Formule sommatoire de Poisson

Arnaud Girand

5 juillet 2012

Référence :
- [Gou08], p.272–273

On adopte ici les conventions de notation suivantes :
- ◇ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on note $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\widehat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt$$

- ◇ pour f continue 1–périodique sur $\mathbb{R}$ on note $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier, définis comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) := \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi nt} dt$$

Proposition 1 (Poisson)
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Alors la série $\sum_{(n\in\mathbb{Z})} f(.+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}$$

Démonstration : On définit pour $n \in \mathbb{Z}$ l'application $f_n := f(.+n)$. Soit $K \geq 0$: alors, comme $f(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour n assez grand (en valeur absolue) $\exists C > 0$, $\forall x \in [-K, K]$, $|f_n(x)| \leq \frac{C}{(x+n)^2} \leq \frac{C}{-K+|n|)^2}$.
Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[-K,K]} = O(\frac{1}{n^2})$, d'où la convergence normale escomptée.

De la même façon on démontre que $\sum_{(n\in\mathbb{Z})} f'(.+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ ($f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) donc l'application $F : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n)$$

Si $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$, alors :

$$\sum_{n=-N}^{N} f(x+n+1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

En passant à la limite, on obtient que F est 1–périodique et alors :

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{Z},\ c_N(F) := \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) e^{-2i\pi Nx} dx & \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi Nx} dx \text{ par convergence uniforme} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2i\pi N(x-n)} dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{2i\pi nN}}_{=1} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2i\pi Nx} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi Nx} dx \\
&= \widehat{f}(N)
\end{aligned}$$

Or F est de classe $\mathcal{C}^1$ et 1–périodique donc est la somme de sa série de Fourier, i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}$$

D'où le résultat.

Corollaire 1.1
Soit $s > 0$. Alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{s}}$$

Démonstration : On considère l'application $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z},\ \widehat{f}(n) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi nt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-2i\pi n \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt \text{ via } t \mapsto \frac{t}{\sqrt{\alpha}}\end{aligned}$$

Posons à présent pour $x \in \mathbb{R}$ $I(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt$ (cf. [Gou08] p. 164–166). Alors par dérivation sous le signe somme I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I'(x) = \frac{2i\pi}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2} e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt$$

En intégrant par parties on trouve de plus que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2i\pi x} \int_{\mathbb{R}} 2t e^{-t^2} e^{-2i\pi x \frac{t}{\sqrt{\alpha}}} dt = \frac{\sqrt{\alpha}}{i\pi x} \frac{\sqrt{\alpha}}{2i\pi} I'(x) = -\frac{\alpha}{2x\pi^2} I'(x)$$

In fine :

$$I(x) = I(0) e^{-\dfrac{x^2\pi^2}{\alpha}} = \sqrt{\pi} e^{-\dfrac{x^2\pi^2}{\alpha}}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \widehat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\dfrac{n^2\pi^2}{\alpha}}$$

La formule de Poisson appliquée en $x = 0$ à f avec $\alpha := \pi s$ nous livre alors le résultat.

Corollaire 1.2
Soit $N \geq 0$; on pose :

$$T_N := \sum_{n=-N}^{N} \delta_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

Alors la suite $(T_N)_N$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution $\delta_{\mathbb{Z}}$ qui vérifie la relation suivante :

$$\widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \delta_{\mathbb{Z}}$$

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme on vient de voir que la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ étant bien définie on a :

$$\langle T_N, \varphi \rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi \rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$$

Vérifions que $\delta_{\mathbb{Z}}$ est bien une distribution tempérée. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}|\langle \delta_{\mathbb{Z}}, f \rangle| &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} |n^2 f(n)| + |f(0)| \\ &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right) \|f\|_{2,0} + \|f\|_{0,0}\end{aligned}$$

Où les $\|.\|_{n,p} : f \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(p)}(x)|$ sont les semi–normes définissant la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi on a bien :

$$|\langle \delta_{\mathbb{Z}}, f\rangle| \leq \left(\frac{\pi^2}{3}+1\right)\sup(\|f\|_{2,0}, \|f\|_{0,0})$$

D'où $\delta_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Enfin, la formule sommatoire de Poisson nous donne alors :

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}, f\rangle &= \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \widehat{f}\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \\ &= \langle \delta_{\mathbb{Z}}, f\rangle\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- On n'aura vraisemblablement le temps de n'exposer qu'un seul des corollaires. Je préfère pour ma part largement le second, qui est plus facile à mettre en contexte.
- *Détails de la majoration de* $f(x+n)$. Soit $x \in [-K, K]$ et soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq K+1$. Alors :
  * si $n \geq 0$ alors $x+n \geq -K+n = -K+|n|$;
  * si $x < 0$ alors $-x \in [-K, K]$ donc $(x+n)^2 = (-x-n)^2 = (-x+|n|)^2 \geq (-K+|n|)$ par le cas précédent ($-x \geq 0$).
- *Intégrale de Gauss.* Il est clair que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, nous nous intéresserons donc ici uniquement au calcul effectif de l'intégrale (cf. [Gou08], p. 163). On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\end{aligned}$$

  On pose également $g := \int_0^1 h(., t)dt$. Alors :
  * pour (presque) tout $x \geq 0$, $h(x, .)$ est intégrable sur $[0,1]$;
  * pour tout $t \in [0,1]$, $h(., t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$;
  * pour (presque) tout $x \geq 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, .)$ est intégrable sur $[0,1]$.

  Ainsi par théorème de dérivation sous le signe intégral, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) &= -2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}dt \\ &= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}dt \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2}dt \text{ via } t \mapsto \frac{t}{x} \\ &= -2f'(x)f(x) \text{ où } f(x) := \int_0^x e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

  De fait :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) - g(0) = \int_0^x g(t)dt = -2\int_0^x f'(t)f(t)dt = -(f^2(x) - f^2(0))$$

  Or $f^2(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \dfrac{1}{t^2+1}dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \dfrac{\pi}{4} - 0$ d'où $g(x) = \dfrac{\pi}{4} - f^2(x)$. Comme $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}dt$, $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ et donc $f^2(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$. f étant positive on en déduit finalement que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$ et donc :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} d'o \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \text{ par parité}$$

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse (2e édition)*. Ellipses, 2008.