ENS de Rennes
Université Rennes 1

Département de Mathématiques
Rapport de Stage

Autour des groupes et des algèbres de Lie matriciels

Élève :
Titouan Donnart

Enseignant :
Carl Tipler

Introduction :

Construits dans le dernier tiers du XIXe siècle par Sophus Lie (1842-1899) et par Felix Klein (1849-1925), les groupes de Lie ont vu leur importance grandir en physique théorique au cours du XXe siècle. Même si on abordera un peu quelques notions de géométrie différentielle, ce stage n'a pas pour but d'étudier les groupes de Lie de manière générale mais d'abord de s'intéresser aux groupes de Lie matriciels que l'on peut définir sans utiliser ces notions de géométrie différentielle. Ces groupes sont ceux que l'on retrouve le plus dans la physique théorique. On montrera quand même dans ce rapport que les groupes de Lie matriciels seront bien des groupes de Lie au sens général.
Une des caractéristiques principales d'un groupe de Lie, est qu'on peut lui associer une algèbre, dite de Lie. Ainsi, à un problème qui ferait intervenir des groupes de Lie, on peut ramener ce problème à certaines algèbres, et donc se ramener à étudier un problème linéaire.
L'objectif du stage est d'étudier quelques propriétés générales autour des groupes de Lie matriciels et de leur algèbre de Lie associée. L'accent est mis sur les propriétés que l'on peut établir sur le groupe de Lie ou sur son algèbre de Lie associée connaissant certaines hypothèses sur l'autre.

Je remercie tout d'abord mon maître de stage Carl Tipler pour m'avoir accepté m'encadrer, pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour toute l'aide qu'il m'a apporté. Je remercie ensuite Achim Napame, doctorant de Carl Tipler, qui m'a aidé sur beaucoup de détails dans ce rapport. Enfin, je remercie toute l'équipe du Laboratoire de Mathémtiques de Bretagne Atlantique qui m'a fait découvrir le monde de la recherche et pour les moyens qu'ils m'ont mis à disposition.

Table des matières

Notations :

— On fixe $n \geqslant 1$ un entier naturel fixé.

— On note $M_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à valeurs dans le corps $\mathbf{K}$.

— On note I la matrice identité sur $M_n(\mathbf{K})$.

— On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$.

— On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à valeurs dans le corps $\mathbf{K}$.

— On note $\dim_{\mathbf{K}}(E)$ (ou $\dim(E)$ quand le contexte sera évident) la dimension d'un espace vectoriel E en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

— On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

— Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, on note $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

— Pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$, on notera $M^* := (\overline{m_{j,i}})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice adjointe de M. Dans le cas où $M \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $M^* = {}^tM$.

— $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans F.

— On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbf{K})$.

— $\mathcal{B}_E(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$. L'indice E sera omis lorsque le contexte sera évident.

— De même $\overline{\mathcal{B}}_E(x, r)$ désigne la boule fermée de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace vectoriel normé E.

— On note $S_E(0, 1)$ la sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace vectoriel normé E. Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, on notera $S_E(0, 1)$, $\mathbb{U}$.

— On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$:

$$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n : \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\ y_i.$$

— Pour une application f différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{d}f(M) : H \in U \mapsto \mathrm{d}f(M)\cdot H$, sa différentielle en un point M de U.

Les autres notations apparaissant dans ce rapport seront précisées au fur et à mesure du document.

I Notions préliminaires

I.1 Quelques notions de connexité

L'objectif de cette section est d'introduire quelques notions autour de différents types de connexité. Rappelons tout d'abord quelques définitions classiques de connexité :

Définition I.1

- *L'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit* ***connexe*** *si tout ensemble ouvert fermé de X est soit égal à X soit vide.*
- *L'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit* ***connexe par arcs*** *si pour tous $x, y \in X$ il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = 1$.*
- *L'esapce topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit* ***localement connexe par arcs*** *si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U_x contenant x tel que U_x soit connexe par arcs.*

Donnons maintenant la définition d'une homotopie.

Définition I.2

Soient $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Soient f, g deux applications continues de X dans Y. On dit que f et g sont ***homotopes*** *s'il existe une application $F : X \times [0, 1] \to Y$ continue telle que pour tout $x \in X$: $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$. On appelle cette application une* ***homotopie*** *entre f et g.*

Définition I.3

Supposons que X soit connexe par arcs. On dit alors que X est ***1-connexe*** *si tout lacet tracé dans X est homotope à un point.*

Remarquons qu'un espace topologique 1-connexe ne peut contenir de "trou". Par exemple, $\mathbb{C}^*$ n'est pas 1-connexe car le lacet $t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}$ ne peut être déformé continûment en un point. Au contraire, on peut démontrer que les sphères dans $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$ sont 1-connexes (voir par exemple la proposition 1.14 dans [Hatcher *et al.*, 2002]).

Notons aussi que la 1-connexité possède une définition équivalente. En effet tout lacet tracé dans X est homotope à un point si et seulement si pour tout $x, y \in X$, deux chemins continus f, g joignant x et y dans X sont homotopes. On obtient donc :

Proposition I.4

Un espace topologique X connexe par arcs est 1-connexe si et seulement si pour tous $x, y \in X$, deux chemins continus $f, g : [0, 1] \to X$ tels que $f(0) = g(0) = x$ et $f(1) = g(1) = y$ sont toujours homotopes.

Enfin, voici une propriété générale sur les espaces topologiques qui nous sera utile dans notre rapport :

Proposition I.5

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe. X est localement connexe par arcs si et seulement si X est connexe par arcs.

Démonstration : Le sens indirect est évident, prouvons le sens direct. On suppose que $(X, \mathcal{T})$ soit un espace topologique localement connexe par arcs. Soit x_0 et on pose R_{x_0} l'ensemble suivant :

$$R_{x_0} = \{x \in X \mid x_0 \text{ et } x \text{ sont reliables par un chemin continu}\}.$$

On voit facilement que R_{x_0} est connexe par arcs. Montrons que R_{x_0} est un ouvert fermé de X.

— Montrons d'abord que R_{x_0} est ouvert. Pour cela on considère $x \in R_{x_0}$ et U_x l'ouvert de X contenant x et connexe par arcs. Soit $y \in U_x$, alors x_0 est reliable à x et x est reliable à y par définition. Donc x_0 et reliable à y et donc $U_x \subset R_{x_0}$. Donc par ouverture de U_x, R_{x_0} est ouvert dans X.

— Montrons ensuite que R_{x_0} est fermé. Pour cela soit $x \in \overline{R_{x_0}}$ et soit U_x son voisinage ouvert connexe par arcs. Comme $x \in \overline{R_{x_0}}$, par ouverture de U_x, il existe $y \in \mathrm{U}_x \cap R_{x_0}$. Donc x_0 est reliable à y qui est lui-même reliable à x. Donc $x \in R_{x_0}$. Donc R_{x_0} est fermé.

Or comme R_{x_0} est non vide (x_0 en est un élément), la connexité de X implique que $X = R_{x_0}$ et donc X est connexe par arcs. □

I.2 Autour des sous-variétés

L'étude des groupes de Lie ne se cantonne pas aux groupes matriciels. Nous allons montrer dans notre rapport qu'un groupe de Lie matriciel est un groupe de Lie au sens général. Cette dernière notion fait apparaître des notions de géométrie différentielle que l'on va rappeler.
Tout d'abord, on rappelle la définition d'une sous-variété :

Définition I.6

*On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est **une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension** d où $k, d \in \mathbb{N}$ si pour tout $a \in E$ il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi_a : U_a \to V_a$, un voisinage ouvert U_a de a dans $\mathbb{R}^n$, V_a de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :*

$$\varphi_a(E \cap U_a) = \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}\right) \cap \varphi_a(U_a).$$

Notons qu'à une sous-variété donnée, on peut définir l'espace tangent en un point :

Définition I.7

— *Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $a \in E$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit **tangent en** a **à** E s'il existe une fonction dérivable $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ où I désigne un intervalle ouvert contenant 0 telle que :*

$$\gamma(I) \subset E,\ \gamma(0) = a,\ \gamma'(0) = v.$$

— *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension d (où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ et $0 \leqslant d < +\infty$) et $a \in E$. On appelle **espace tangent en** a **à** E, l'ensemble des vecteurs tangents en a à E*

Dans le cadre de notre rapport, nous allons nous réduire à étudier des sous-variétés de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension quelconque. Lorsque nous allons montrer qu'un ensemble donné est une sous-variété, nous allons procéder en sens inverse de la définition I.6 :

Proposition I.8

Soit E une sous-partie de $\mathbb{R}^n$. E est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ si pour tout $a \in E$, il existe un sous-espace vectoriel F_a de $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert U_a de 0 dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V_a de a dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi_a : U_a \to V_a$ qui vérifie : $\varphi_a(U_a \cap F_a) = E \cap V_a$.

Notons enfin que l'on peut donner une définition implicite d'une sous-variété :

Proposition I.9

Soit $d \in \mathbb{N}, 0 \leqslant d \leqslant n$. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

— E est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.

— Pour tout $a \in E$, il existe un voisinage U_a de a et une application différentiable $\varphi : U_a \to \mathbb{R}^{n-d}$ vérifiant :
$$E \cap U_a = \varphi^{-1}(\{0\}) \text{ et } \mathrm{d}\varphi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d} \text{ est surjective.}$$

De plus, l'espace tangent à E en a est égal à $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi(A))$.

II Introduction aux groupes de Lie matriciels et aux algèbres de Lie

II.1 Définition et topologie d'un groupe de Lie matriciel

On munit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de la topologie induite par $M_n(\mathbb{C})$.

Définition II.1

Un ***groupe de Lie matriciel*** *est un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Exemples : On peut déjà s'intéresser à quelques exemples de groupes de Lie matriciels :

— *Groupes linéaires :* bien entendu, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie matriciel. On remarque aussi que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie matriciel, en effet, c'est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. De plus, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, *a fortiori* A est limite d'une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Maintenant, les coefficients de A sont des limites de suites réelles, donc ce sont nécessairement des réels. De même pour A^{-1}. Ainsi $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Enfin, les groupes spéciaux linéaires $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sont des groupes de Lie matriciels car ce sont les noyaux du morphisme continu det sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ respectivement.

— *Groupes unitaires :* On introduit le groupe unitaire :

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}\}.$$

C'est le noyau du morphisme continu : $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto A^*A - I \in M_n(\mathbb{C})$. C'est donc un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
On peut aussi introduire le groupe spécial linéaire :

$$\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}.$$

— *Groupes orthogonaux :* On appelle $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales (*i.e* l'ensemble des matrices dont ses vecteurs colonnes sont orthonormales pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$) de $M_n(\mathbb{R})$. C'est un groupe de Lie matriciel car il s'écrit sous la forme (qui rappelle celle du groupe unitaire) :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A^{-1}\}.$$

On introduit de même le groupe spécial orthogonal qui $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ qui est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1. C'est aussi un groupe de Lie matriciel pour les mêmes raisons que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$.

On peut aussi étudier la connexité des groupes de Lie matriciels, on définit alors :

Définition II.2

- *Un groupe de Lie matriciel G est dit* ***connexe par arcs*** *s'il est au sens de la définition usuelle pour la topologie de $M_n(\mathbb{C})$.*
- *On appelle* ***composantes connexes par arcs*** *de G les parties connexes par arcs de G maximales pour l'inclusion.*
- *La composante connexe par arcs de G qui contient l'élément neutre est notée G^0 et est appelée* ***composante neutre****.*

Nous verrons plus tard dans le rapport que dans le cadre de notre étude la notion de connexité par arcs et de connexité sont équivalentes.

Exemples :

- On peut montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie matriciel connexe par arcs. Pour cela, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PTP^{-1}$ où T est triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées avec multiplicité. Comme A est inversible, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $\lambda_i \neq 0$. Notons $T(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, la matrice T dont on a multiplié les termes strictement au-dessus de la diagonale par $(1-t)$. Ce chemin relie T à $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Ensuite, on veut relier D à I dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, pour cela, on relie pour tout k, λ_k à 1 dans $\mathbb{C}^\times$ par un chemin γ_k, cela est possible en traçant un segment entre λ_k et 1 dans $\mathbb{C}$, et si ce segment passe par 0, on peut tracer un autre chemin en faisant un demi-cercle autour de 0 puis en traçant un segment vers 1. Cela revient en fait ici à la connexité par arcs de $\mathbb{C}^\times$. Finalement, en concaténant nos deux chemins, on obtient un chemin continu $\gamma_T : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ reliant T à I. Alors le chemin $\gamma : t \in [0,1] \mapsto P\gamma_T(t)P^{-1}$ relie A vers I dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
- De la même manière, on peut montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, avec un léger changement pour les chemins reliant les coefficients de D vers 1. En effet, on doit s'assurer que le produit de ces chemins soit toujours égal à 1. Pour ce faire, on construit comme à l'exemple précédent les chemins $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, puis, pour le dernier coefficient, on prend le chemin suivant :

$$\gamma_n : t \in [0,1] \mapsto \frac{1}{\gamma_1(t) \dots \gamma_{n-1}(t)}.$$

  Ce chemin est bien défini, continu, relie λ_n à 1 et le produit des chemins $(\gamma_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est toujours égal à 1.
- On montre de la même manière que $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs : cela provient de l'expression des matrices de ces ensembles dans des bases adaptées.

La proposition suivante permet de voir l'intérêt de la notion de composante neutre : elle permet d'obtenir facilement un sous-groupe connexe par arcs normal d'un groupe de Lie matriciel.

Proposition II.3

Soit G un groupe de Lie matriciel. Alors G_0 est sous-groupe normal de G.

Démonstration : Soient $A, B \in G_0$. Par définition, il existe deux chemins γ_A et γ_B à valeurs dans G reliant I à A et B respectivement. Alors le chemin $\gamma_{AB} : t \in [0,1] \mapsto \gamma_A(t)\gamma_B(t)$ est un chemin continu (par produit de fonctions continues) reliant I à AB à valeurs dans G (car G est un groupe). Donc $AB \in G_0$. De la même manière en considérant $\gamma_{A^{-1}} : t \in [0,1] \mapsto (\gamma_A(t))^{-1} \in G$, on remarque que $A^{-1} \in G_0$. De ces deux points et du fait que $I \in G_0$ (grâce au chemin constant égal à I), on en tire que G_0 est un sous-groupe de G.
Soient $A \in G_0$ et $B \in G$. Par définition, il existe un chemin continu γ_A reliant I à A dans G. Alors $\gamma_{BAB^{-1}} : t \in [0,1] \mapsto B\gamma_A(t)B^{-1}$ est un chemin continu reliant I à BAB^{-1} dans G. Donc $BAB^{-1} \in G_0$.
Donc G_0 est un sous-groupe normal de G. □

Exemple : On remarque que $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ est la composante neutre de $U_n(\mathbb{C})$ et que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est la composante neutre de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrons que c'est le cas pour $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, la démonstration est identique pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de partie $A \subset \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs et contenant strictement $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$. Par l'absurde, supposons qu'il en existe une. Soit $X \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tel que $X \notin \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$. Nécessairement $\det(X) = -1$ ce qui est absurde car on aurait $\det(A) = \{-1, 1\}$ qui est un ensemble qui n'est pas connexe par arcs alors que A l'est, et que det est continu.

Définition II.4

*Un groupe de Lie matriciel G est dit **1-connexe** s'il est 1-connexe pour la topologie issue de $M_n(\mathbb{C})$.*

Exemple : On peut montrer que $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ est 1-connexe. Pour cela, nous aurons besoin de démontrer le résultat suivant :

$$A \in SU_2(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \exists !(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \text{ et } A = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Le sens réciproque se vérifie facilement, pour le sens direct on considère $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$.

Les équations $M^*M = I$ et $\det(M) = 1$ nous donnent : $\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\overline{b} = -c\overline{d},\ ad - bc = 1 \end{cases}$.
Si $d = 0$, on vérifie que nécessairement $a = 0$ et $b = c = 1$ ce qui donne le résultat.
Sinon, on a $c = \dfrac{-a\overline{b}}{\overline{d}}$ et $a = \dfrac{1 + bc}{d}$. Donc en combinant ces deux équations, on obtient : $a = \dfrac{\overline{d} - a|b|^2}{|d|^2}$.
Or $|b|^2 = 1 - |d|^2$ donc en remplaçant dans l'expression précédente et en isolant a, on trouve $a = \overline{d}$. De plus, comme $a\overline{b} = -c\overline{d}$, on obtient $c = -\overline{b}$.
Donc en prenant, $\alpha = a$ et $\beta = c$, on obtient bien la forme voulue.

Ce résultat nous permet d'introduire l'application suivante (qui est donc bien définie) :

$$\begin{cases} \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to S_{\mathbb{C}^2}(0,1) \cong S_{\mathbb{R}^4}(0,1) \\ A \mapsto (\alpha, \beta) \end{cases}.$$

Cette application est bien un homéomorphisme donc : $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \cong S_{\mathbb{R}^4}(0,1)$ qui est 1-connexe. Donc $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ est 1-connexe.

On conclut cette section par quelques notions autour des morphismes entre deux groupes de Lie matriciels. Commençons par quelques définitions.

Définition II.5

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels.

- *On dit que $\varphi : G \to H$ est un* ***morphisme de groupes de Lie*** *si φ est un morphisme de groupes continu.*
- *De plus, si φ est bijective et φ^{-1} est continue alors φ est appelé* ***isomorphisme de groupes de Lie*** *entre G et H*
- *On dit que G et H sont* ***isomorphes*** *et on note $G \cong H$ s'il existe un isomorphisme de groupes de Lie entre G et H.*

On rappelle la propriété suivante, bien connue dans la théorie des groupes, qu'on retrouve dans notre contexte :

Proposition II.6

Soient $G \subset \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C}), H \subset \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C})$ deux groupes de Lie. Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. Alors $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont des sous-groupes de H et G respectivement.

Un point cependant à noter, c'est que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est effectivement un groupe de Lie matriciel : il est fermé dans $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$ car φ est continue mais ce n'est pas forcément le cas pour $\mathrm{Im}(\varphi)$.
En effet on considère le groupe de Lie matriciel $(\mathbb{R}, +)$ muni de l'addition : c'est bien un groupe de Lie matriciel puisqu'il est isomorphe au groupe des matrices réelles de taille 1 inversibles de déterminant strictement positif par l'application : $x \to e^x$.
Considérons alors a un nombre irrationnel et l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{ixa} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Notons $H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{ita} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Im}(\varphi)$. Montrons que :

$$\overline{H_0} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \ \theta, \varphi \in \mathbb{R} \right\} := \mathbb{U}_2.$$

Tout d'abord, comme $H_0 \subset \mathbb{U}_2$ et que $\mathbb{U}_2$ est fermé, on en déduit que $\overline{H_0} \subset \mathbb{U}_2$.
Pour le sens réciproque, rappelons d'abord que $2\pi a\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, sinon comme c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, il existerait $b > 0$ tel que $2\pi a\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$. Et alors, il existerait $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $2\pi a = bk_1$ et $2\pi = bk_2$. En divisant la première relation par la deuxième, on obtient alors : $a = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. On en déduit alors que $\{e^{2i\pi na}, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$.
Considérons $M = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \in \mathbb{U}_2$, comme $e^{i(\varphi - \theta a)} \in \mathbb{U}$, il existe $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $(e^{2i\pi k_n a})$

converge vers $e^{i(\varphi-\theta a)}$. Ainsi la suite $(M_n) \in (H_0)^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : M_n = \begin{pmatrix} e^{i(\theta+2\pi k_n)} & 0 \\ 0 & e^{i(\theta+2\pi k_n)a} \end{pmatrix},$$

converge vers M. D'où l'inclusion réciproque.
Ainsi $\mathrm{Im}(\varphi) = H_0$ n'est pas fermé dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et n'est donc pas un groupe de Lie matriciel.

II.2 Autour des algèbres de Lie

Commençons par donner une définition d'une algèbre de Lie

Définition II.7

*Une **algèbre de Lie** est un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbf{K}$ ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *noté* $\mathfrak{g}$ *muni d'une application appelée **crochet** :* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $[\cdot,\cdot]$ *est bilinéaire antisymétrique,*
- $\forall (X,Y,Z) \in \mathfrak{g}^3 : [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ *(identité de Jacobi)*

La propriété suivante va permettre de montrer facilement que certains ensembles connus sont des algèbres de Lie.

Proposition II.8: Un exemple important d'algèbre de Lie

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative et soit $\mathfrak{g}$ un sous-espace de $\mathcal{A}$ tel que pour tout $X, Y \in \mathcal{A} : XY - YX \in \mathcal{A}$. Alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie munie du crochet : $[X,Y] = XY - YX$.

Démonstration : La bilinéarité et l'antisymétrie du crochet sont évidents. Il reste à montrer l'identité de Jacobi. Soient $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} &[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\ &= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y + Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\ &= X(YZ) - X(ZY) - (YZ)X + (ZY)X + Y(ZX) - Y(XZ) \\ &\quad - (ZX)Y + (XZ)Y + Z(XY) - Z(YX) - (XY)Z + (YX)Z \\ &= 0 \text{ , par associativité de } \mathcal{A}. \end{aligned}$$

□

Remarquons alors que si $\mathcal{A}$ est une algèbre associative et commutative alors le crochet est constant égal à 0. On appellera ce crochet, *crochet trivial.*

Exemples : On peut alors donner quelques exemples d'algèbre de Lie :

- $M_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie munie du crochet $[X,Y] = XY - YX$.
- On note $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de trace nulle.
  Pour tout $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$: $\mathrm{tr}(XY - YX) = \mathrm{tr}(XY) - \mathrm{tr}(YX) = 0$. Donc, en particulier si $X, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, alors $XY - YX \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Donc par la proposition précédente, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie munie du crochet $[X,Y] = XY - YX$.

— On peut trouver des algèbres de Lie dont le crochet n'est pas de cette forme. Par exemple, $\mathbb{R}^3$ muni de $[x, y] = x \wedge y$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$, est une algèbre de Lie. Seule l'identité de Jacobi n'est pas évidente. Par bilinéarité du produit vectoriel, il suffit de prouver l'identité de Jacobi pour $X, Y, Z \in \{e_1, e_2, e_3\}$ où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce qui se fait après quelques calculs.

On dit que deux éléments $X, Y \in \mathfrak{g}$ commutent si $[X, Y] = 0$ et que $\mathfrak{g}$ est abélien si tous ses éléments commutent deux à deux. On peut considérer aussi la somme directe de deux algèbres de Lie.

Définition II.9

*Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux algèbres de Lie. La **somme directe** de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$, notée $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, est l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ muni du crochet $[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]),\ \forall (X_1, Y_1) \in \mathfrak{g}_1^2, (X_2, Y_2) \in \mathfrak{g}_2^2$.*

On vérifie qu'on définit bien ici une algèbre de Lie.

On définit des morphismes d'algèbre de Lie comme pour les groupes de Lie matriciels :

Définition II.10

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie.

- *Une application linéaire $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est une **morphisme** d'algèbre de Lie si $\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$.*
- *De plus, si Φ est bijective alors Φ est appelée : **isomorphisme d'algèbres de Lie**.*
- *De plus, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ alors Φ est appelée : **automorphisme d'algèbre de Lie**.*

On peut donner des sous-structures aux algèbres de Lie comme on le fait pour les groupes en général.

Définition II.11

- *Une **sous-algèbre de Lie** d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$ pour tout $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$.*
- *Une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un **idéal** de $\mathfrak{g}$ si $[X, H] \in \mathfrak{h}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $H \in \mathfrak{h}$.*
- *Le **centre** d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est défini par : $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$.*

Exemples : Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie.

— Il est clair que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

— $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En effet, soient $X \in \mathfrak{g}$ et $H \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ alors $[X, Y] = 0$ par définition du centre d'une algèbre de Lie. Or $0 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ par bilinéarité du crochet. Donc $[X, H] \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

— Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbre de Lie. Alors $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En effet, soient $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Comme ϕ est un morphisme d'algèbres de Lie : $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = 0$ car $Y \in \mathrm{Ker}(\phi)$ et par bilinéarité du crochet.

Avant d'introduire quelques types d'algèbres de Lie, nous aurons besoin d'autres définitions :

Définition II.12

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ deux idéaux de $\mathfrak{g}$.

- *On définit $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ l'ensemble des éléments Z de $\mathfrak{g}$ de la forme $Z = c_1[X_1, Y_1] + \ldots + c_m[X_m, Y_m]$ où $c_i \in \mathbf{K},\ X_i \in \mathfrak{g}_1, Y_i \in \mathfrak{g}_2$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.*
- *On appelle **idéal dérivé** de $\mathfrak{g}$ l'ensemble $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

On remarque bien que l'idéal dérivé est bien un idéal, en effet, si $X, Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ alors $[X, Y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ par définition de l'idéal dérivé.

On définit alors deux suites :

Définition II.13

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

- *On appelle **suite centrale** de $\mathfrak{g}$, la suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, notée $\mathfrak{g}^0, \ldots, \mathfrak{g}^n, \ldots$ définie par $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, et pour $n \geqslant 1$, $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}]$,*
- *On appelle **suite dérivée** de $\mathfrak{g}$, la suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, notée $\mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_n, \ldots$ définie par $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, et pour $n \geqslant 1$, $\mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}_{n-1}, \mathfrak{g}_{n-1}]$.*

On définit alors deux autres types d'algèbres de Lie.

Définition II.14

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

- *On dit que $\mathfrak{g}$ est **nilpotent** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}^n = 0$.*
- *On dit que $\mathfrak{g}$ est **résoluble** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}_n = 0$.*

Exemples :

- Considérons $\mathfrak{h} \subset M_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes.
  On note $X = E_{1,2}, Y = E_{1,3}, Z = E_{2,3}$ et on remarque (X, Y, Z) est une base de $\mathfrak{h}$. Un calcul montre que : $XY - YX = Z, XZ - ZX = YZ - ZY = 0$. Donc, d'après la proposition *II.8*, $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie munie du crochet $[\cdot, \cdot]$ égal au commutateur. De plus $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathrm{Vect}(Z)$, donc nécessairement $\mathfrak{h}^2 = 0$. Donc $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie nilpotente.
- Considérons $\mathfrak{g} \subset M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à valeurs complexes.
  Un calcul montre que :
  $$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  où $h = ae + bf - bd - ce$ et où $[X, Y] = XY - YX$. Ainsi $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $M_2(\mathbb{C})$. De plus, ce calcul montre que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est abélien et donc que $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$. Ainsi $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Proposition II.15

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. La suite $(\mathfrak{g}^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et pour tout $j \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{g}^j$ est un idéal de $\mathfrak{g}$

Démonstration : Soit $j \in \mathbb{N}$. On remarque qu'un élément de $\mathfrak{g}^j$ est engendré par les commutant d'ordre j : $[X_1, [X_2, [\ldots, [X_j, X_{j+1}] \ldots]]]$ où $X_1, X_{j+1} \in \mathfrak{g}$. Or, un commutant d'ordre j est aussi un commutant d'ordre $j-1$, en effet, on peut écrire le commutant précédent sous la forme $[X_1, [X_2, [\ldots, [X_{j-1}, \tilde{X}_j] \ldots]]]$ où $\tilde{X}_j = [X_j, X_{j+1}] \in \mathfrak{g}$. On en déduit alors que $\mathfrak{g}^{j+1} \subset \mathfrak{g}^j$. Et alors, si $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^j, [X, Y] \in \mathfrak{g}^{j+1}$ par définition, donc $[X, Y] \in \mathfrak{g}^j$ ce qui prouve que $\mathfrak{g}^j$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. $\square$

Proposition II.16

Une algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

Démonstration : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. Montrer qu'elle est résoluble, il suffit de montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}^j$. On va le faire par récurrence sur j. Si $j = 0$, alors $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0$. Supposons le résultat vrai pour un entier $j \geqslant 1$ fixé. Soit $Z \in \mathfrak{g}_{j+1}$. Par définition, il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k$ des élements de $\mathfrak{g}_j$ et $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{K}$ tels que :

$$Z = \sum_{i=1}^{k} c_i [X_i, Y_i].$$

Or pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $X_i \in \mathfrak{g}$ et $Y_i \in \mathfrak{g}_{j-1} \subset \mathfrak{g}^{j-1}$ par hypothèse de récurrence. Donc, par définition de $\mathfrak{g}^j$, $Z \in \mathfrak{g}^j$. D'où le résultat par récurrence. $\square$

La réciproque est fausse. En effet, on peut considérer $\mathfrak{g} \subset M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à valeurs complexes. On a vu précédemment que $\mathfrak{g}$ est résoluble.
Pourtant $\mathfrak{g}$ n'est pas nilpotent. En effet considérons les éléments suivants de $\mathfrak{g}$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \; X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $[H, X] = 2X$ et donc $[H, [H, [H, \ldots [H, X] \ldots]]]$ est un multiple de X, et n'est donc jamais égal à 0. Ainsi pour tout $j \in \mathbb{N}, \mathfrak{g}^j \neq \{0\}$, donc $\mathfrak{g}$ n'est pas nilpotent.

III Du groupe de Lie vers l'algèbre de Lie

III.1 Exponentielle matricielle

L'objectif de cette sous-partie est d'établir une définition du logarithme matriciel et quelques propriétés de cette application. Grâce à ses liens avec l'application exponentielle matricielle, on pourra en déduire d'importantes propriétés non triviales de l'exponentielle matricielle.

III.1.1 Rappels sur l'exponentielle matricielle et le logarithme complexe

Définition III.1

Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, on appelle ***exponentielle matricielle*** *notée e^M ou $\exp(M)$, la quantité (bien définie)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Rappelons sans démonstration quelques propriétés connues de l'exponentielle.

Proposition III.2

— L'application exp est continue.

— Si $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ commutent alors $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$.

— Soit $X \in M_n(\mathbb{C}), t \mapsto e^{tX}$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tX}) = Xe^{tX} = e^{tX}X$, en particulier : $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tX}\Big|_{t=0} = X$.

— Pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$: $\exp(\mathrm{tr}(X)) = \det(\exp(X))$.

Rappelons ensuite la définition du logarithme complexe.

Proposition III.3

La série de terme général $(-1)^{k+1}\dfrac{(z-1)^k}{k}$ est convergente pour $z \in \mathcal{B}(1,1)$, ainsi l'application

$$z \in \mathcal{B}(1,1) \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(z-1)^k}{k} \text{ est définie et analytique sur } \mathcal{B}(1,1).$$

On appelle cette application *logarithme*. La définition et l'analycité de cette application proviennent d'une intégration terme à terme de la série entière associée à $\frac{1}{z-1}$.

On présente ici deux résultats qui nous seront utiles pour définir le logarithme matriciel et voir ses interactions avec l'exponentielle matricielle.

Proposition III.4

— Pour tout $z \in \mathcal{B}(1,1)$: $e^{\log(z)} = z$,

— Pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < \log(2)$, $|e^u - 1| < 1$ et $\log(e^u) = u$.

Démonstration :

— Pour le premier point, il suffit de remarquer que $z \mapsto e^{\log(z)}$ et $z \mapsto z$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{B}(1,1)$ et qui coïncident sur $]0,2[$. Ainsi, elles sont égales sur $\mathcal{B}(1,1)$ par prolongement.

— Pour le second point, si $u \in \mathbb{C}$ vérifie $|u| < \log(2)$ alors par inégalité triangulaire :

$$|e^u - 1| \leqslant |u| + \frac{|u|^2}{2} + \ldots = e^{|u|} - 1 < 1.$$

Ainsi $\log(e^u)$ a un sens pour tout $u \in \mathbb{C}$ vérifiant $|u| < \log(2)$. L'égalité ci-dessus s'obtient encore par prolongement car les deux fonctions auxquelles on s'intéresse coïncident sur $]-\log(2), \log(2)[$.

□

III.1.2 Définitions et premières propriétés du logarithme matriciel

Définition III.5

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit $\log(A)$ par $\log(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(A-I)^k}{k!}$ dès que cette série converge.

Proposition III.6

L'application $\log(\cdot)$ est définie et continue sur $\mathcal{B}(I,1)$.

Démonstration : Montrer la définition et la continuité du logarithme se fait de la même manière que pour l'exponentielle. On montre que la série de terme général converge normalement (donc uniformément) sur toute boule fermée de $\mathcal{B}(I,1)$ (cela revient à majorer par le terme général d'une série associé à un logarithme réel). Puis, on utilise le théorème de continuité des séries de fonctions. □

On rappelle ici un résultat d'algèbre linéaire qui nous sera utile pour la preuve suivante.

Lemme III.7

Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$. Alors $\|X\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\langle u_i \mid X u_j \rangle|^2$, et alors pour toute valeur propre λ de X, $|\lambda| \leqslant \|X\|$.

Proposition III.8

— Pour tout $A \in \mathcal{B}(I,1)$, $\exp(\log(A)) = A$

— Pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\|X\| < \log(2)$, $\|\exp(X) - I\| < 1$ et $\log(\exp(X)) = X$.

Démonstration :

— Soit $A \in \mathcal{B}(I,1)$. Supposons que A soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec des valeurs propres égales à $z_1, \ldots, z_n$. Alors comme A et I commutent, elles sont codiagonalisables et donc il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

tel que $(A-I)^m = CDC^{-1}$ où $D = diag((z_1-1)^m, \ldots, (z_n-1)^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Or par hypothèse $\|A-I\| < 1$ donc par le lemme, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}|z_j - 1| < 1$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(A-I)^k}{k} = C \begin{pmatrix} log(z_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & log(z_n) \end{pmatrix} C^{-1}$$

Et donc d'après la proposition III.4 :

$$\exp(\log(A)) = C \begin{pmatrix} e^{log(z_1)} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{log(z_n)} \end{pmatrix} C^{-1} = A$$

Maintenant, si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, on opère par densité en approchant A par une suite (A_k) de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et on utilise la continuité des fonctions exp et log.

— Comme dans le cas complexe, l'inégalité triangulaire montre que si $\|X\| < \log(2)$ alors $\|\exp(X) - I\| < 1$. La structure du reste de la démonstration est la même que pour le point précédent.

$\square$

III.1.3 Formule du produit de Lie

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer la formule du produit de Lie, mais avant cela nous allons avoir besoin de démontrer un lemme.

Lemme III.9

Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $B \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\|B\| \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\|\log(I+B) - B\| \leqslant C\|B\|^2.$$

Démonstration : La majoration est élémentaire, en effet, il suffit d'écrire :

$$\log(I+B) - B = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{B^k}{k} = B^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{B^{k-2}}{k}.$$

Et donc :

$$\|\log(I+B) - B\| \leq \|B\|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{k-2}}{k}.$$

$\square$

On peut maintenant s'intéresser à la formule du produit de Lie :

Théorème III.10: Formules du produit de Lie

Soient $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\exp(X+Y) = \lim_{m\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right)^m.$$

$$\exp([X,Y]) = \lim_{m\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right) \exp\left(\frac{-X}{m}\right) \exp\left(\frac{-Y}{m}\right)\right)^{m^2}.$$

Démonstration : Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. Prouvons d'abord le premier point. Lorsque l'on multiplie les séries associées à $\exp\left(\frac{X}{m}\right)$ et $\exp\left(\frac{Y}{m}\right)$, seuls trois termes ne font pas intervenir des puissances de $\frac{1}{m}$ supérieures ou égales à 2. Donc :

$$\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right) = I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \mathcal{O}(\frac{1}{m^2}).$$

Alors pour m assez grand $\log\left(\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right)$ existe, et par le lemme précédent :

$$\log\left(\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right) = \log\left(I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \mathcal{O}(\frac{1}{m^2})\right) = \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + \mathcal{O}(\frac{1}{m^2}).$$

Donc en passant à l'exponentielle :

$$\left(\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right)^m = \exp\left(X + Y + \mathcal{O}(\frac{1}{m})\right).$$

Et par continuité de l'exponentielle :

$$\exp(X+Y) = \lim_{m\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right)^m.$$

La preuve du second point est identique en partant du développement :

$$\exp\left(\frac{X}{m}\right) \exp\left(\frac{Y}{m}\right) \exp\left(\frac{-X}{m}\right) \exp\left(\frac{-Y}{m}\right) = I + \frac{[X,Y]}{m^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{m^3}).$$

□

III.1.4 Sous-groupes à un paramètre

L'objectif de ce dernier paragraphe est d'expliquer ce que sont les sous-groupes à un paramètre et d'établir un théorème les reliant à l'exponentielle.

Définition III.11

Une application $A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est appelée ***sous-groupe à un paramètre*** *de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si :*

- *A est continue,*
- *$A(0) = I$,*
- *Pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2$: $A(t+s) = A(t)A(s)$.*

Commençons d'abord par un lemme :

Lemme III.12

Soit $\varepsilon \in]0, \log(2)[$. Notons U l'ensemble $\exp(\mathcal{B}_{M_n(\mathbb{C})}(0, \frac{\varepsilon}{2}))$. Tout élément B de U possède une unique racine carrée dans U notée $C = \exp(\frac{1}{2}\log(B))$.

Démonstration : Soit $B \in U$ et $C = \exp(\frac{1}{2}\log(B))$. Il est évident que C est une racine carrée de B et que $C \in U$. Il reste à prouver l'unicité d'une telle racine carrée.
Pour cela, soit $C' \in U$ tel que $(C')^2 = B$. Notons $Y = \log(C')$ qui est bien défini car $C' \in U \subset \mathcal{B}(I, 1)$. Alors, $\exp(2Y) = (C')^2 = B = \exp(\log(B))$.
Or, $Y \in \mathcal{B}(0, \frac{\varepsilon}{2})$ donc $2Y \in \mathcal{B}(0, \varepsilon)$ et aussi $\log(B) \in \mathcal{B}(0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathcal{B}(0, \varepsilon)$. Enfin, comme $\varepsilon < \log(2)$, en passant la dernière égalité au logarithme, on obtient : $2Y = \log(B)$. Donc $C' = \exp(\frac{1}{2}\log(B)) = C$. D'où l'unicité. $\square$

On en vient au théorème important de ce paragraphe :

Théorème III.13: Écriture exponentielle d'un sous-groupe à un paramètre

Soit $A(.)$ un sous-groupe à un paramètre, alors il existe une unique matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A(t) = e^{tX}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration : L'unicité est immédiate car si un tel X existe alors nécessairement $X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\Big|_{t=0}$.
Il reste à montrer l'existence.
Soit U comme dans le lemme précédent. La continuité de A garantit qu'il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in]-t_0, t_0[:\ A(t) \in U$. On pose alors $X = \frac{1}{t_0}\log(A(t_0))$.
On obtient alors $t_0 X = \log(A(t_0)) \in \mathcal{B}(0, \frac{\varepsilon}{2})$ et $\exp(t_0 X) = A(t_0)$. Or, $A(\frac{t_0}{2}) \in U$ et $A(\frac{t_0}{2})^2 = A(t_0)$ donc par le lemme précédent : $A(\frac{t_0}{2}) = \exp(\frac{t_0 X}{2})$ par unicité de la racine carrée.
Nous avons le résultat cherché en un seul point et on cherche à le généraliser pour tout réel t. Pour cela, on se rend compte que l'on peut généraliser ce dernier résultat aux nombres dyadiques. En effet, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A\Big(\frac{t_0}{2^k}\Big) = \exp\Big(\frac{t_0 X}{2^k}\Big).$$

Et donc pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$A\Big(\frac{mt_0}{2^k}\Big) = A\Big(\frac{t_0}{2^k}\Big)^m = \exp\Big(\frac{mt_0 X}{2^k}\Big).$$

Or l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$. Donc par continuité des applications : $t \mapsto \exp(tX)$ et $t \mapsto A(t)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} : A(t) = \exp(tX).$$

$\square$

III.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Nous avons traité séparément les notions de groupe de Lie matriciel et d'algèbre de Lie. L'exponentielle matricielle, permet dans le cas de notre étude, de construire une algèbre de Lie relative à un groupe de Lie matriciel.

Définition III.14

Soit G un groupe de Lie matriciel. ***L'algèbre de Lie de*** G*, notée* $\mathfrak{g}$ *est :*

$$\mathfrak{g} = \Big\{ X \in M_n(\mathbb{C}) |\ \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G \Big\}.$$

On notera toujours l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie en lettres gothiques ou $\mathrm{Lie}(G)$.

Exemples : On peut chercher à déterminer les algèbres de Lie de quelques groupes de Lie matriciels :

— *Groupes linéaires :* On voit facilement que l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est égale à $M_n(\mathbb{C})$. De même l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est égale à $M_n(\mathbb{R})$.

— *Groupe spécial linéaire :* Une méthode générale pour déterminer l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel donné est de procéder par analyse-synthèse. Par exemple, essayons de chercher l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Soit $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\exp(tX) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ donc $\det(\exp(tX)) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\mathrm{tr}(tX) = 0$ car $\exp(\mathrm{tr}(M)) = \det(\exp(M))$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$. Donc $\mathrm{tr}(X) = 0$. On vérifie réciproquement que toutes les matrices de traces nulles sont dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Ainsi

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

On retrouve bien alors un des exemples d'algèbres de Lie au sens général.

— *Groupes unitaires :* De même, on peut déterminer les algèbres de Lie de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}, \quad \mathfrak{su}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^* = -X \text{ et } \mathrm{tr}(X) = 0\} = \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}).$$

— *Groupes orthogonaux :* Et pareil avec les groupes orthogonaux :

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X \text{ et } \mathrm{tr}(X) = 0\} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

De manière équivalente un élément X est dans l'algèbre de Lie relative à G si et seulement si le sous-groupe à un paramètre engendré par X est inclus dans G. Il n'y a pas de conflits de notations autour $\mathfrak{g}$ grâce à la proposition suivante :

Proposition III.15

Soit G un groupe de Lie matriciel d'algèbre de Lie notée $\mathfrak{g}$. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ alors :

— $\forall A \in G : AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$,

— $\forall s \in \mathbb{R} : sX + Y \in \mathfrak{g}$,

— $XY - YX \in \mathfrak{g}$,

Ainsi l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel est bien une algèbre de Lie munie du crochet $[X, Y] = XY - YX$.

Démonstration : Soient $X, Y \in g$.

— Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A \in G$, $\exp(tAXA^{-1}) = A\exp(tX)A^{-1} \in G$ car $X \in \mathfrak{g}$ et puisque G est un groupe. Donc $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$.

— Soient $s, t \in R$. $\exp(t(sX)) = \exp((ts)X) \in G$ car $X \in \mathfrak{g}$. Donc $sX \in \mathfrak{g}$.
De plus, d'après la formule du produit de Lie, $\exp(t(X+Y)) = \lim_{m\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{tX}{m}\right)\exp\left(\frac{tY}{m}\right)\right)^m$.
Or, d'après le début de ce point :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \frac{tX}{m}, \frac{tY}{m} \in G,\ \text{donc : } \forall m \in \mathbb{N}^* \left(\exp\left(\frac{tX}{m}\right)\exp\left(\frac{tY}{m}\right)\right)^m \in G.$$

Enfin, comme G est fermé, la limite d'éléments de G appartient à G et donc $\exp(t(X+Y)) \in G$.

— Remarquons que $XY - YX = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tX}Ye^{-tX})\Big|_{t=0}$. Or par le premier point : $e^{tX}Ye^{-tX} \in \mathfrak{g}$ car $Y \in \mathfrak{g}$. Or le point précédent nous dit que $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel de dimension finie (car inclus dans $M_n(\mathbb{C})$). Donc il est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$. Donc $XY - YX = \lim_{h\to 0}\frac{e^{hX}Ye^{-hY} - Y}{h} \in \mathfrak{g}$.

— Montrons enfin que les propriétés que l'on vient de démontrer permettent de nous dire que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel est une algèbre de Lie munie du crochet $[X, Y] = XY - YX$. Cette application est bien à valeurs dans $\mathfrak{g}$ d'après le 3ème point. De plus, elle est clairement bilinéaire et antisymétrique. Il reste à prouver l'identité de Jacobi mais cela à déjà été fait lors de la démonstration de la proposition II.8.

□

Avant d'aborder le point central de cette section, remarquons la propriété suivante :

Proposition III.16

Soit G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si G est abélien alors $\mathfrak{g}$ est aussi abélien.

On verra plus tard que la réciproque est vraie en ajoutant l'hypothèse que G soit connexe par arcs.
Démonstration : La preuve de ce point provient essentiellement de l'astuce suivante. Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$[X, Y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{tX}e^{sY}e^{-tX}\right)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0}.$$

Si G est abélien alors pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$: $e^{tX}e^{sY}e^{-tX} = e^{sY}$ et donc la dérivée en $t = 0$ sera nulle car ce que l'on dérive ne dépend pas de t. □

Le point central de cette section est le théorème suivant permettant de relier les morphismes de groupe de Lie matriciel avec ceux de son algèbre de Lie.

Théorème III.17: Morphisme d'algèbre associé à un morphisme de groupe de Lie

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupe de Lie. Alors il existe une unique application $\mathbb{R}$-linéaire $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi(e^X) = e^{\phi(X)}$.
De plus, ϕ possède les propriétés suivantes :

- $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall A \in G, \phi(AXA^{-1}) = \varphi(A)\phi(X)\varphi(A)^{-1}$,
- $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$,
- $\forall X \in \mathfrak{g}, \phi(X) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\varphi(e^{tX})\big)\Big|_{t=0}$.

Démonstration : φ est un morphisme de groupes continu, donc $t \mapsto \varphi(e^{tX})$ est un sous-groupe à un paramètre de H pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Donc par la caractérisation des sous-goupes à un paramètre, il existe une unique matrice Z telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\varphi(e^{tX}) = e^{tZ}$. On pose $\phi : X \mapsto Z$.
Par unicité d'une telle matrice Z, cette application est bien définie. De plus, en prenant $t = 1$, on a pour tout $X \in \mathfrak{g}$: $\varphi(e^X) = e^{\phi(X)}$. Vérifions que ϕ est bien $\mathbb{R}$-linéaire.
Soit $s \in \mathbb{R}, \varphi(e^{tsX}) = e^{ts\phi(X)}$. Donc $e^{t\phi(sX)} = e^{ts\phi(X)}$. Ainsi, en dérivant par rapport à t puis en évaluant en $t = 0$ cette dernière expression : $\phi(sX) = s\phi(X)$.
Et d'après la formule du produit de Lie et par continuité de φ :

$$e^{t\phi(X+Y)} = \varphi(e^{t(X+Y)}) = \varphi\left(\lim_{m\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right)^m\right).$$

Donc par continuité de φ :

$$e^{t\phi(X+Y)} = \lim_{m\to+\infty}\left(\varphi\Big(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\Big)\varphi\Big(\exp\left(\frac{Y}{m}\right)\Big)\right)^m.$$

Et d'après la formule du produit de Lie, cette dernière quantité est égale à :

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{\phi(X)}{m}\right)\exp\left(\frac{\phi(X)}{m}\right)\right)^m = \exp\left(t(\phi(X)+\phi(Y))\right).$$

Ainsi, en dérivant par rapport à t et en évaluant en $t = 0$, on obtient : $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$.
De plus cette application est unique car s'il en existait une autre, disons ϕ' vérifiant les mêmes propriétés, on aurait pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $X \in \mathfrak{g}$: $e^{t\phi(X)} = e^{t\phi'(X)}$ et donc $\phi{=}\phi'$.
Il reste à démontrer les propriétés vérifiées par ϕ :

- Soient $A \in G, X \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{t\phi(AXA^{-1})} = e^{\phi(tAXA^{-1})} = \varphi\big(e^{tAXA^{-1}}\big) = \varphi(A)\varphi(e^{tX})\varphi(A^{-1}) = \varphi(A)e^{t\phi(X)}\varphi(A)^{-1}.$$

  Donc $\phi(AXA^{-1}) = \varphi(A)\phi(X)\varphi(A)^{-1}$ en dérivant par rapport à t et en évaluant en $t = 0$.
- Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. Comme l'opérateur dérivée commute avec une application linéaire :

$$\phi([X,Y]) = \phi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{tX}Ye^{-tX}\big)\Big|_{t=0}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\big(e^{tX}Ye^{-tX}\big)\Big|_{t=0}$$

Donc d'après le point précédent :

$$\phi([X,Y]) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi(e^{tX})\phi(Y)\varphi(e^{-tX})\right)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)}\right)\Big|_{t=0} = [\phi(X),\phi(Y)].$$

— Enfin le dernier point est facile à voir une fois que l'on a remarqué que $\varphi(e^{tX}) = e^{t\phi(X)}$.

$\square$

Finissons cette section avec deux autres propriétés.

Proposition III.18

Soient G, H, K des groupes de Lie matriciels et $\varphi : H \to K, \gamma : G \to H$ des morphismes de groupes de Lie. On note $\lambda = \varphi \circ \gamma$. On note ϕ, Γ, Δ leurs morphismes d'algèbres de Lie associés respectifs. On a alors : $\Delta = \phi \circ \Gamma$.

Démonstration : Soit $X \in G$. $\lambda(e^{tX}) = \varphi(\gamma(e^{tX})) = \varphi(e^{t\Gamma(X)}) = e^{t\phi(\Gamma(X))}$. D'où le résultat par unicité du morphisme d'algèbre associé. $\square$

Proposition III.19

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie et $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ son morphisme d'algèbres associé. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe fermé normal dans G et son algèbre de Lie est $\mathrm{Ker}(\phi)$.

Démonstration : On sait que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe normal dans G. De plus, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé car φ est continue.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors : $\varphi(e^{tX}) = e^{t\phi(X)} = I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc X est un élément de l'algèbre de Lie associée à $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Réciproquement, si pout tout $t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors $e^{t\phi(X)} = \varphi(e^{tX}) = I$. Donc en évaluant cette équation en $t = 0$ après avoir dérivé par rapport à t, on obtient $X \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Donc l'algèbre de Lie associée à $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est $\mathrm{Ker}(\phi)$. $\square$

III.3 Théorème de Cartan Von-Neumann et applications

Dans cette partie, nous allons démontrer le théorème de Cartan Von-Neumann qui nous permet de munir tout groupe de Lie matriciel d'une structure de sous-variété. Nous allons aussi nous intéresser à certaines propriétés puissantes que l'on peut déduire de ce théorème.

III.3.1 Démonstration du théorème de Cartan Von-Neumann

Commençons par donner la définition d'un groupe de Lie au sens général :

Définition III.20

*Un **groupe de Lie** G est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension k quelconque, et, telle qu'il existe deux opérations $G \times G \to G$ et $G \to G$ (la multiplication et l'inversion) de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui munissent G d'une structure de sous-groupe de $M_n(\mathbb{C})$.*

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème de Cartan Von-Neumann qui va permettre de montrer qu'un groupe de Lie matriciel est effectivement un groupe de Lie. Avant de commencer sa démonstration nous aurons besoin d'une dernière définition.

Définition III.21

Soit G un groupe de Lie matriciel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application ***exponentielle associée à*** *G est définie comme la restriction de l'application exponentielle matricielle à $\mathfrak{g}$.*

Remarquons que cette application n'est pas forcément surjective. En effet, aucune matrice $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ vérifie $e^X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: A$.
En effet, soit $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Si X à deux valeurs propres distinctes alors X est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donc e^X aussi, ce qui n'est pas le cas de A. Sinon, X possède $\lambda \in \mathbb{C}$ comme unique valeur propre. Comme $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \operatorname{tr}(X) = 0$ et donc $\lambda = 0$. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre 0. On a $e^X v = e^0 v = v$. Donc e^X a 1 comme valeur propre, ce qui n'est pas le cas

Théorème III.22: Théorème de Cartan Von-Neumann

Soit G un groupe de Lie matriciel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et notons k sa dimension comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors G est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension k de $M_n(\mathbb{C})$. Ainsi, un groupe de Lie matriciel est un groupe de Lie.

Démonstration : [Bernis & Bernis, 2017] [Hall, 2016]
Dans cette démonstration, on considère $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Pour montrer que G est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit (d'après I.8) de trouver pour tout $A \in G$, un sous-espace vectoriel F_A de $M_n(\mathbb{C})$, un voisinage ouvert U_A de 0 dans $M_n(\mathbb{C})$, un voisinage ouvert V_A de A dans $M_n(\mathbb{C})$ et un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi_A : U_A \to V_A$ qui vérifie $\varphi_A(U_A \cap F_A) = G \cap V_A$ et $\varphi_A(0) = A$.
Notons tout d'abord que l'on peut se ramener au cas où $A = I$. En effet, supposons le résultat vrai pour I. Soit $A \in G$, posons l'application de translation suivante : $t_A : H \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AH$. Cette application est bien un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et vérifie $t_A(G) = G$ car G est un groupe. Alors $t_A \circ \varphi_I : U_I \to t_A(V_I)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme vérifiant :

$$t_A \circ \varphi_I(0) = A \text{ et } t_A \circ \varphi_I(U_I \cap F_I) = t_A(G \cap V_I) = t_A(G) \cap t_A(V_I) = G \cap t_A(V_I).$$

Pour construire le $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme qui va convenir, introduisons $\mathfrak{f}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M_n(\mathbb{C})$. On pourra désormais identifier un élément de $M_n(\mathbb{C})$ à la somme de deux éléments de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{f}$. Définissons :

$$\varphi : \begin{cases} \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{f} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ L + F \longmapsto e^L e^F \end{cases}$$

Remarquons tout d'abord que $\varphi(0) = I$. De plus, φ est différentiable en 0 et $\mathrm{d}\varphi(0) = \mathrm{Id}$. Enfin, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme produit de composées d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_n(\mathbb{C})$. Donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe U un voisinage ouvert de 0 tel que $\varphi : U \to \varphi(U)$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Or, par définition de $\mathfrak{g}$: $\varphi(g \cap U) \subset G \cap \varphi(U)$.

Supposons par l'absurde que pour tout voisinage W de 0 inclus dans U, il existe un élément A de $G \cap \varphi(W)$ vérifiant : $A \in \varphi(W) \cap G$ et $A \notin \varphi(\mathfrak{g} \cap W)$. Notons pour $m \in \mathbb{N}^*, U_m = \mathcal{B}(0, 1/m)$. Alors, l'hypothèse précédente nous permet de construire une suite $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\varphi(U_m) \cap G$ vérifiant $A \notin \varphi(\mathfrak{g} \cap U_m)$.

On remarque tout d'abord que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/m < \log(2)$ et pour tout $A \in \varphi(U_m) \cap G$: $\log(A) \in \mathfrak{g}$ si et seulement si $A \in \varphi(g \cap U_m)$.
En effet, soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $1/m < \log(2)$ et $A \in \varphi(U_m) \cap G$. Supposons que $\log(A) \in \mathfrak{g}$, alors il existe un élément $g \in \mathfrak{g}$ tel que $A = e^g$ car $1/m < \log(2) < 1$, et donc $A \in \varphi(\mathfrak{g} \cap U_m)$. Réciproquement si $A \in \varphi(\mathfrak{g} \cap U_m)$ il existe $g \in \mathfrak{g} \cap U_m$ tel que $A = e^g$, donc comme $1/m < \log(2)$, $\log(A) = g \in \mathfrak{g}$. Désormais, quitte à extraire, on considérera $m > \frac{1}{\log(2)}$ pour pouvoir utiliser l'équivalence ci-dessus.

Maintenant, comme par construction (A_m) converge vers I, d'après le théorème d'inversion locale : pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $X_m \in \mathfrak{g}$ et $Y_m \in \mathfrak{f}$ tels que $A_m = e^{X_m} e^{Y_m}$ et où $\lim\limits_{m \to +\infty} X_m = \lim\limits_{m \to +\infty} Y_m = 0$. On sait aussi que $Y_m \neq 0$ sinon $\log(A_m) = X_m \in \mathfrak{g}$ ce qui est faux par hypothèse. Et comme e^{X_m} et A_m sont des éléments de G, $B_m := e^{-X_m} A_m = e^{Y_m} \in G$. Or, par compacité de la boule unité dans $\mathfrak{f}$, quitte à extraire $\left(\dfrac{Y_m}{\|Y_m\|} \right)$ converge vers un élément $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Montrons en fait que $Y \in \mathfrak{g}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $m \in \mathbb{N}, k_m = \left\lfloor \dfrac{t}{\|Y_m\|} \right\rfloor$. Ainsi $e^{k_m Y_m} = B_m^{k_m} \in G$ car G est un groupe. Or, G est fermé donc $e^{tY} \in G$ par continuité de l'exponentielle et car $k_m Y_m \underset{m \to +\infty}{\to} tY$. Donc $Y \in \mathfrak{g}$.

Or ceci est absurde car $\mathfrak{f}$ est le supplémentaire de $\mathfrak{g}$, donc nécessairement $Y = 0$ mais Y est de norme 1. Finalement, quitte à restreindre $U, \varphi : U \to \varphi(U)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme vérifiant $\varphi(0) = I$ et $\varphi(\mathfrak{g} \cap U) = G \cap \varphi(U)$, donc G est une sous-variété.
De plus, la dimension de G en tant que sous-variété est la même que celle de $\mathfrak{g}$, en effet : $\dim(t_A(\mathfrak{g})) = \dim(\mathfrak{g})$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$. Donc G est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension k.
Enfin, comme les applications $(A, B) \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AB$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto A^{-1}$ sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, leurs restrictions à G sont aussi de classe de $\mathcal{C}^\infty$. Conclusion : G est un groupe de Lie. $\square$

La structure différentielle de G permet de voir $\mathfrak{g}$ comme son espace tangent en l'identité.

Proposition III.23

Soit G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}$ est l'espace tangent de G en I.

Démonstration : Pour prouver que $\mathfrak{g}$ est l'espace tangent de G en I, il suffit de montrer que $X \in \mathfrak{g}$ si et seulement si, il existe $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, G)$ vérifiant $\gamma(0) = I$ et $\left.\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = X$. Le sens direct est facile : pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le chemin suivant $\gamma : t \mapsto e^{tX}$ vérifie les propriétés demandées.
Le sens réciproque est un peu plus délicat. Soit γ une courbe lisse à valeurs dans G telle que $\gamma(0) = I$ et $\left.\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = X$. Pour t suffisamment petit, $\log(\gamma(t))$ existe, on note cette quantité $\delta(t)$. Or sur un voisinage U suffisamment restreint autour de I, log est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Et alors $\delta : t \in U \mapsto \delta(t)$ est une courbe lisse à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Le théorème de dérivation des fonctions composées nous dit donc que :

$$\gamma'(0) = \delta'(0) e^{\delta(0)} = \delta'(0).$$

Comme δ est à valeurs dans $\mathfrak{g}$, $\delta'(0)$ est à valeurs dans $\mathfrak{g}$ comme limite d'éléments de $\mathfrak{g}$ (car $\mathfrak{g}$ est fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie). Alors $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$, d'où le résultat. $\square$

Exemple : Cette dernière proposition nous permet d'obtenir une deuxième méthode pour déterminer l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie donné. Faisons-le pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On va montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ grâce à la proposition I.9. On sait que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f)$ où

$$f : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ \quad M \longmapsto {}^tMM - I. \end{cases}.$$

Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f(M).H = {}^tMH + {}^t({}^tMH)$ pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$.
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tous $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{d}f(M).(\frac{1}{2}MS) = \frac{1}{2}({}^tS + S) = S.$$

Donc $\mathrm{d}f(M)$ est surjective pour tout $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété. De plus la proposition (I.9) nous dit que l'espace tangent en l'identité est $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(I)) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. La proposition précédente nous dit alors que c'est l'algèbre de Lie de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

III.3.2 Conséquences du théorème de Cartan Von-Neumann

Tout d'abord, le théorème de Cartan Von-Neumann nous permet d'affirmer que les notions de connexité et de connexité par arcs sont équivalentes.

Proposition III.24

Un groupe de Lie matriciel G est connexe par arcs si et seulement si il est connexe (au sens de la définition usuelle).

Démonstration : Le théorème de Cartan Von-Neumann nous dit que chaque point de G possède un voisinage homéomorphe à une boule dans $\mathbb{R}^n$, qui est connexe par arcs. Or d'après la proposition I.5, pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ connexe, si X est localement connexe par arcs alors X est connexe par arcs. Donc si G est connexe alors G est connexe par arcs, la réciproque est évidente. □

La plupart des autres conséquences directes de ce théorème vont se prouver grâce à un énoncé plus faible, que l'on a montré dans la démonstration du théorème de Cartan Von-Neumann.

Proposition III.25

Soit G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On note pour tout $r > 0$: $V_r = \exp\big(B(0,r)\big)$. Il existe $\varepsilon \in]0,\ \log(2)[$ tel que pour tout $A \in V_\varepsilon$, $A \in G$ si et seulement si $\log(A) \in \mathfrak{g}$.

Commençons d'abord par un lemme technique qui nous sera utile pour ensuite.

Lemme III.26

Soit $A : [a,b] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une application continue. Alors pour tous $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s,t \in [a,b]$ vérifiant $|s-t| < \delta$: $\|A(s)A(t)^{-1} - I\| < \varepsilon$.

Démonstration : La preuve découle essentiellement du théorème de Heine : toute fonction continue sur un compact est uniformément continue, et, du théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. □

Proposition III.27

Soit G un groupe de Lie matriciel connexe, tout élément $A \in G$ s'écrit $A = e^{X_1} \dots e^{X_m}$ où $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration : Soit V_ε tel que dans la proposition III.25. Pour tout $A \in G$ on considère un chemin continu $t \mapsto A(t)$ qui vérifie $A(0) = I$, $A(1) = A$ car G est connexe donc connexe par arcs. Donc par le lemme :
Il existe $\delta > 0$ tel que $|s - t| < \delta$ alors $A(s)A(t)^{-1} \in V_\varepsilon$. Maintenant soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{m} < \delta$.
Alors pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$A\Big(\frac{j-1}{m}\Big)^{-1} A\Big(\frac{j}{m}\Big) \in V_\varepsilon.$$

Donc pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe $X_j \in \mathfrak{g}$ tel que

$$A\Big(\frac{j-1}{m}\Big)^{-1} A\Big(\frac{j}{m}\Big) = e^{X_j}.$$

Donc :

$$A = A(0)^{-1}A(1) = A(0)^{-1}A\Big(\frac{1}{m}\Big)A\Big(\frac{1}{m}\Big)^{-1} \dots A\Big(\frac{m-1}{m}\Big)^{-1} A(1) = e^{X_1} \dots e^{X_m}.$$

$\square$

Cette propriété nous sera extrêmement utile par la suite, la connexité d'un groupe de Lie permet de se ramener à l'étude des e^X pour $X \in \mathfrak{g}$. En particulier, elle est utile pour comparer les propriétés d'un morphisme de groupe de groupe Lie avec son morphisme d'algèbre associé.

Proposition III.28

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels, on note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie associées. On suppose de plus que G est connexe. Soient $\varphi_1, \varphi_2 : G \to H$ deux morphismes de groupes de Lie et Φ_1, Φ_2 leurs morphismes d'algèbres associés. Si $\Phi_1 = \Phi_2$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

Démonstration : C'est une conséquence directe de la propriété précédente. Soit $g \in G$, d'après la proposition précédente, comme G est connexe par arcs il existe $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ tels que $g = e^{X_1} \dots e^{X_m}$.
Alors :

$$\varphi_1(g) = e^{\Phi_1(X_1)} \dots e^{\Phi_1(X_m)} = e^{\Phi_2(X_1)} \dots e^{\Phi_2(X_m)} = \varphi_2(g).$$

$\square$

Proposition III.29

Soient G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Il existe un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage V de I dans G tel que l'exponentielle soit un homéomorphisme de U dans V.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ tel que la proposition III.25 s'applique. On pose $U = U_\varepsilon \cap \mathfrak{g}$ et $V = V_\varepsilon \cap G$. Cette proposition nous dit que $\exp(U) = V$. De plus, exp est un homéomorphisme car il possède un inverse continu : le logarithme matriciel restreint à V. $\square$

On obtient alors la proposition suivante remarquable.

Proposition III.30

Tout morphisme de groupe de Lie est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration : Soient G, G' deux groupes de Lie, $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes de Lie et ϕ son morphisme d'algèbres de Lie associé. Soit $g \in G$. D'après la proposition précédente, il existe un voisinage V_g de g dans G tel que pour tout $h \in V_g$, il existe $X_h \in \mathfrak{g}$ tel que $h = ge^{X_h}$. Notons que l'application qui à $h \in V_g$ associe X_h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $X_h = \ln(hg^{-1})$. Alors $\varphi(h) = \varphi(g)e^{\phi(X_h)}$. Ainsi, sur un voisinage de tout point de G, on trouve une expression de φ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (par composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on rappelle que ϕ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ car c'est une application linéaire en dimension finie). Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Une autre conséquence du théorème de Cartan Von-Neumann est sur l'étude de la composante neutre G_0 d'un groupe de Lie matriciel G.

Proposition III.31

Soit G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, alors G_0 est un groupe de Lie matriciel. De plus son algèbre de Lie est égale à $\mathfrak{g}$.

Démonstration : Montrons tout d'abord que G_0 est fermé par caractérisation séquentielle. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_0 qui converge vers un élément $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'abord, comme G est fermé et que $G_0 \subset G$, $A \in G$. De plus comme G est un groupe, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $A_m A^{-1} \in G$ et de plus, $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m A^{-1} = I$. Donc par la proposition III.29, pour m suffisamment grand, il existe $X_m \in \mathfrak{g}$ tel que $A_m A^{-1} = e^{X_m}$. Donc $A = e^{-X_m}A_m$ pour m suffisamment grand ce que l'on supposera pour la suite de la preuve.
Or comme $A_m \in G_0$, il existe un chemin reliant I à A_m dans G. De plus, on peut relier A_m à $e^{-X_m}A_m = A$ par le chemin $t \mapsto e^{-tX_m}A_m$. En concaténant ces deux chemins, on peut relier I et A dans G. Donc $A \in G_0$.
Comme $G_0 \subset G$, $\mathrm{Lie}(G_0) \subset \mathfrak{g}$. Soit $X \in \mathfrak{g}$, alors $e^{tX} \in G$ pour tout réel t. Mais comme tout point $e^{t_0X}, t_0 > 0$ peut être relié à I dans G par le chemin $s \in [0,1] \mapsto e^{st_0X}$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G_0$. Donc $X \in \mathrm{Lie}(G_0)$. $\square$

Exemple : Cette proposition nous permet facilement de calculer l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$, en effet, on a vu précédemment que ces ensembles étaient les composantes neutres des groupes de Lie respectifs $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. Donc la proposition ci-dessus nous dit que $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$.

Enfin, voici une dernière proposition dont la preuve est obtenue grâce à l'écriture sous forme de produit d'exponentielles d'un élément d'un groupe de Lie matriciel connexe par arcs.

Proposition III.32

Soient G un groupe de Lie matriciel connexe par arcs et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie associé. $\mathfrak{g}$ est abélien si et seulement si G est abélien.

Cette proposition est en soit une réciproque de la proposition III.16 dans le cas où le groupe de Lie G est connexe. Cependant, cette proposition est fausse sans l'hypothèse de connexité. En effet, considérons

$G = \mathbb{C}^* \times \mathfrak{S}_3$. G est bien un groupe de Lie, en effet dans G il y a $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_3) = 6$ copies de $\mathbb{C}^*$: $\mathbb{C}^* \times \{\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}_3}\}$, $\mathbb{C}^* \times \{(12)\}$, $\mathbb{C}^* \times \{(23)\}$, $\mathbb{C}^* \times \{(13)\}$, $\mathbb{C}^* \times \{(123)\}$, $\mathbb{C}^* \times \{(132)\}$. De plus, G n'est pas abélien car $\mathfrak{S}_3$ ne l'est pas. Pourtant, $G_0 = \mathbb{C}^*$ et d'après la proposition III.31, l'algèbre de Lie de G_0 est égale à l'algèbre de Lie de G. Donc G est un groupe de Lie non abélien dont l'algèbre de Lie est celle de $\mathbb{C}^* \times \{\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}_3}\}$ qui est abélienne.

IV De l'algèbre de Lie vers le groupe de Lie

Dans les précédentes parties, nous avons trouvé plusieurs propriétés (par exemple III.17) qui sont obtenues sur l'algèbre de Lie en émettant des hypothèses sur le groupe de Lie. L'objectif de cette partie est d'aller dans l'autre sens : en ayant des informations sur l'algèbre de Lie, trouver des informations sur l'algèbre de Lie dont elle est associée. Pour cela, nous allons d'abord devoir nous intéresser à une formule qui nous sera utile pour démontrer nos résultats : la formule de Baker-Campbell-Haussdorf.

IV.1 La formule de Baker-Campbell-Haussdorf

IV.1.1 Application adjointe sur un groupe de Lie matriciel et sur une algèbre de Lie

La formule de Baker-Campbell-Haussdorf fait intervenir ce que l'on appelle l'application adjointe d'une algèbre de Lie. L'objectif de cette partie est de l'introduire et d'étudier ces propriétés.

Définition IV.1

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $X \in \mathfrak{g}$, on définit les applications suivantes :

$$\mathrm{ad}_X : \begin{cases} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y \longmapsto [X, Y] \end{cases} \qquad \mathrm{ad} : \begin{cases} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \\ X \longmapsto \mathrm{ad}_X \end{cases}$$

On appelle ad, l'application adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Sans rentrer dans une analyse plus approfondie, cette application permet déjà de grandement simplifier les écritures. En effet, au lieu d'écrire pour $X, Y \in \mathfrak{g}$: $[X, [X, [X, [X, Y]]]]$, on écrira $(\mathrm{ad}_X)^4(Y)$. On définit aussi une autre application adjointe pour les groupes de Lie matriciels.

Définition IV.2

Soient G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie associée. Pour $A \in G$, on définit les applications suivantes :

$$\mathrm{Ad}_A : \begin{cases} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ X \longmapsto AXA^{-1} \end{cases} \qquad \mathrm{Ad} : \begin{cases} G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \\ A \longmapsto \mathrm{Ad}_A \end{cases}$$

Notons que ces applications sont bien définies. Tout d'abord, pour $A \in G$, Ad_A est bien définie car pour tout $X \in \mathfrak{g}, AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ d'après la proposition III.15. De plus Ad_A est bien une application linéaire inversible, d'inverse $\mathrm{Ad}_{A^{-1}}$. Voici d'abord quelques propriétés élémentaires sur ces applications :

Proposition IV.3

Soit G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie associée.

— Pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$: $\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$,

— Pour tout $A \in G$ et pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$: $\mathrm{Ad}_A([X, Y]) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)]$,

— L'application Ad est continue.

Démonstration :

— Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. Soit $Z \in \mathfrak{g}$,

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(Z)) - \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(Z)) = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]].$$

Donc par l'identité de Jacobi :

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = [[X, Y], Z] = \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z).$$

Donc $\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$.

— Soient $A \in G, X, Y \in \mathfrak{g}$. Un calcul donne :

$$[\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)] = AXYA^{-1} - AYXA^{-1} = A(XY - YX)A^{-1} = \mathrm{Ad}_A([X, Y]).$$

— Pour ce dernier point, un calcul donne que :

$$\mathrm{Ad}_{A+H}(M) = \mathrm{Ad}_A(M) + HMA^{-1} - AMA^{-1}HA^{-1} + o(\|H\|)$$

pour $A, H, M \in \mathfrak{g}$. Ainsi Ad est continue.

□

Enfin, ces deux applications sont liés de cette manière :

Proposition IV.4

Soient G un groupe de Lie matriciel et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie associée. Pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$e^{\mathrm{ad}_X}(Y) = \mathrm{Ad}_{(e^X)}(Y), \qquad \text{où } e^{\mathrm{ad}_X}(Y) \text{ désigne } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{ad}_X)^k(Y)}{k!}.$$

Démonstration : D'après la proposition III.17, il existe une unique application linéaire $f : X \in \mathfrak{g} \mapsto f(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ telle que $e^{f(X)}(Y) = \mathrm{Ad}_{(e^X)}(Y)$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$. Il reste à montrer que pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$: $f(X)(Y) = [X, Y]$.
Encore par la proposition III.17 pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$f(X)(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}_{(e^{tX})}(Y)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tX}Ye^{-tX}\Big|_{t=0} = XY - YX = [X, Y].$$

□

On remarque ensuite la proposition suivante :

Proposition IV.5

Soient $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$:

$$e^X Y e^{-X} = \mathrm{Ad}_{(e^X)}(Y) = e^{\mathrm{ad}_X}(Y).$$

Démonstration : La deuxième égalité est juste la proposition précédente dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la première est simplement la définition de l'application adjointe dans G. □

Au passage, nous obtenons la proposition suivante qui permet de relier les sous-groupes normaux d'un groupe de Lie aux idéaux de son algèbre de Lie associée.

Proposition IV.6

Soient G, H deux groupes de Lie matriciels tels que $H \subset G$ et $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie associées.

— Si H est normal dans G alors $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

— Supposons que G et H soient de plus connexes par arcs. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ alors H est normal dans G.

Démonstration :

— Soient $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{h}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, quitte à considérer $-X$, on peut supposer $t \geqslant 0$, la formule du produit de Lie donne :

$$\exp([\sqrt{t}X, \sqrt{t}Y]) = \lim_{m \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{\sqrt{t}X}{m}\right) \exp\left(\frac{\sqrt{t}Y}{m}\right) \exp\left(\frac{-\sqrt{t}X}{m}\right) \exp\left(\frac{-\sqrt{t}Y}{m}\right) \right)^{m^2}.$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\exp(\frac{\sqrt{t}X}{m}) \in G$ et $\exp(\frac{\sqrt{t}Y}{m}) \in H$, donc, comme H est normal dans G :

$$\exp\left(\frac{\sqrt{t}X}{m}\right) \exp\left(\frac{\sqrt{t}Y}{m}\right) \exp\left(\frac{-\sqrt{t}X}{m}\right) \in H.$$

Ainsi, comme H est un groupe :

$$\left(\exp\left(\frac{\sqrt{t}X}{m}\right) \exp\left(\frac{\sqrt{t}Y}{m}\right) \exp\left(\frac{-\sqrt{t}X}{m}\right) \exp\left(\frac{-\sqrt{t}Y}{m}\right) \right)^{m^2} \in H.$$

Donc par fermeture de H : $\exp([\sqrt{t}X, \sqrt{t}Y]) = \exp(t[X, Y]) \in H$. Donc $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

— Nous allons opérer en deux temps. Soient d'abord, $Y \in \mathfrak{h}$ et $g \in G$. Comme G est connexe, il existe $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{g}$ tels que $g = e^{X_1} \ldots e^{X_m}$. Alors, on a :

$$gYg^{-1} = e^{X_1} \ldots e^{X_{m-1}} (e^{X_m} Y e^{-X_m}) e^{-X_{m-1}} \ldots e^{-X_1}.$$

Par récurrence, pour montrer que $gYg^{-1} \in \mathfrak{h}$, il suffit de montrer que $e^{X_m} Y e^{-X_m} \in \mathfrak{h}$. Or, $e^{X_m} Y e^{-X_m} = e^{\mathrm{ad}_{X_m}}(Y) \in \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Donc $gYg^{-1} \in \mathfrak{h}$
Dans un second temps, on considère $h \in H$ et $g \in G$. Comme H est connexe, il existe $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{h}$ tels que $h = e^{Y_1} \ldots e^{Y_k}$. Ainsi :

$$ghg^{-1} = ge^{Y_1} \ldots e^{Y_k} g^{-1} = (ge^{Y_1}g^{-1}) \ldots (ge^{Y_k}g^{-1}) = e^{gY_1g^{-1}} \ldots e^{gY_kg^{-1}}.$$

Par conséquent, d'après le point précédent, ghg^{-1} s'écrit comme le produit d'exponentielles d'éléments de $\mathfrak{h}$, donc $ghg^{-1} \in H$. Ainsi H est normal dans G.

$\square$

IV.1.2 Un résultat sur la dérivation de l'exponentielle matricielle

Avant d'établir la formule de Baker-Campbell-Haussdorf, nous aurons besoin d'un résultat préliminaire. Ce résultat s'obtient à partir du lemme suivant.

Lemme IV.7

Soit Z un opérateur linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie V. Alors :

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{-\frac{Z}{m}}\right)^k = \frac{1-e^{-Z}}{Z}.$$

Démonstration : Voyons d'abord si ce que l'on écrit à un sens.

$$\frac{1-e^{-z}}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^k}{(k+1)!},$$

qui est une série entière dont le rayon de convergence est infini, donc on peut bien poser pour un opérateur linéaire quelconque $\frac{1-e^{-Z}}{Z}$ comme étant cette série entière appliquée en l'opérateur Z. Or, comme V est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, il existe $d\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}(V,V)$ soit isomorphe à $\mathbf{K}^{d^2}$. Et alors on peut voir Z comme un élément de $\mathbf{K}^{d^2}$. De plus, le théorème sur les sommes de Riemann nous dit que :

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{-\frac{Z}{m}}\right)^k = \int_0^1 e^{-tZ}\,\mathrm{d}t.$$

Or pour $z\in\mathbb{C}$:

$$\int_0^1 e^{-tz}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-z}}{z}.$$

Donc comme l'intégrale d'un vecteur de $\mathbf{K}^{d^2}$ est le vecteur des intégrales de ses composantes, on obtient :

$$\int_0^1 e^{-tZ}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-Z}}{Z}.$$

D'où le résultat. □

Proposition IV.8

— Soient $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{X+tY})\Big|_{t=0} = e^X\left(\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}\right)(Y).$$

— Plus généralement, si $t\mapsto X(t)$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{X(t)} = e^{X(t)}\left(\frac{I-e^{-\mathrm{ad}_{X(t)}}}{\mathrm{ad}_{X(t)}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)\right).$$

Démonstration : Pour tous $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\Delta(X,Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{X+tY})\Big|_{t=0}$. Prouvons d'abord le premier point. Comme exp est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $M_n(\mathbb{C})$, $X\mapsto\Delta(X,Y)$ est continue et $Y\mapsto\Delta(X,Y)$ est linéaire continue. Soit $t\in\mathbb{R}$, pour tout $m\geqslant 1$, on écrit : $e^{X+ty} = \left(e^{\frac{X}{m}+t\frac{Y}{m}}\right)^m$. Donc, lorsque l'on va dériver cette fonction, par dérivée du produit de m fonctions, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{X+tY})\Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{\frac{X}{m}}\right)^{m-k-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\frac{X}{m}+t\frac{Y}{m}})\Big|_{t=0}\right) \left(e^{\frac{X}{m}}\right)^{k}.$$

Donc avec les propriétés des opérateurs adjoints.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{X+tY})\Big|_{t=0} = e^{\frac{m-1}{m}X} \sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{-kX}{m}} \Delta\Big(\frac{X}{m},\frac{Y}{m}\Big) e^{\frac{kX}{m}} = e^{\frac{m-1}{m}X} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Ad}_{\left(e^{-\frac{-kX}{m}}\right)} \Big(\Delta\Big(\frac{X}{m},\frac{Y}{m}\Big)\Big).$$

Alors par linéarité de Δ par rapport à la seconde variable et de l'application ad :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{X+tY})\Big|_{t=0} &= e^{\frac{m-1}{m}X} \sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\mathrm{ad}_{\left(\frac{-kX}{m}\right)}\right)\Big(\Delta\Big(\frac{X}{m},\frac{Y}{m}\Big)\Big),\\ &= e^{\frac{m-1}{m}X} \times \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \exp\Big(-\frac{\mathrm{ad}_X}{m}\Big)^k \Big(\Delta\Big(\frac{X}{m},Y\Big)\Big).\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{\frac{(m-1)X}{m}} = e^X$, et par continuité de Δ par rapport à sa première variable :

$$\lim_{m\to+\infty} \Delta\Big(\frac{X}{m},Y\Big) = \Delta(0,Y) = Y.$$

Donc en appliquant le lemme précédent avec $Z = \mathrm{ad}_X$, on obtient bien le résultat voulu.

Le deuxième point provient en fait du précédent. En effet, par théorème de différentiation des fonctions composées

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{X+tY}) = \mathrm{d}\exp(X+tY)\cdot Y.$$

Donc le premier point de cette démonstration donne que pour tout $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{d}\exp(X).Y = e^X \left(\frac{I - e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}\right)(Y).$$

Or, encore par le théorème de différentiation des fonctions composées :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{X(t)} = \mathrm{d}\exp(X(t))\cdot X'(t).$$

Le résultat voulu découle alors directement du premier point. □

IV.1.3 Démonstration de la formule de Baker-Campbell-Haussdorf

Définition IV.9

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout opérateur A sur V tel que $A \in B_V(Id,1)$, on définit $g(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(A - Id_V)^m$ où a_m désigne le m-ième coefficient de la série entière associée à la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{\log(z)}{1-\frac{1}{z}}$.

On remarque que comme $z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{\log(z)}{1-\frac{1}{z}}$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{B}(1,1)$, $g(A)$ est bien défini pour tout opérateur A sur V. Une fois toutes ces définitions faites, nous pouvons nous intéresser à la formule de Baker-Campbell-Haussdorf.

Théorème IV.10

Soient $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. Pour $\|X\|, \|Y\|$ suffisamment petits, on a :

$$\log\left(e^X e^Y\right) = X + \int_0^1 g\Big(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\Big)(Y)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration : L'hypothèse "$\|X\|, \|Y\|$ suffisamment petits" est à prendre au sens où ils sont suffisamment petits pour que $g\Big(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\Big)$ et $\log\left(e^X e^Y\right)$ soient bien définis. Ils seront aussi suffisamment petits pour que l'on considère que log et exp sont des bijections réciproques l'une de l'autre dans le contexte où nous les appliquerons. Dans cette démonstration, on notera Id l'application identité $M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto M \in M_n(\mathbb{C})$.
Pour $t \in [0,1]$, on pose $Z(t) = \log\Big(e^X e^{tY}\Big)$. Le but de la démonstration est de trouver $Z(1)$ sous la forme d'une intégrale, pour cela on cherche une une expression de la dérivée de Z, par exemple grâce la dérivée de l'exponentielle matricielle que l'on a déterminé au paragraphe précédent. Or $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{Z(t)} = e^{Z(t)} Y$.
Et Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc le théorème de dérivation de l'exponentielle nous dit que :

$$e^{-Z(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{Z(t)} = \left(\frac{I - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}\right)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z(t)\Big).$$

Donc de ces deux relations, on obtient :

$$Y = \left(\frac{Id - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}\right)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z(t)\Big).$$

Or si $\|X\|$ et $\|Y\|$ sont assez petits, $\|Z(t)\|$ le sera aussi et alors $\frac{I - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}$ sera assez proche de l'identité donc sera inversible par ouverture de $\mathrm{GL}(M_n(\mathbb{C}))$. Ainsi, on a :

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z(t)\Big) = \left(\frac{Id - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}\right)^{-1}(Y).$$

Il ne nous reste plus qu'a trouver une expression plus simple de $\dfrac{Id - e^{-\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{\mathrm{ad}_{Z(t)}}$. Pour cela on remarque que, comme $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$ et que Ad est un morphisme sur $M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\mathrm{Ad}_{e^{Z(t)}} = \mathrm{Ad}_{e^X} \mathrm{Ad}_{e^{tY}}.$$

Donc en passant à l'opérateur adjoint sur les algèbres de Lie, on obtient :

$$\mathrm{ad}_{Z(t)} = \log\left(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\right).$$

Donc :

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z(t)\Big) = \left(\frac{Id - \left(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\right)^{-1}}{\log\left(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\right)}\right)^{-1}(Y).$$

Or pour tout $z \in \mathcal{B}(1,1)$, on a : $g(z) = \left(\frac{1-z^{-1}}{\log(z)}\right)^{-1}$. Donc :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z(t)\right) = g\left(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\right)(Y).$$

Comme $Z(0) = X$, une intégration de cette dernière expression entre 0 et 1 donne la formule de Baker-Campbell-Haussdorf :

$$\log\left(e^X e^Y\right) = X + \int_0^1 g\left(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\right)(Y)\,\mathrm{d}t.$$

□

IV.2 Morphisme de groupe de Lie associé à un morphisme d'algèbre de Lie

On a vu précédemment que si $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupe de Lie, il existe une unique application $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g} : \varphi\left(e^X\right) = e^{\phi(X)}$.

On peut légitimement se demander si, réciproquement, pour un morphisme d'algèbre de Lie fixé $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, il existe un morphisme $\varphi : G \to H$ de groupe de Lie vérifiant :

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \varphi\left(e^X\right) = e^{\phi(X)}. \tag{IV.1}$$

La réponse est non dans le cas général. En effet, considérons $G = \mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ et $H = \mathbb{R}$. Leurs algèbres de Lie associées sont respectivement $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ et $\mathfrak{h} = \mathbb{R}$ que l'on munit du crochet trivial. On considère le morphisme d'algèbre de Lie $\phi : ix \in i\mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un morphisme de groupe de Lie $\varphi : U(1) \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $ix \in i\mathbb{R} : \varphi\left(e^{ix}\right) = e^{\phi(ix)}$. Comme $U(1)$ est compact et que φ est continue, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-groupe borné de $(\mathbb{R}, +)$. Donc nécessairement $\mathrm{Im}(\phi) = \{0\}$ (par linéarité de ϕ). Nécessairement ϕ est l'application nulle et ne peut pas vérifier la relation *IV*.1.

L'objectif de cette sous-partie est d'établir cette réciproque dans le cas où G est 1-connexe (ce qui n'est pas le cas de $U_1(\mathbb{C})$).

IV.2.1 Morphismes locaux

Définition IV.11

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels, **un morphisme local** *de G et H est une paire (U, f) où U est un voisinage connexe par arcs de l'identité dans G et $f : U \to H$ est une application continue telle que pour tous $A, B \in U$ tels que $AB \in U$: $f(AB) = f(A)f(B)$.*

Finalement, un morphisme local est la définition la plus proche que l'on peut donner d'un morphisme sur U car U n'est pas un sous-groupe. La proposition suivante permet de construire un morphisme local à partir d'un morphisme d'algèbre de Lie.

Proposition IV.12

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbre de Lie. On pose pour tout $\varepsilon > 0, U_\varepsilon \subset G$ par :

$$U_\varepsilon = \{A \in G | A \in \overline{\mathcal{B}}(I,1) \text{ et } \|\log(A)\| < \varepsilon\}.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f : \begin{cases} U_\varepsilon \longrightarrow H \\ A \longmapsto e^{\phi(\log(A))} \end{cases}$ soit un morphisme local.

Démonstration : On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que :

- la proposition III.25 s'applique.
- Pour tout $A, B \in U_\varepsilon$, la formule de Baker-Campbell-Haussdorf s'applique à (X, Y) où $X := \log(A)$ et $Y := \log(B)$ ainsi qu'à $(\phi(X), \phi(Y))$.

Soient $A, B \in U_\varepsilon$: $f(AB) = e^{\phi(\log(e^x e^y))}$. Donc d'après la formule de Baker-Campbell-Haussdorf :

$$\phi\Big(\log\left(e^X e^Y\right)\Big) = \phi\Big(X + \int_0^1 g\Big(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\Big)(Y)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Or comme ϕ est un morphisme de d'algèbre de Lie, ϕ est linéaire et continue (et car g s'écrit sous la forme d'une série entière), donc on obtient :

$$\phi\Big(\log\left(e^X e^Y\right)\Big) = \phi(X) + \int_0^1 g\Big(e^{\mathrm{ad}_{\phi(X)}} e^{t\mathrm{ad}_{\phi(Y)}}\Big)(\phi(Y))\,\mathrm{d}t = \log\left(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)}\right).$$

□

IV.2.2 D'un morphisme local à un morphisme global

Le théorème suivant, est en soit un résultat intéressant, mais il va aussi nous permettre d'atteindre le but de notre partie : connaissant un morphisme d'algèbre de Lie, construire un morphisme de groupe de Lie associé. Il cache en partie la majorité du travail à devoir faire pour montrer les résultats qu'on présentera en dessous.

Théorème IV.13

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels, où G est 1-connexe. Si (U, f) est un morphisme local de G dans H, alors il existe un unique morphisme (global) de groupe de Lie, $\varphi : G \to H$ tel que φ coïncide avec f sur U.

Démonstration : La démonstration de ce résultat est très longue, elle se fait en 4 étapes, nous ne rédigerons pas certains détails de cette démonstration, on renvoie alors à [Hall, 2016].

Étape 1 : Définition de φ sur un chemin.

Comme G est 1-connexe, en particulier G est connexe par arcs donc pour tout $A \in G$ il existe un chemin $t \mapsto A(t) \in G$ tel que $A(0) = I$ et $A(1) = A$.

On dit qu'une partition de $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ de $[0,1]$ est *bonne* si pour tous $s, t \in [0,1]$ tels que s, t soient dans la même subdivision alors $A(t)A(s)^{-1} \in U$. Le lemme III.26 nous garantit l'existence de

bonnes partitions.
Soit $t_0, \dots, t_m$ une bonne partition. Alors, en particulier comme $t_0 = 0$ et $A(0) = I$, alors $A(t_1) \in U$ et, on peut écrire A sous la forme :

$$A = \Big(A(1)A(t_{m-1})^{-1}\Big)\Big(A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}\Big)\dots\Big(A(t_2)A(t_1)^{-1}\Big)A(t_1).$$

Comme φ est censé être un morphisme et est aussi censé coïncider avec f sur U, il est raisonnable de poser $\varphi(A)$ sous la forme :

$$\varphi(A) = f\Big(A(1)A(t_{m-1})^{-1}\Big)f\Big(A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}\Big)\dots f\Big(A(t_2)A(t_1)^{-1}\Big)f\big(A(t_1)\big).$$

Cependant, on voit que cette expression de φ dépend à priori du chemin $A(t)$ et de la bonne partition que l'on a choisie. L'objectif des deux prochaines étapes est de montrer que cette expression est indépendante du chemin et de la partition choisis.

Etape 2 : Indépendance vis-à-vis de la bonne partition.
Soit $t_0, \dots, t_m$ une bonne partition. On peut s'intéresser d'abord à ce qu'il se passe lorsque l'on rajoute un point s à cette partition, disons entre t_j et t_{j+1}. Tout d'abord, cette nouvelle partition sera toujours bonne. De plus, le travail effectué lors de la première étape nous dit que les expressions de $\varphi(A)$ selon la partition choisie sont identiques à un facteur près : le facteur $f\Big(A(t_{j+1})A(t_j)^{-1}\Big)$ pour la partition originale est remplacé par $f\Big(A(t_{j+1})A(s)^{-1}\Big)f\Big(A(s)A(t_j)^{-1}\Big)$. Or comme la nouvelle partition est bonne, on a : $A(t_{j+1})A(s)^{-1}$, $A(s)A(t_j)^{-1}$, $A(t_{j+1})A(t_j)^{-1} \in U$. Donc comme f est un morphisme local :

$$f\Big(A(t_{j+1})A(t_j)^{-1}\Big) = f\Big(A(t_{j+1})A(s)^{-1}\Big)f\Big(A(s)A(t_j)^{-1}\Big).$$

Donc la valeur de $\varphi(A)$ reste inchangée par l'addition d'un autre point dans la partition. Par récurrence, on voit que la valeur de $\varphi(A)$ reste inchangée en ajoutant un nombre fini de points à la partition.
Dans le cas général, on considère deux bonnes partitions. Ces deux partitions possèdent un raffinement (une partition qui possède au moins les points de partition de la précédente) commun. C'est la partition dont les points de partitions est l'union des points de partitions des deux partitions. Or pour passer d'une des deux partitions à leur union, il suffit d'ajouter un nombre fini de points. Ce qui a été fait précédemment nous dit alors que la valeur de $\varphi(A)$ est la même pour ces deux partitions.

Etape 3 : Indépendance vis-à-vis du chemin
Soient $t \mapsto A_0(t)$ et $t \mapsto A_1(t)$ deux chemins joignant I à A dans G. Comme G est 1-connexe, les chemins A_0 et A_1 sont homotopes, c'est à dire, il existe $A : [0,1]^2 \to G$ telle que :

$$\begin{cases} A(0,t) = A_0(t), \quad A(1,t) = A_1(t), \quad \forall t \in [0,1], \\ A(s,0) = I, \quad A(s,1) = A, \quad \forall s \in [0,1]. \end{cases}$$

Le lemme III.26 nous dit qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que :

$$\forall (s,t), (s',t') \in [0,1]^2, \text{ tels que } |s - s'| < \frac{2}{N}, |t - t'| < \frac{2}{N} : A(s,t)A(s',t')^{-1} \in U.$$

L'idée pour montrer que la valeur de $\varphi(A)$ est indépendante du chemin suivi est d'opérer "étape par étape". On va déformer le chemin A_0 vers le chemin A_1 petit à petit et montrer qu'à chaque étape, la valeur de $\varphi(A)$ reste inchangée.

Définissons une suite $(B_{k,l})_{k\in\{0,\dots,N-1\},l\in\{0,\dots,N\}}$ vérifiant si $l \neq 0$

— Pour tout $t \in [0, \frac{l-1}{N}]$: $B_{k,l}(t) = A(\frac{k+1}{N}, t)$,

— Pour tout $t \in [\frac{l}{N}, 1]$: $B_{k,l}(t) = A(\frac{k}{N}, t)$,

— Pour tout $t \in [\frac{l-1}{N}, \frac{l}{N}]$: $B_{k,l}(t) = A(s,t)$ où $s = \frac{k-l}{N} - t$.

A posteriori : le choix de s dans le troisième point n'a ici pas trop d'importance, il doit juste garantir la continuité de A par rapport à la première variable. Enfin si $l = 0$, on pose : $B_{k,0}(t) = A(\frac{k}{N}, t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Une dernière remarque qui va nous simplifier l'étude : finalement, le seul paramètre qui dépend de t, l, k est la première variable de A. L'étude de $B_{k,l}(t)$ revient alors à l'étude de ce paramètre qu'on notera $s_{k,l}(t)$.

On va montrer que lorsque l'on fait varier k ou l de 1, la valeur de $\varphi(A)$ pour ce chemin reste inchangée. On va d'abord traiter le cas où l varie.

Soient $k \in \{0,\dots,N-1\}$ et $l \in \{0,\dots,N\}$. Le graphe ci-contre montre que $B_{k,l}(t)$ coïncide avec $B_{k,l+1}(t)$ sauf si $t \in]\frac{l-1}{N}, \frac{l+1}{N}[$. D'après l'étape précédente, nous pouvons choisir n'importe quelle bonne partition de $[0,1]$ pour calculer $\varphi(A)$. Pour ces deux chemins, on va choisir la même partition constituée des points $0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{l-1}{N}, \frac{l+1}{N}, \dots, 1$. Le choix de N nous permet de dire que c'est une bonne partition.

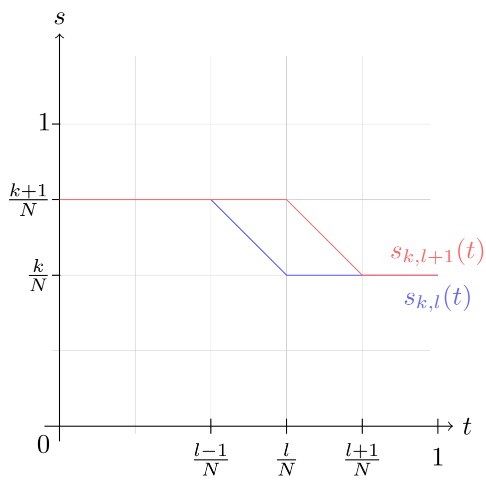

FIGURE 1 : Tracés de $s_{k,l}$ et $s_{k,l+1}$

Maintenant, on sait aussi que la valeur de $\varphi(A)$ ne dépend que des points de partitions. Or, le choix de la partition est de telle manière que $B_{k,l}$ et $B_{k,l+1}$ sont identiques en chaque point de partition, ainsi la valeur de $\varphi(A)$ est identique pour ces deux chemins.

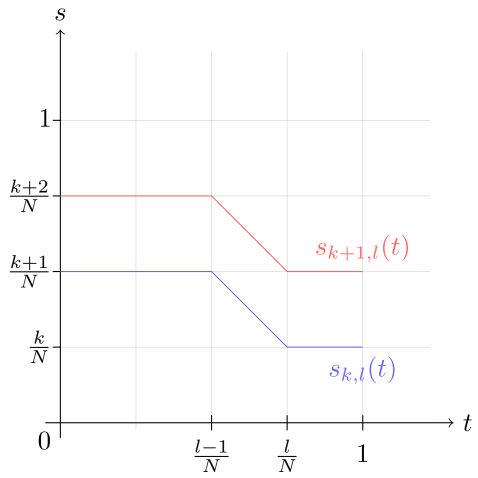

FIGURE 2 : Tracés de $s_{k+1,l}$ et $s_{k,l}$

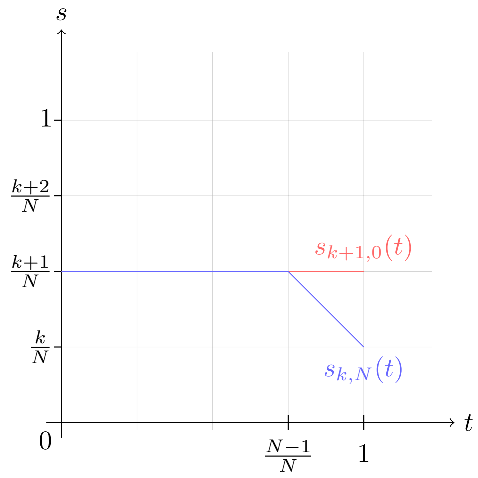

FIGURE 3 : Tracés de $s_{k+1,0}$ et $s_{k,N}$

Intéressons nous maintenant au cas où k varie. A priori il est difficile de montrer que la valeur de $\varphi(A)$ est inchangée entre $B_{k,l}$ et $B_{k+1,l}$ car ces deux fonctions ne prennent pas les mêmes valeurs sur $[0,1]$. Seulement, on sait par ce que l'on vient de faire précédemment, que la valeur de $\varphi(A)$ pour le chemin $B_{k,l}$ est identique à celle pour le chemin $B_{k,N}$ et que la valeur de $\varphi(A)$ pour le chemin $B_{k+1,l}$ est identique à celle pour le chemin $B_{k+1,0}$. Or $B_{k,N}$ et $B_{k+1,0}$ coïncident sur $[0, \frac{N-1}{N}]$. Donc en prenant la bonne partition $0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-2}{N}, 1$, on conclut de la même manière que la valeur de $\varphi(A)$ est identique pour les chemins $B_{k,N}$ et $B_{k+1,0}$, donc, pour les chemins $B_{k,l}$ et $B_{k+1,l}$.

Etape 4 : φ est un morphisme de groupe de Lie et coïncide avec f sur U
Une fois φ bien définie, il reste à vérifier ce que l'on veut d'elle : c'est-à-dire, que ce soit un morphisme de groupe de Lie entre G et H. Montrons d'abord que $\varphi : G \to H$ est un morphisme.

Soient $A, B \in G$, prenons un chemin $A(t)$ reliant I à A et un chemin B reliant I à B. Maintenant on définit un chemin $C(t)$ reliant I à AB par $C(t) : \begin{cases} B(2t), \ \forall t \in [0, \dfrac{1}{2}], \\ A(2t-1)B, \ \forall t \in [\dfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$
Soient $t_0, \dots, t_m$ une bonne partition pour $A(t)$ et $s_0, \dots, s_M$ une autre bonne partition pour $B(t)$. On montre que $\frac{s_0}{2}, \dots, \frac{s_M}{2}, \frac{1}{2} + \frac{t_0}{2}, \dots, \frac{1}{2} + \frac{t_m}{2}$ est une bonne partition pour $C(t)$ puis un simple calcul nous montre que $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$.

Pour montrer que φ coïncide avec f sur U, on choisit $A \in U$ et $A(t)$ un chemin reliant I à A dans U (car U est connexe par arcs par définition d'un morphisme local). Soit $t_1, \dots, t_m$ une bonne partition pour $A(t)$. On montre par récurrence que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$: $\varphi(A(t_j)) = f(A(t_j))$. Ainsi, appliquée en $j = m$, cette égalité donne $\varphi(A) = f(A)$. Donc φ coïncide avec f sur U. $\square$

IV.2.3 Conséquences

Voici le théorème phare de cette partie, c'est en quelque sorte une réciproque au théorème III.17 dans le cas où le groupe de Lie G est 1-connexe.

Théorème IV.14

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels, d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Notons $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbre de Lie. Si G est 1-connexe, il existe un unique morphisme de groupe de Lie matriciel $\varphi : G \to H$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{g} : \varphi(e^X) = e^{\phi(X)}$.

Démonstration : Montrons d'abord l'existence. Soit f le morphisme local fournit par la proposition IV.12 et son $\varepsilon > 0$ associé. Soit φ le morphisme global obtenu au théorème précédent.
Pour tout $X \in \mathfrak{g} : \exp\left(\frac{X}{m}\right) \in U_\varepsilon$ pour m suffisamment grand. Donc par définition de f :

$$\varphi\Big(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\Big) = f\Big(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\Big) = \exp\left(\phi\Big(\log\left(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\right)\Big)\right) = \exp\left(\frac{\phi(X)}{m}\right).$$

Donc comme φ est un morphisme :

$$\varphi(e^X) = \varphi\Big(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\Big)^m = e^{\phi(X)}.$$

D'où l'existence. Démontrons maintenant l'unicité. Supposons qu'il existe φ_1, φ_2 deux morphismes vérifiant les propriétés du théorème. Alors comme G est connexe, tout élément A de G peut s'écrire sous la forme de produit d'exponentielles d'élément de $\mathfrak{g}$. Donc comme les morphismes φ_1 et φ_2 sont égaux sur ces éléments, on en déduit qu'ils sont égaux sur G tout entier. $\square$

Voyons désormais deux conséquences de ce théorème :

Proposition IV.15

Soient G et H deux groupes de Lie matriciels 1-connexes. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leur algèbres de Lie respectives. Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont isomorphes alors G et H sont isomorphes.

Démonstration : Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un isomorphisme d'algèbre de Lie. D'après le théorème précédent, comme G est 1-connexe, il existe un unique morphisme de groupe de Lie $\varphi : G \to H$ tel que pour tout $X \in G : \varphi(e^X) = e^{\phi(X)}$.
De même, comme H est 1-connexe, $\Gamma = \phi^{-1}$ possède un unique morphisme de groupe de Lie γ associé tel que pour tout $Y \in H : \gamma(e^X) = e^{\Gamma(X)}$. Montrons alors que $\varphi = \gamma^{-1}$.
D'après la proposition III.18, le morphisme d'algèbre de Lie associé à $\varphi \circ \gamma$ est $\phi \circ \Gamma$ qui est l'identité. De même pour $\gamma \circ \varphi$. Donc d'après la proposition III.32, comme G est connexe $\varphi = \gamma^{-1}$ et donc G et H sont isomorphes. $\square$

Proposition IV.16

Soit G un groupe de Lie matriciel 1-connexe. On suppose que son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose en la somme directe de 2 sous-algèbres $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$. Alors il existe H_1, H_2 deux sous-groupes fermés de G 1-connexes, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ respectivement et telles que $G \cong H_1 \times H_2$.

Démonstration : Soit ϕ le morphisme d'algèbre de Lie suivant : $\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \longrightarrow \mathfrak{g} \\ \quad X + Y \longmapsto X \end{cases}$.
Comme G est 1-connexe, il existe un morphisme de groupes de Lie $\varphi : G \to G$ associé à ϕ. De plus d'après la proposition III.19, l'algèbre de Lie de son noyau est $\mathrm{Ker}(\phi)$ qui est égal à $\mathfrak{h}_2$. Notons H_2 la composante neutre de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Comme φ est continue, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé donc d'après la proposition III.31, H_2 est fermé dans G. Ainsi, H_2 est un sous-groupe de G fermé connexe, d'algèbre de Lie égale à $\mathfrak{h}_2$. De même, on construit H_1 : un sous-groupe de G fermé connexe, d'algèbre de Lie égale à $\mathfrak{h}_1$.
Montrons que H_1 est 1-connexe.
Soit $A(t)$ une boucle dans H_1. Comme G est 1-connexe, il existe une homotopie $A(s,t)$ réduisant $A(t)$ en un point de G. Or, la restriction de ϕ à $\mathfrak{h}_1$ est l'identité sur $\mathfrak{h}_1$, donc la restriction de φ à H_1 est l'identité sur H_1. On définit pour tous s,t dans $[0,1]$: $B(s,t) = \varphi(A(s,t))$. Déjà, pour tout $t \in [0,1]$: $B(0,t) = \varphi(A(t)) = A(t)$, de plus, B est bien une homotopie de $A(t)$ vers un point de H_1. Ainsi H_1 est 1-connexe et on fait de même avec H_2.
Enfin comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, les éléments de $\mathfrak{h}_1$ commutent avec les éléments de $\mathfrak{h}_2$. Ainsi les éléments de H_1 et H_2 commutent entre eux d'après la proposition III.32. Donc le morphisme suivant $\Gamma : \begin{cases} H_1 \times H_2 \longrightarrow G \\ \quad (A,B) \longmapsto AB \end{cases}$ est un morphisme de groupe de Lie. Or le morphisme d'algèbre associé γ est simplement l'isomorphisme entre $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ et $\mathfrak{g}$.
Or, comme G est 1-connexe, il existe un morphisme $\Delta : G \to H_1 \to H_2$ dont le morphisme d'algèbre de Lie est γ^{-1}. La preuve du théorème précédent nous dit alors que Γ et Δ sont inverses l'un de l'autre et que ce sont donc des isomorphismes. Ainsi $G \cong H_1 \times H_2$.

□

IV.3 Sous-algèbres de Lie et sous-groupes analytiques

L'objectif de cette dernière sous-partie est de répondre à la question suivante : Si on considère G un groupe de Lie matriciel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, existe-t-il un sous-groupe de Lie H de G et d'algèbre de Lie égale à $\mathfrak{h}$?

La réponse est non. Prenons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, un nombre irrationnel a et :

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & ita \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Supposons qu'il existe un sous-groupe de Lie matriciel H de G et d'algèbre de Lie égale à $\mathfrak{h}$.
Notons :

$$H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{ita} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On remarque que $H_0 \subset H$, et donc en passant à l'adhérence, $H_1 := \overline{H_0} \subset H$. Nous avons montré à la page 13 que :

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix},\ \theta, \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mais alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1$ de H_1 est égale à l'espace vectoriel de dimension 2 suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & i\varphi \end{pmatrix},\ \theta, \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Or $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, mais $\mathfrak{h}$ est de dimension 1, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de sous-groupe de Lie matriciel H de G d'algèbre de Lie égale $\mathfrak{h}$.

Cependant on peut trouver une propriété qui s'en rapproche. En effet, dans l'exemple précédent c'est la fermeture du groupe H_0 qui rend impossible l'existence du sous-groupe de Lie H. Pour cela nous allons devoir d'abord introduire quelques objets : l'algèbre de Lie d'un sous-groupe (pas nécessairement fermé) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et la notion de sous-groupes analytiques.

Définition IV.17

*Soit H un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, **l'algèbre de Lie** $\mathfrak{h}$ de H est l'ensemble*

$$\{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid e^{tX} \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Définition IV.18

*Soit G un groupe de Lie matriciel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Un sous-groupe H de G est dit **analytique** si :*

- *Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$,*
- *Tout élément de H peut être mis sous la forme $e^{X_1} \dots e^{X_m}$ où $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{h}$.*

On dit aussi que H est un sous-groupe connexe par arcs de Lie. Pour la prochaine preuve nous aurons besoin d'une dernière définition :

Définition IV.19

*Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et fixons une base de E. On dit qu'un élément est **rationnel** si ses coordonnées dans cette base sont rationnels.*

Avant de démontrer le théorème qui est le coeur de cette partie, nous avons besoin de démontrer un lemme :

Lemme IV.20

Soit G un groupe de Lie matriciel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. On fixe une base de $\mathfrak{h}$. On note $H = \{e^{X_1} \dots e^{X_m}, X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{h}\}$. Pour tout $\delta > 0$ et pour tout $A \in H$, il existe $R_1, \dots, R_m$ des éléments rationnels de $\mathfrak{h}$ tels que $A = e^{R_1} \dots e^{R_m} e^X$ où $X \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0, \delta)$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $X, Y \in \mathfrak{h}$ dans $B_{\mathfrak{h}}(0, \varepsilon)$, la formule de Baker-Campbell-Haussdorf puisse s'appliquer pour X, Y. On note C l'application suivante :

$$\begin{cases} B_{\mathfrak{h}}(0,\varepsilon)^2 \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ \quad (X, Y) \longmapsto X + \displaystyle\int_0^1 g\Big(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}\Big)(Y)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

On remarque que C est une application continue par compositions, produits et somme d'applications continues. Soit maintenant $\delta > 0$. Si le lemme est vrai pour un $\delta_0 > 0$, il le sera alors pour tous les

$\delta \geqslant \delta_0$. On peut donc supposer que $\delta \leqslant \varepsilon$ et assez petit pour que tous $X, Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0,\delta)$: $\|C(X,Y)\| < \varepsilon$. Or comme $e^X = e^{\frac{X}{k}k}$, tout élément $A \in H$ peut s'écrire sous la forme $A = e^{X_1}, \dots, e^{X_N}$ où $X_j \in \mathfrak{h}$ et $\|X_j\| < \delta$: il suffit de prendre k suffisamment grand pour que $\frac{\|X_j\|}{k} < \delta$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$.

Démontrons le lemme par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$.
Pour $N = 0$, le lemme est évidemment vrai (seule I vérifie l'hypothèse).
Supposons maintenant que le lemme soit vrai pour les éléments $A \in H$ s'écrivant sous le produit de N exponentielles d'éléments de $\mathfrak{h}$. Soit $A \in H$ que l'on écrit sous la forme : $A = e^{X_1} \dots e^{X_{N+1}}$ où pour tout $i \in \{1, \dots, N+1\}, X_i \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0,\delta)$. Par hypothèse de récurrence il existe $R_1, \dots, R_m$ des éléments rationnels tels que $A = e^{R_1} \dots e^{R_m} e^X e^{X_{N+1}}$ où $X \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0,\delta)$.
Or d'après la formule de Baker-Campbell-Haussdorf : $e^X e^{X_{N+1}} = e^{C(X,X_{N+1})}$. Le choix de δ nous assure alors que $\|C(X, X_{N+1})\| < \varepsilon$. Cependant, rien ne nous assure que $C(X, X_{N+1})$ soit de norme plus petite que δ, on va donc ré-appliquer ce procédé avec un autre élément bien choisi.
En effet, soit $R_{m+1} \in \mathfrak{h}$ une élément rationnel suffisamment proche de $C(X, X_{N+1})$ et tel que $\|R_{m+1}\| < \varepsilon$. Alors on écrit :

$$A = e^{R_1} \dots e^{R_m} e^{R_{m+1}} e^{-R_{m+1}} e^{C(X,X_{N+1})} = e^{R_1} \dots e^{R_m} e^{R_{m+1}} e^{X'},$$

où $X' = C\big(-R_{m+1}, C(X, X_{N+1})\big)$. Or comme pour tout $Z \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0,\delta)$ $C(-Z, Z) = 0$, en prenant R_{m+1} suffisamment proche de $C(X, X_{N+1})$, on obtient finalement que $\|X'\| < \delta$. D'où l'hérédité et le lemme par récurrence sur N. $\square$

Théorème IV.21

Soient G un groupe de Lie matriciel, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie associée et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un unique sous-groupe analytique H de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

Démonstration : Commençons déjà par remarquer que l'on peut supposer $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En effet, si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et H est un sous-groupe analytique dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est incluse dans $\mathfrak{g}$ alors H est aussi un sous-groupe analytique de G.
Posons $H = \{e^{X_1} \dots e^{X_N}, X_1, \dots, X_N \in \mathfrak{h}\}$. On remarque que H est un sous-groupe de G. Il nous suffit de montrer que son algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$ est égale à $\mathfrak{h}$.
Soit D un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Posons :

$$\varphi : \begin{cases} \mathfrak{h} \oplus D \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ X + Y \longmapsto e^X e^Y \end{cases}$$

Comme dans la démonstration du théorème de Cartan Von-Neumann, le théorème d'inversion locale nous donne l'existence de voisinages U et V de l'origine dans $\mathfrak{h}$ et dans D respectivement et d'un voisinage W de I dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$\forall A \in W,\ \exists!(X,Y) \in U \times V \mid A = e^X e^Y.$$

Soit $Z \in \mathfrak{h}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}, tX \in \mathfrak{h}$. Et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^{tX} \in H$, d'où $Z \in \mathfrak{h}'$ ainsi $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$. L'autre inclusion est plus délicate, soit $Z \in \mathfrak{h}'$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ suffisamment proche de 0 (on notera B

ce voisinage), il existe $X(t) \in U$ et $Y(t) \in V$ uniques tels que :

$$e^{tZ} = e^{X(t)}e^{Y(t)}.$$

Or, on peut écrire :

$$X : \begin{cases} B \longrightarrow U \\ t \longmapsto X(t) = \pi_{\mathfrak{h}}\big(\varphi^{-1}(tZ)\big) \end{cases} \quad \text{et } Y : \begin{cases} B \longrightarrow V \\ t \longmapsto Y(t) = \pi_D\big(\varphi^{-1}(tZ)\big) \end{cases},$$

où π_E désigne la projection sur l'espace vectoriel E. Ainsi, par composition, X, Y sont continues sur B. De plus, comme $Z \in \mathfrak{h}', e^{tZ} \in H$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}$. Donc, comme pour tout $t \in B, e^{X(t)} \in H$, on en déduit que pour tout $t \in B, e^{Y(t)} \in H$.

Notons alors $E = \{Y \in V \mid e^Y \in H\}$. Si $Y(t)$ n'est pas constant alors E n'est pas dénombrable : c'est absurde, en effet montrons que E est au plus dénombrable :
Soit $\delta > 0$ tel que pour tous $X, Y \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0, \delta)$, $C(X, Y)$ soit bien défini et dans U (où l'application continue C est définie dans le lemme précédent). On fixe une base de $\mathfrak{h}$.
Pour tout $m-$uplet d'éléments $R_1, \dots, R_m$ rationnels dans $\mathfrak{h}$, il existe au plus un élément $X \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0, \delta)$ tel que $e^{R_1} \dots e^{R_m} e^X \in \exp(V)$. En effet, soient $R_1, \dots, R_m$ des éléments rationnels de $\mathfrak{h}$ et $X_1, X_2 \in \mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0, \delta)$ tels qu'il existe $Y_1, Y_2 \in V$ tels que :

$$\begin{cases} e^{R_1} \dots e^{R_m} e^{X_1} = e^{Y_1} \\ e^{R_1} \dots e^{R_m} e^{X_2} = e^{Y_2} \end{cases}.$$

Alors $e^{-X_1}e^{X_2} = e^{-Y_1}e^{Y_2}$, et donc d'après la formule de Baker-Campbell-Haussdorf :

$$e^{-Y_1} = e^{-X_1}e^{X_2}e^{-Y_2} = e^{C(-X_1, X_2)}e^{-Y_2}.$$

Or $C(-X_1, X_2) \in U$ et $-Y_2 \in V$, et comme l'écriture sous la forme $e^{X_0}e^{Y_0}$ où $X_0, \in U, Y_0 \in V$ est unique (d'après le théorème d'inversion locale appliqué à φ), on obtient que : $-Y_2 = Y_1$ et que $C(-X_1, X_2) = 0$. Donc d'après la formule de Baker-Campbell-Haussdorf : $X_1 = X_2$ et $Y_1 = Y_2$.
Or d'après le lemme précédent, tout élément de H peut être écrit sous la forme $e^{R_1} \dots e^{R_m} e^X$ où X est un élément de $\mathcal{B}_{\mathfrak{h}}(0, \delta)$. Maintenant, comme il n'existe qu'un nombre dénombrable d'éléments rationnels dans $\mathfrak{h}$ (car cet ensemble est isomorphe à $\mathbb{Q}^{\dim(\mathfrak{h})}$ qui est dénombrable), il n'y a qu'un nombre dénombrable d'expression de la forme $e^{R_1} \dots e^{R_m}$ qui ne peuvent conduire chacun qu'à un seul élément de la forme $e^{R_1} \dots e^{R_m} e^X$ qui appartiendrait à $\exp(V)$.
On obtient alors que E est au plus dénombrable.

Ainsi, on sait que Y est une fonction constante sur B, or $Y(0) = 0$, donc Y est égale à l'application nulle. On en déduit alors que pour tout $t \in B : e^{tZ} = e^{X(t)}$. Ainsi pour t suffisamment proche de 0, on obtient : $tZ = X(t) \in \mathfrak{h}$. Donc $Z \in \mathfrak{h}$ et ainsi $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$.

Donc H est un sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. □

Une des conséquences de ce théorème, qui conclura ce rapport, est la suivante :

Proposition IV.22

Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un groupe de Lie matriciel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{h}$, la sous-algèbre abélienne maximale (pour l'inclusion) de $\mathfrak{g}$. Alors le sous-groupe analytique H de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est fermé.

Démonstration : Comme $\mathfrak{h}$ est abélien, H aussi. Ainsi sa fermeture dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\overline{H}$ est abélienne. Notons $\mathfrak{h}'$ son algèbre de Lie, on sait alors que $\mathfrak{h}'$ est abélienne.
Soit $A \in \overline{H}$, il existe une suite d'éléments (A_m) de H qui converge vers A. Comme $\overline{H}$ est fermé, d'après III.25 pour m suffisamment grand, il existe $X \in \mathfrak{h}'$ tel que : $AA_m^{-1} = e^X$. Alors $A = e^X A_m$.
Posons alors $\gamma : \begin{cases} [0,1) \longrightarrow \overline{H} \\ \quad t \longmapsto e^{(1-t)X} A_m \end{cases}$. Alors γ relie A à A_m dans $\overline{H}$. Or comme A_m peut-être relié à I dans $H \subset \overline{H}$, on en déduit que A est reliable à I dans $\overline{H}$. Ainsi par maximalité de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Donc par connexité de $\overline{H}$, la proposition III.32 nous donne que $\overline{H} = H$ et donc que H est fermé. $\square$

Références

[Bernis & Bernis, 2017] Bernis, Julien, & Bernis, Laurent. 2017. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques.* Ellipses.

[Hall, 2016] Hall, B. 2016. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations : An Elementary Introduction.* Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing.

[Hatcher *et al.*, 2002] Hatcher, A., Press, Cambridge University, & of Mathematics, Cornell University. Department. 2002. *Algebraic Topology.* Algebraic Topology. Cambridge University Press.