249

Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

I- Construction de suites de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes :

[O1 p243]

1) Définition :

- **Déf 1** : X v.a.r. suit une loi de Bernoulli de paramètre p, noté $X \sim \mathcal{B}(p)$ si $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$
- **Prop 2** : Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$ et $\varphi_X(t) = (1-p) + pe^{it}$
- **Rq** : - Cette loi modélise un tirage pile ou face ou aussi le tirage de boules blanches en proportion p et de boules noires en proportion $(1-p)$
  - Si $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, alors $X = \mathbb{1}_{[0,p]}(U) \sim \mathcal{B}(p)$.

2) Construction d'une suite finie :

- **Cas général** : A partir de $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ $(i=1,2)$ deux espaces probabilisés, X_i une v.a. de loi P_i, on peut construire $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \otimes P_2)$ un nouvel espace probabilisé sur lequel la v.a. $X = (X_1, X_2)$ est bien définie.
- **Cas Bernoulli** : Ainsi, on peut bien construire une suite finie de Bernoulli sur $\{0,1\}^n$.

[O2 p52-61]

3) Construction d'une suite infinie :

La généralisation à des suites infinies nous conduit à considérer $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Cependant, l'existence d'une mesure produit de proba sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ n'est pas évidente.

- **Thm 3** [Kolmogorov] : Soit $(E_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \geq 1}$ une famille d'espaces probabilisés. Soient $\Omega = \prod_{i \geq 1} E_i$, $\mathcal{A}$ la tribu produit des $\mathcal{B}_i$, $i \geq 1$.
  Alors, $\exists ! P$ mesure de proba sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tq $\forall n \geq 1$, $\forall C_n \in \mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n$,
  $P(A) = P_1 \otimes \dots \otimes P_n(C_n)$ où $A = C_n \times E_{n+1} \times \dots$

ADMIS [B-L p80]

- **Cas particulier sans Kolmogorov** : [O2 p52-61]
  On se place sur $\Omega = [0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue.
- **Déf 4** [Développement dyadique] : Pour tout $x \in [0,1[$, on définit les suites $(D_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ par : $R_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(x) = [2R_{n-1}(x)]$ et $R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x)$.
  $(D_n(x))_n$ est le développement dyadique de x.
- **Rq** : • $D_n(x) \in \{0,1\}$ et $R_n(x) \in [0,1[$.
  • Le développement dyadique d'un réel n'est pas toujours unique (expl : $\frac{1}{2} = 0{,}100\dots = 0{,}011\dots$ en base 2) mais cette définition de $(D_n(x))_n$ donne un unique développement.
- **Prop 5** : Soit $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, \lambda)$ l'espace probabilisé où λ est la restriction de la mesure de Lebesgue à $[0,1[$. Alors, sur cet espace, $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

• Corollaire 6 : Soit $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Il existe une suite de v.a.r $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, \lambda)$ indep et telles que $X_j \sim \mu_j \ \forall j\in\mathbb{N}^*$.

Le corollaire se démontre en 2 étapes :

• Rq : – on prouve l'existence d'une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{U}_{[0,1[}$ à l'aide de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
– on conclut grace à la fonction pseudo-inverse.

• Réciproque 7 [de la Prop 5] : On suppose que l'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_p)$ et d'une suite de v.a. iid $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque Z_i est un v.a. sur Ω à valeurs dans $\{0,1\}$ de loi $\mathcal{B}(p)$. On définit une mesure λ_p sur $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[})$ par : $\forall A\in\mathcal{B}_{[0,1[}$,
$\lambda_p(A) = \mathbb{P}_p(\{\omega\in\Omega, \exists x\in A, \forall j\geq 1, D_j(x) = Z_j(\omega)\})$
Si $p=\frac{1}{2}$, on obtient la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$ et si $p\neq\frac{1}{2}$, on obtient une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue.

[02 p408] • Application 8 [Construction de Chaînes de Markov] : $g : E\times\mathbb{R} \to E$ application mesurable avec E ensemble dénombrable muni de la tribu de ses parties $\mathcal{E}$. Soit X_0 une v.a. à valeur dans E, soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ v.a. de loi $\mathcal{U}_{[0,1[}$. On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_{n+1} = g(X_n, U_{n+1})$.
Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène relativement à la filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathcal{A}_0 = \sigma(X_0)$ et $\mathcal{A}_n = \sigma(X_0, U_1, \dots, U_n)$ pour $n\geq 1$.

II- Construction de variables aléatoires à partir de v.a. de Bernoulli :

• Prop 9 [Loi Binomiale] : Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite finie de v.a. iid de Bernoulli de paramètre p. [01 p70]
Alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$,
ie $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k\in[\![1,n]\!]$

• Prop 10. Si $X\sim\mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$,
$Var(X) = np(1-p)$ et $\varphi_X(t) = (pe^{it} + (1-p))^n$

• Prop 11 [Loi géométrique et binomiale négative] : [01 p105]
Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. iid de loi $\mathcal{B}(p)$.
$\forall n\geq 1$, on définit par récurrence $(T_n)_n$ par :
$T_1 = \inf\{k\geq 1, X_k = 1\}$ et $T_{n+1} = \inf\{k > T_n, X_k = 1\}$.
Alors, $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots$ sont iid de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (ie $P(T_1 = n) = p(1-p)^n \ \forall n\in\mathbb{N}^*$)
De plus, $\forall n>1$, $T_n \sim \overline{\mathcal{B}}(n,p)$: loi binomiale négative ie $P(T_n = l) = \begin{cases} \binom{l-1}{n-1} p^n (1-p)^{l-n} & \text{si } l\geq n \text{ et} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

• Thm [de Poisson] 12 : Soit $(p_n)_n$ une suite de réels de $]0,1[$ tq $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ (où $\lambda>0$). [01 p226]
On considère $\forall n\in\mathbb{N}$ une va S_n de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, la suite $(P(S_n = k))_n$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$
donc $(S_n)_n$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$: loi de Poisson

[O2 p127-128]

III - Théorèmes limites appliqués aux v.a. de Bernoulli

• **Thm 13** [Loi faible des grands nombres] : [O1 p234-236]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a. iid tq X_1 admet un moment d'ordre 2. Alors $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$ CV en probabilité vers $m = \mathbb{E}(X_1)$.

• **Corollaire 14** [Thm de Bernoulli] : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants de même proba p. Alors la suite de v.a. $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j}$ CV en proba vers p.

DVT 1

• **Thm 15** [de Bernstein] [Z-Q p518-519]
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On pose :
- $\forall h \in]0,1]$, $\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)|, |u-v| \leq h\}$
- $\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0,1]$,
$B_n(x) = B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$
(n^e polynôme de Bernstein).

Alors 1) $B_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$
2) $\exists C>0, \forall n \geq 1, \|f-B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
3) L'estimation 2) est optimale : $\exists f$ continue, $\delta > 0$ tq $\|f-B_n\|_\infty \geq \delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

[O2 p314]

• **Thm 16** [Central-limite] : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a. iid non constantes, tq $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$. Alors
$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma_{X_1}}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mathbb{E}(X_1)\right)$ CV en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
En particulier, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ tq $a<b$,
$\mathbb{P}(a < Y_n \leq b) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

• **Thm 17** [Loi forte des grands Nombres (cas borné)] :
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles iid et bornées (ie $\exists C>0$ tq $|X_1| \leq C$). Alors
$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$.

DVT 2

• **Application 18** [intervalle de confiance] :
On peut construire un intervalle de confiance asymptotique approché pour p :
$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{\alpha\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \frac{S_n}{n} + \frac{\alpha\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)}}{\sqrt{n}}\right)$
$= 1-2q$ où α est le quantile d'ordre $1-q$.

IV - Ruine du joueur : [O2 p380]

• Jeu de pile ou face : pile rapporte 1€, face fait perdre 1€.
- gain après n lancers : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i = 2Y_i - 1$ et $(Y_i)_i$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$.
- fortune initiale du joueur : $a < +\infty$.
- fortune de son adversaire : $b < +\infty$

Il cesse de jouer lorsqu'il a perdu toute sa fortune ou a gagné toute la fortune de son adversaire. On note
$T = \inf\{n \in \mathbb{N}, S_n = 0 \text{ ou } S_n = a+b\}$ le temps d'arrêt du jeu. On a $\mathbb{E}(S_T) = (2p-1)\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}\right) = 1$ où $q = 1-p$.
Si $p = q = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}$ et $\mathbb{E}(T) = ab$
Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$ et
$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p-q}\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - a\right)$