Expression d'un polynôme symétrique en fonction des polynômes symétriques élémentaires

2012-2013

On note :

$$\sigma_k(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_k}$$

le k-ième polynôme symétrique élémentaire.
Soit P un polynôme symétrique. Le but est ici d'écrire P comme polynôme en les σ_k.
Si $m := X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ est un monôme de P, alors il existe $i'_1 \geq \ldots \geq i'_n$ obtenus par permutation des i_k tels que $X_1^{i'_1} \cdots X_n^{i'_n}$ soit un monôme de P.
Le degré de m est alors $(i'_1, \ldots, i'_n)$, puis le degré de P est le max (selon l'ordre lexicographique) des degrés de ses monômes.
On a alors :

$$\deg \sigma_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$$

Soit désormais $m := X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}, i_1 \geq \ldots \geq i_n$ le monôme de degré maximal de P. On pose :

$$Q := \sigma_1^{i_1 - i_2} \sigma_2^{i_2 - i_3} \cdots \sigma_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} \sigma_n^{i_n}$$

On a $\deg Q = (i_1, \ldots, i_n)$. Alors, si a est le coefficient de m dans P,

$$\deg(P - aQ) < \deg P$$

Puis on recommence sur $P - aQ$.

Exemple.

$$P := X_1 X_2^2 + X_1 X_3^2 + X_2 X_1^2 + X_2 X_3^2 + X_3 X_1^2 + X_3 X_2^2$$

dans $k[X_1, X_2, X_3]$.
Alors $\deg P = (2, 1, 0)$, on pose donc :

$$\begin{aligned} Q &:= \sigma_1 \sigma_2 \\ &= (X_1 + X_2 + X_3)(X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3) \\ &= X_1 X_2^2 + X_1 X_3^2 + X_2 X_1^2 + X_2 X_3^2 + X_3 X_1^2 + X_3 X_2^2 + 3 X_1 X_2 X_3 \end{aligned}$$

D'où :

$$P - Q = -3\sigma_3$$

Finalement :

$$P = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$$