ et $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Appli 41 : Soit $c > 0$, $f : [0, c] \to \mathbb{R}_+$ continue telle que en 0^+ $f(x) = x - a x^\alpha + o(x^\alpha)$, $a > 0$, $\alpha > 1$
Alors pour u_0 assez petit et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(n\alpha a)}^{1/\alpha}$

III-4) Méthode d'accélération de convergence d'Aitken

Prop 42 : Si $u_n \to a \in \mathbb{R}$, $\exists k \in \mathbb{R}$, $|k| < 1$
et si $\exists (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
et $(u_{n+1} - a) = (k + \varepsilon_n)(u_n - a)$.
On suppose de plus que $u_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Alors il est possible de construire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{(u_{n+1} - u_n)^2}{(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)}.$$
Nous avons alors :
- $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{R}$
- $\frac{v_n - a}{u_n - a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(v_n converge plus vite que u_n vers a)

III-5) Un Théorème Taubérien

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ est décroissante, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\alpha \in]0, 1[$, $c > 0$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} c\, n^{-\alpha} \Leftrightarrow S_n \underset{n\to\infty}{\sim} c\,\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.