Recherches personnelles et résultats

Lebreton Kilian

Novembre 2022

Table des matières

0.1 Notations 2

1 Introduction **3**
1.1 Une intuition avec un exemple 3
1.2 La Cesàro-limite 5
1.3 La méthode d'Abel et la pseudo-limite 6

2 Nouvelles-limites **8**
2.1 Définitions des nouvelles-limites 8
2.2 Les propriétés intrinsèques 8
2.3 Propriétés importantes 11

3 Suites consistantes **12**
3.1 Qu'est ce qu'une limites consistantes ? 12
3.2 Les outils des suites consistantes 12
3.3 Théorème faible des suites consistantes 14
3.4 Exemples de suites consistantes 15
3.5 Isomorphisme des nouvelles-limites $\mathcal{NL}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{NL}(\mathbb{C})$ 16

4 Applications sur les fonctions complexes η et ζ **18**
4.1 Introduction préliminaire 18
4.2 La consistance de la fonction η 19
4.3 La formule d'Euler Maclaurin 23
4.4 Les développements limités des sommes partielles de η et de ζ 28
4.5 Valeurs particulières de ζ et de η 34
4.6 Des équivalents remarquables 35

0.1 Notations

Voici les notations que j'utilise, si cela peut aider !

$\mathbb{K}$ désigne toujours le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on travaille dans l'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, avec les opérations suivantes :

Soient $\lambda \in \mathbb{K}, u = (u_n)_n, v = (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

- $\mathbb{1} := (1)_n = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$
- $\lambda.u = (\lambda.u_n)_n$
- $u + v = (u_n + v_n)_n$
- $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)_n$
- $\Delta u = (u_n - u_{n-1})$ avec $u_{-1} = 0$
- $\sum u = (\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$
- $Cu = (Cu_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\overline{u} := (\overline{u_n})_n$, où $\overline{\cdot}$ est la conjugaison complexe
- $\Re(u) = \big(\Re(u_n)\big)_n$ et $\Im(u) = \big(\Im(u_n)\big)_n$, où $\Re$ est la partie réelle et $\Im$ la partie imaginaire
- $\phi(u) = (u_{n+1})_n$, ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \phi^k(u) = (u_{n+k})_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [u]_n = u_n$

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[X], \quad \big[P(\phi)(u)\big]_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k.[\phi^k(u)]_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k.u_{n+k}$$

On a aussi les ensembles de suites suivants :

$\mathbf{L}(\mathbb{K})$, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergentent sur $\mathbb{K}$,
on note $\lim(u)$ la limite classique de la suite u

$S(\mathbb{K}) := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists\, r > 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(r^n) \right\}$

$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} := \{ w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ w_n = 0 \}$

1 Introduction

1.1 Une intuition avec un exemple

Nous allons dans un premier temps, essayer de donner un sens à la notion limite pour la suite $u = (u_n)_{n\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$ qui ne converge pas puisqu'elle oscille entre 1 et 0. Cependant, on peut intuitivement et avec plusieurs méthode lui donner une unique "limite" $\frac{1}{2}$. Pour commencer, on peut déjà remarquer que l'on peut l'écrire de plusieurs façons :

$$u_n = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right)_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad n = 2k \\ 0 & \text{Si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

— Méthode 0 :(Intuition)
Intuitivement, puisqu'il y a autant de 1 que de 0. Mieux, on peut voir que il y a la "moitié" des termes sont égaux à 1 et l'autre "moitié" sont égaux à 0. On peut se dire que la "limite" devrait être $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

— Méthode 1 : (Méthode probabiliste ou la méthode de Cesàro)
C'est une méthode déjà connue et utilisé partout. Elle consiste à observer la limite des moyennes des premiers termes, si la nouvelle suite converge c'est gagné !

$$Cu_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(n)}{2(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Ce qui nous donne que la limite au sens de Cesàro de u est $\frac{1}{2}$, comme l'on pouvait l'espérer.

— Méthode 2 : (Méthode analytique ou la méthode d'Abel)
Grossièrement, on prend la série entière et on passe à la limite en 1^- et si ça converge c'est gagné !

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \Psi[u](x) := \sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \underset{z \to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

On obtient que la limite de u au sens d'Abel est $\frac{1}{2}$. Nous généraliserons cette limite dans le cas où le rayon de convegence est inférieur strictement à 1 (la pseudo-limite).

— Méthode 3 : (Méthode algèbriste ou la méthode consistante)
Pour cette méthode, il s'agit d'observer :

$$u + (u_{n+1}) = \mathbb{1}_{\mathbb{N}} \implies \mathcal{L}\big(u + (u_{n+1})\big) = \mathcal{L}\big(\mathbb{1}_{\mathbb{N}}\big) = 1 = 2 \cdot \mathcal{L}\big(u\big)$$

On peut se dire que la translation du rang n au rang $n + 1$ ne change pas sa valeur de sa "limite" $\mathcal{L}(u)$. Ainsi, sa valeur ne peut qu'être $\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}$ puisque la suite constante à 1 converge vers 1.

— Méthode 4 :(Méthode par prolongement par continuité)
Cette méthode est peu généralisable voir trompeuse des fois et reprend un la méthode 2. Par prolongement d'une fonction par continuité bien choisie.

$$\forall x > 0, \quad \eta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = \eta(0)$$

Remarque 1.1.1. *Attention, la méthode 3 se manipule avec précotion car cela revient à dire que :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u) &= 1-1+1-1+1-1+1-... \\
\mathcal{L}(u) &= 0+1-1+1-1+1-1+... \\
2\cdot\mathcal{L}(u) &= 1+0+0+0+0+0+0+... && =1 \\
\mathcal{L}(u) &= 1-1+1-1+1-1+1-... && =\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Écrire lignes ci-dessus a peut être un sens mais pourtant écrire les lignes ci-dessous, c'est juste faux :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v) &= 1+1+1+1+1+1+1+... \\
\frac{1}{2} = \mathcal{L}(u) &= 1-1+1-1+1-1+... \\
\mathcal{L}(v)-\mathcal{L}(u) &= 0+2+0+2+0+2+0+2+.. && =2\cdot\mathcal{L}(v) \\
\mathcal{L}(v) = -\mathcal{L}(u) &= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Vous me direz peut-être que c'est $\zeta(0)$, mais écrire ceci est inconsistant, n'a aucun sens :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v) &= 1+1+1+1+1+1+1+... \\
\frac{1}{2} = \mathcal{L}(u) &= 1-1+1-1+1-1+... \\
\mathcal{L}(v)+\mathcal{L}(u) &= 2+0+2+0+2+0+2+.. && =2\cdot\mathcal{L}(v) \\
\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(u) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v) &= 1+1+1+1+1+1+1+... \\
\mathcal{L}(v) &= 0+1+1+1+1+1+1+... \\
\mathcal{L}(v)-\mathcal{L}(v) &= 1+0+0+0+0+0+0+0... = 1 \\
0 &= 1!
\end{aligned}$$

Maitenant malgré tous les efforts et toutes méthodes du monde, on ne fera jamais converger la suite u mais une variante ou une alternative de u. Ainsi, puisque u n'a pas de limite (classique), nous allons définir rigoureusement plusieurs nouvelle définition de limite qui prolonge la limite classique et finir par une application en utilisant la fonction ζ de Riemann ou plutot celle de η de Dirichlet.

1.2 La Cesàro-limite

Définition 1.2.1. *Soit* $u = (u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *:*

$$Cu = (Cu_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$u \in CL \iff Cu \in L \quad et \quad \lim(Cu) = cl(u)$$

Définition 1.2.2. *La* k^{ieme} *limite de Césàro pour* $k \in \mathbb{N}$,

$$u \in PL \iff C^k u \in L \quad et \quad \lim(C^k u) = cl^k(u)$$

Propriété 1.2.3. *Les propriétés élémentaires sur la Cesàro-limite, soit* $k \in \mathbb{N}$,

1. $\mathbb{1} := (1)_{n\in\mathbb{N}} \in CL^k$ *et* $cl^k(\mathbb{1}) = 1$,
2. CL^k *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* cl^k *est linéaire :*

$$\forall u, v \in CL^k, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda.u + v \in CL^k \quad et \quad cl^k(\lambda.u + v) = \lambda.cl^k(u) + cl^k(v)$$

3. $\forall u \in CL^k, \quad \overline{u} := (\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}} \in CL^k$ *et* $cl^k(\overline{u}) = \overline{cl^k(u)}$
4. $\forall u \in CL^k \cap \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \quad cl^k(u) \geqslant 0$
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in CL^k \iff (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in CL^k$ *et* $cl^k(u) = cl^k\big((u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\big)$

Théorème 1.2.4 (Théorème de Cesàro)**.** *Soit* $u \in L$ *alors* $u \in CL$ *et* $\lim(u) = cl(u)$

Corollaire 1.2.5. *Soient* $k \in \mathbb{N}$ *et* $u \in CL^k$ *alors* $u \in CL^{k+1}$ *et* $cl^k(u) = cl^{k+1}(u)$

Exemple 1.2.6.

1. *Soit* $u_n = (-1)^n$, *alors* $u \in CL$ *:*

$$Cu_n = \frac{1 + (-1)^n}{2(n+1)} \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad cl(u) = 0$$

2. *Soit* $v_n = (n+1) \cdot (-1)^n$, *alors* $v \notin CL$ *mais* $v \in CL^2$ *:*

$$Cu_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{2(n+1)+1}{4}\right) + \frac{1}{4(n+1)} = \frac{(-1)^n}{2} + o(1)$$

$$C^2 u_n = \frac{1 + (-1)^n}{4(n+1)} + o(1) \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad cl^2(u) = 0$$

3. *Soit* $w = \sum v = \left(\sum_{k=1}^n (k+1) \cdot (-1)^k\right)_n$ *alors* $w \notin CL$ *mais* $w \in CL^2$ *:*

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1) \cdot (-1)^k = (-1)^n \left(\frac{2(n+1)+1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{4} + \frac{\mathbb{1}_n}{4}$$

Par linéarité, on obtient $cl^2(w) = \frac{1}{2}.cl^2(v) + \frac{1}{4}.cl^2(u) + \frac{1}{4}.cl^2(\mathbb{1}) = \frac{1}{4}$.

4. *Soient* $E := \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{N}$ *et* $\alpha \in [0, 1]$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{1}_E(n) = \begin{cases} 1 & si \;\; n \in E \\ 0 & sinon \end{cases}, \qquad u_n^\alpha = n^\alpha \cdot \mathbb{1}_E(n) = \begin{cases} n^\alpha & si \;\; n \in E \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Alors :

— *pour* $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, $\quad u^\alpha \in CL$ *et* $cl(u^\alpha) = 0$,
— *pour* $\alpha = \frac{1}{2}$, $\quad u^\alpha \in CL$ *et* $cl(u^\alpha) = \frac{1}{2}$,
— *pour* $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$, $\quad u^\alpha \notin CL$ *et* $Cu_n^\alpha \longrightarrow +\infty$.

5. *Soit* $F := \{\lfloor k\ln(k) \rfloor \mid k \in \mathbb{N}^*\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} \ln(k) & si\ \exists k \in \mathbb{N}^* \mid n = \lfloor k\ln(k) \rfloor \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Alors $\mathbb{1}_F, u \in CL$ *et* $cl(\mathbb{1}_F) = 0$ *et* $cl(u)$

Remarque 1.2.7. *La méthode de Cesàro est particulièrement efficace pour régulariser des suites des suites positive en une seule étape* ($\in CL$) *ou pour les suites oscillantes au subpolynomiale en itérant la moyenne de Cesàro plusieurs étapes* ($\in CL^k$). *Cependant, en pratique les calculs deviennent rapidement long et difficile. Pour montrer que* $n^k \cdot (-1)^n \overset{cl^k}{\rightsquigarrow} 0$ *et il faut itérer au moins k fois et donc faire une récurrence compliquée.*

Remarque 1.2.8. *La méthode de Cesàro avec ses itérés n'est pas optimale. On peut intuitivement se dire que* $((-2)^n)_n$ *oscille aussi vers 0 comme* $(-1)^n$. *Cependant, avec la méthode Cesàro on ne pourra jamais montrer sa convergence. Ceux-ci est dû au fait que* $(\frac{1}{n^k}(-2)^n)_n$ *ne convergera jamais vers 0. Il faut donc définir une méthode plus optimal, c'est-à-dire, où il y a plus encore de suites qui "convergent".*

1.3 La méthode d'Abel et la pseudo-limite

Définition 1.3.1 (Sommabilité au sens d'Abel)**.** *Une série* $\sum_n u_n$ *est sommable au sens d'Abel, si la série entière* $\Phi[u]$ *définit par*

$$\Phi[u](x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$$

est convergente sur $[0, 1[$ *et si* $\Phi[u]$ *admet une limite en* 1^-. *Alors cette limite est la valeur de la somme au sens d'Abel.*

Remarque 1.3.2. *En fait, la sommation d'Abel impose un rayon de convergence* $R \geqslant 1$. *Ce qui exclut pas mal de possibilité et ne fait pas beaucoup mieux que la méthode de Cesàro. Par exemple, la suite* $(-2)^n$ *pose encore problème. Cependant, nous pouvons étendre cette méthode grâce à l'analyse complexe. On obtient alors la définition de la pseudo-limite.*

Définition 1.3.3 (La pseudo-limite)**.**

$$S(\mathbb{K}) := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists\, r > 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(r^n) \right\}$$

On note $\Psi : S(\mathbb{K}) \to \mathcal{F}_{a0} := \{$*fonctions analytiques maximales en* $0\}$, *telle que pour* $z \in \mathbb{C}$, *localement en 0 (c'est-à-dire dans le disque de convergence) :*

$$\Psi : \quad u \longmapsto \left(z \mapsto (\Psi[u])(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta u_k z^k \right)$$

On notera Ω_u *l'ouvert maximale en 0 de* $\Psi[u]$. *Plus rigoureusement, c'est le plus grand ouvert* U *étoilé en 0 tel que il existe une fonction analytique* $f : U \to \mathbb{C}$ *qui coïncide avec cette série entière en 0. On note alors* $\Psi[u] : \Omega_u \to \mathbb{C}$ *cette fonction.*

Définition 1.3.4. *$PL(\mathbb{K})$, l'ensemble des suites qui admettent une pseudo-limite. Il est défini par :*

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in PL(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\in[0;1[,\ x\to 1} \big(\Psi[u](x)\big) \text{ existe}$$

On note alors $pl(u) = \lim_{x\in[0;1[,\ x\to 1} \big(\Psi[u](x)\big)$, la pseudo-limite de u.

Remarque 1.3.5. *Pourquoi définir la pseudo-limite comme ça ? Ici, on cherche à donner un sens à la limite d'une suite (et pas sa somme comme pour la sommabilité au sens d'Abel), si on suppose que l'on a toutes les convergences possible alors par téléscopage, on obeserve :*

$$\lim_{x\in[0;1[,\ x\to 1} \big(\Psi[u](x)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta u_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k-1}\right) = \lim(u)$$

Définition 1.3.6. *On définit aussi $\Phi : S(\mathbb{K}) \to \mathcal{F}_{a0}$, (de la même façons que Ψ) tel que dans un voisinage de 0, on ait :*

$$u \longmapsto \left(z \mapsto (\Phi[u])(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k\right)$$

Remarque 1.3.7. *En pratique, Φ est plus facile à utiliser et on revenir à Ψ directement avec la relation :*

$$\forall u \in S(\mathbb{K}),\ \ \forall z \in \Omega u \setminus \{1\}, \quad \Psi[u](z) = \Phi[\Delta u](z) = (1-z)\Phi[u](z)$$

En effet, en posant $u_{-1} = 0$, on a dans le disque de convergence :

$$(1-z)\Phi[u](z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.z^k - u_k.z^{k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.z^k - u_{k-1}.z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta u_k.z^k = \Psi[u](z)$$

Propriété 1.3.8. *Les propriétés élémentaires sur la pseudo-limite,*

1. $\mathbb{1} := (1)_{n\in\mathbb{N}} \in PL$ *et* $pl(\mathbb{1}) = 1$,
2. PL *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* pl *est linéaire :*

$$\forall u, v \in PL, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.u + v \in PL \quad \text{et} \quad pl(\lambda.u + v) = \lambda.pl(u) + pl(v)$$

3. $\forall u \in PL, \quad \overline{u} := (\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}} \in PL$ *et* $pl(\overline{u}) = \overline{pl(u)}$
4. $\forall u \in PL \cap \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \quad pl(u) \geqslant 0$
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in PL \iff (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in PL$ *et* $pl\,(u) = pl\big((u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\big)$

Théorème 1.3.9. *(Théorème de la pseudo-limite)*
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $u \in CL^k$, alors $u \in PL$ et $cl^k(u) = pl(u)$

Exemple 1.3.10. *Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, et $\rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, posons $u = (P(n)\rho^n)_n$ alors $u \in PL(\mathbb{C})$ et $pl(u) = 0$. On a même $\sum u \in PL(\mathbb{C})$.*

Exemple 1.3.11. *Soit $x \in]-\pi, \pi[$, posons $v(x) = ((-1)^n \cdot cos(nx)_n$ alors $v(x) \in PL(\mathbb{R})$ et $pl(v(x)) = 0$. On a même $\sum v(x) \in PL(\mathbb{R})$ et $\forall x \in]-\pi, \pi[,\ \ pl(\sum v(x)) = \frac{1}{2}$.*

2 Nouvelles-limites

2.1 Définitions des nouvelles-limites

Pour la suite $\mathbb{K}$ désignera un corps complet $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour un espace vectoriel $E \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, posons $\forall C \subset \mathbb{K}, \quad E(C) := E \cap C^{\mathbb{N}}$.

Définition 2.1.1. *On dit que $EL \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace de limites si :*

1. *EL est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel*
2. *$\mathbb{1} := (1)_{n\in\mathbb{N}} \in EL$*
3. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in EL \iff (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in EL$*
4. *$\forall u \in EL, \quad \overline{u} := (\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}} \in EL \quad$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)*

Définition 2.1.2. *Soient EL un $\mathbb{K}$-espace de limites et $nl : EL \to \mathbb{K}$, on dit que nl est <u>une nouvelle-limite sur EL</u>, si on a les propriétés suivantes :*

1. *<u>La linéarité :</u> nl est une forme linéaire sur EL*
2. *<u>La conservation par $\mathbb{1}$:</u> $\quad nl(\mathbb{1}) = 1$*
3. *<u>La positivité :</u> $\forall u \in EL(\mathbb{R}_+), \quad nl(u) \in \mathbb{R}_+$*
4. *<u>L'indépendance partielle du rang :</u> $\forall u \in EL, \quad nl\,(u) = nl\big((u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\big)$*
5. *<u>La conjugaison :</u> $\forall u \in E, \quad nl(\overline{u}) = \overline{nl(u)} \quad$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)*

Exemple 2.1.3. *La limite classique, la pseudo-limite, la Cesàro limite, la k^{ieme}-Cesàro limite (lorsque l'on répète la méthode de Cesàro k fois) ... sont des nouvelles-limites.*

Définition 2.1.4. *Posons $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} := \{w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ w_n = 0\}$, l'ensemble des suites nulles sur $\mathbb{K}$ à partir d'un certain rang.*

Remarque 2.1.5. *Toutes les suites constantes à partir d'un certain rang sont dans chaques espaces de limites. Il y a des espaces de limites où l'on ne peut même pas leur attribuer une nouvelle-limite (voir le théorème 2.3.3), et d'autres où l'on peut en donner plusieurs (voir par exemple le théorème* **??** *qui permet d'en construire facilement).*

Remarque 2.1.6. *L'indépendance du rang donne un sens aux nouvelles-limites pour les suites qui ne commencent pas par 0 en indexation. Par exemple, les nouvelles-limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'auraient pas sens sans cette propriété.*

2.2 Les propriétés intrinsèques

Soit nl une nouvelle-limite définie sur EL un espace de limite :

Propriété 2.2.1. 1. *<u>L'unicité des nouvelles-limites</u>*

2. *<u>L'indépendance du rang :</u> (totale) (*en disant que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{-k} = 0$*)*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad u \in EL(\mathbb{K}) \iff v = (u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}} \in EL(\mathbb{K}) \quad \textit{avec} \quad nl(u) = nl(v)$$

3. *$\forall u \in EL(\mathbb{R}), \implies nl(u) \in \mathbb{R}$*

4. *L'existence des nouvelles-limites par identification de la partie réelle et de la partie imaginaire :*

$$u \in EL \iff \Re(u) \in EL(\mathbb{R}) \ \ et \ \ \Im(u) \in EL(\mathbb{R})$$

où $\Re(u) := (\Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\Im(u) := (\Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$,
avec $nl(u) = nl(\Re(u)) + i \cdot nl(\Im(u))$, $nl(\Re(u)) = \Re(nl(u))$ *et* $nl(\Im(u)) = \Im(nl(u))$

5. *La conservation des inégalités larges par passage aux nouvelles limites sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall u, v \in EL(\mathbb{R})^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leqslant v_k \implies nl(u) \leqslant nl(v)$$

6. *L'existence de nouvelle-limite par la suite des différences de u :*

$$\forall u \in EL(\mathbb{K}), \quad \Delta u \in EL(\mathbb{K}) \ et \ \ nl(\Delta u) = 0$$

Preuve : 1. Ceci découle directement de la bonne définition de la nl.

2. On commence par observer que $u \in EL(\mathbb{K}) \iff v = (u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}} \in EL(\mathbb{K})$ avec $nl(u) = nl(v)$, puisque c'est la propriété d'indépendance du rang partielle appliqué à $v = (u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Ensuite, on termine par deux récurrences faciles sur $k \in \mathbb{N}$ et sur $-k \in \mathbb{N}$.
3. $u \in EL(\mathbb{R}) \implies u = \overline{u} \implies nl(u) = \overline{nl(u)} \implies nl(u) \in \mathbb{R}$
4. $\implies$: Soit $u \in EL$, donc $\overline{u} \in EL$ donc $\Re(u) = \frac{1}{2}(u + \overline{u}) \in EL(\mathbb{R})$ et $\Im(u) = \frac{1}{2i}(u - \overline{u}) \in EL(\mathbb{R})$
$\impliedby$: Si $\Re(u) = EL(\mathbb{R})$ et $\Im(u) \in EL(\mathbb{R})$ alors $u = \Re(u) + i \cdot \Im(u) \in EL$ et par linéarité, $nl(u) = nl(\Re(u)) + i \cdot nl(\Im(u))$ et par la propriété précédente, on a le résultat.
5. $v - u \in EL(\mathbb{R}_+) \implies nl(v-u) \in \mathbb{R}_+ \implies nl(u) \leqslant nl(v)$
6. $\Delta u = (u_{n+1} - u_n)_n \in EL(\mathbb{K})$ par linéarité et par l'indépendance du rang :
$nl(\Delta u) = nl(u) - nl(u) = 0$

□

Proposition 2.2.2 (La conservation des nouvelles-limites sur toute partie fermée convexe F de $\mathbb{C}$)**.**

$$\forall u \in EL(F), \quad nl(u) \in F$$

Preuve : Soient F une partie fermée convexe de $\mathbb{C}$, si F est vide alors est $EL(F)$ aussi donc le résultat est vraie, si F est non vide alors $EL(F)$ contient au moins les constantes.

Nous allons utiliser un lemme d'analyse fonctionnelle :

Soient F une partie fermée convexe non vide de $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in F \quad ssi \quad \forall \theta \in [0; 2\pi[, \quad \Re(e^{-i\theta} z) \geqslant \inf \Re(e^{-i\theta} F) := \inf(\{\Re(e^{-i\theta} c) |\ c \in F\}) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Soient $u \in EL(F)$ et $\theta \in [0; 2\pi[$, par linéarité et partie réel, on a :

$$\left(\Re(e^{-i\theta} \cdot u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in EL(F) \quad \text{et} \quad nl\left(\Re(e^{-i\theta} \cdot u_n)\right) = \Re(e^{-i\theta} \cdot nl(u))$$

Si $\inf \Re(e^{-i\theta} F) = -\infty$, l'inégalité est vraie.

Si $\inf \Re(e^{-i\theta} F) \in \mathbb{R}$, on a que $\inf \Re(e^{-i\theta} F) \cdot \mathbb{1} \in EL$, et $nl(\inf \Re(e^{-i\theta} F) \cdot \mathbb{1}) = \inf \Re(e^{-i\theta} F)$ Maintenant, par passage à une nouvelle limite dans une inégalité large, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in F \implies \mathrm{Re}(e^{-i\theta} \cdot u_n) \geqslant \inf \Re(e^{-i\theta} F) = \inf \Re(e^{-i\theta} F).\mathbb{1}_n$$

Donc $\Re(e^{-i\theta} \cdot nl(u)) \geqslant nl(\inf \Re(e^{-i\theta} F).\mathbb{1}) = \inf \Re(e^{-i\theta} F)$. On peut alors appliquer le lemme d'analyse fonctionnelle, $nl(u) \in F$. □

Lemme 2.2.3 (Lemme du o)**.** *Soit nl une nouvelle-limite sur EL alors :*

$$\forall (u,v) \in EL \times EL(\mathbb{R}_+), \quad u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n) \implies nl(u) = 0$$

<u>*Preuve*</u> *:* Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on se ramène à $\mathbb{R}$ grâce aux propriétés élémentaires 2.2.1, on a alors $\Re(u_n) = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$, $\Im(u_n) = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$ et $nl(u) = nl(\Re(u)) + i.nl(\Im(u))$. Supposons maintenant que $u \in EL(\mathbb{R})$, grâce à l'indépendance du rang totale, on peut dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\lambda.u_{n+N}| \leqslant v_{n+N} \implies \lambda.u_{n+N} + v_{n+N} \geqslant 0$$

$$\implies \lambda.nl(u_{n+N}) + nl(v_{n+N}) \geqslant 0 \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda.nl(u) + nl(v) \geqslant 0 \implies nl(u) = 0$$

$\square$

2.3 Propriétés importantes

On a ici des propriétés qui vont être très utiles pour la partie 3.

Lemme 2.3.1. *Soient nl une nouvelle-limite sur EL et $u \in EL(\mathbb{R})$, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n}(u_k) \leqslant nl(u) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n}(u_k)$$

Preuve : Montrons la propriété avec la limite inf et on aura alors celle de la limite sup en prenant $-u$. Posons $m = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n}(u_k)$:

Si $m = -\infty$, c'est fini.

Sinon, prenons $M < m$, on a :

$$\exists k \in \mathbb{N} \mid \quad (u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}} - M.\mathbb{1} \in EL(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+k} - M$$

De plus, par les propriétés élémentaires des nouvelles limites :

$$0 \leqslant nl\left((u_{n+k})_n - M.\mathbb{1}\right) = nl\left((u_{n+k})_n\right) - M.nl\left(\mathbb{1}\right) = nl(u) - M$$

On a donc montrer que : $\forall M < m,\ M \leqslant nl(u)$, cequi implique le résultat. (On a aussi montré que $m \neq +\infty$ car $nl(u) \in \mathbb{R}$.) □

Je précise ici que je garde les notations $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = l$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}} \cup \mathbb{C}$ pour dire que la suite (u_n) converge vers l au sens classique. Cette définition que l'on peut d'ailleurs prolonger pour $l \in \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{e^{i\theta}\infty \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ avec :

Définition 2.3.2. *Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on dit que :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta}\infty \iff \begin{cases} \Re(e^{-i\theta}.u_n) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \\ \Im(e^{-i\theta}.u_n) & = \underset{n\to+\infty}{o} & \left(\Re(e^{-i\theta}.u_n)\right) \end{cases}$$

Théorème 2.3.3 (Théorème du respect des limites classiques)**.** *Soient nl une nouvelle limite sur EL et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C} \quad et \quad u \in EL \implies nl(u) = l$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta}\infty,\ \theta \in \mathbb{R} \implies u \notin EL$$

Preuve : C'est un corollaire du lemme 2.2.3. Soit $u \in EL$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ alors $u_n - l = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ et $u - l.\mathbb{1} \in EL \implies nl(u - l.\mathbb{1}) = 0 \implies nl(u) = l$.

Soient nl une nouvelle-limite sur EL et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta}\infty$ alors :

$$1 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\Re(e^{-i\theta}.u_n)\right) \quad \text{et} \quad nl(\mathbb{1}) = 1 \implies \Re(e^{-i\theta}u) \notin EL \implies u \notin EL$$

□

Remarque 2.3.4. *Pour démontrer ce théorème, on aurait pu utiliser aussi les définitions classiques des limites ce qui revient au lemme 2.3.1 précédent en l'adaptant sur $\mathbb{C}$ comme dans la démonstration de la propriété des convexes fermés 2.2.2.*

3 Suites consistantes

3.1 Qu'est ce qu'une limites consistantes ?

Définition 3.1.1. *Définissons l'ensemble des nouvelles-limites dans $\mathbb{K}$:*

$$\mathcal{NL}(\mathbb{K}) := \left\{(nl, EL) \mid nl \ \text{ est une nouvelle-limite sur l'espace de limite } \ EL \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right\}$$

Définition 3.1.2. *On dit qu'une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est consistante quand :*

1. *L'existence :* $\exists (nl, EL) \in \mathcal{NL}(\mathbb{K}) \mid \quad u \in EL$
2. *L'unicité :* $\forall (nl_1, EL_1), (nl_2, EL_2) \in \mathcal{NL}(\mathbb{K})^2, \quad u \in EL_1 \cap EL_2 \implies nl_1(u) = nl_2(u)$

On note $L_c(\mathbb{K})$, l'ensemble des suites consistantes sur $\mathbb{K}$.

On note $EL_c(\mathbb{K})$, l'ensemble des suites admettant une nouvelle-limite sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire vérifiant seulement la condition d'existence. On a alors $L_c(\mathbb{K}) \subset EL_c(\mathbb{K})$

Remarque 3.1.3. *Cette dernière définition donne un sens légitime à la notion de prolongement de limites et contrairement aux apparences L_c reste assez grand, voir les exemples 3.4.1 et respecte parfaitement la limite classique avec le théorème 2.3.3.*

3.2 Les outils des suites consistantes

Pour commencer, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour utiliser la relation d'ordre induite par $\mathbb{R}$. On reviendra sur les suites de $\mathbb{C}$ et même de $\mathbb{K}^d$ dans la prochaine partie qui généralisera donc les suites en dimension finie. Ce qu'il faut retenir c'est que toute l'étude que l'on va faire sur $\mathbb{R}$ sera adaptable (par partie réelle et partie imaginaire) sur $\mathbb{C}$.

On va maitenant étudier cette ensemble, en ce ramenant par l'indépendance du rang à un ensemble plus simple à étudier et équivalent du point de vue des nouvelles-limites.

Définition 3.2.1. *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,*

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & (u_{n+1})_n \end{array}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \phi^k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & (u_{n+k})_n \end{array}$$

Remarque 3.2.2. *L'indépendance du rang se traduit par préservation $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\phi(u)) = \mathcal{L}(\phi^k(u)$. De plus, les itérations de ϕ fontionnent si bien, $\phi^k \circ \phi^{k'} = \phi^{k+k'}, \ k, k' \in \mathbb{N}$ que l'on va évaluer les polynômes en ϕ.*

Définition 3.2.3.

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 1\} = (X-1).\mathbb{R}[X] + 1$$

$$E_+ = \{P \in \mathbb{R}_+[X] \mid P(1) = 1\},$$

On notera que ces 2 ensembles sont stables par multiplication.

Définition 3.2.4. *Pour $P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot X^k$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a alors :*

$$P(\phi)(u) = \left(\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot X^k\right)(\phi)(u) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot \phi^k(u) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot (u_{n+k})_n = \left(\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot u_{n+k}\right)_n$$

On note $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left[u\right]_n := u_n$, donc $\left[\phi(u)\right]_n = u_{n+1} = \left[u\right]_{n+1}$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left[P(\phi)(u)\right]_n = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot \left[\phi^k(u)\right]_n = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot u_{n+k}$$

Propriété 3.2.5. *On a plein de propriétés élémentaires qui facilitent les calculs, soient* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*$u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*,* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *:*

$$P(\phi)(\mathbb{1}) = P(1).\mathbb{1}$$
$$(X-1)(\phi)(u) = (\phi - Id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Delta\phi(u)$$
$$P(\phi)\circ Q(\phi)(u) = P(\phi)\big(Q(\phi)(u)\big) = (PQ)(\phi)(u) = Q(\phi)\circ P(\phi)(u)$$
$$P(\phi)(\lambda.u + v) = \lambda.P(\phi)(u) + P(\phi)(v)$$

Définition 3.2.6. *Soit* $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\limsup(u) := \limsup_{n\to+\infty}(u_n) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, \qquad \liminf(u) := \liminf_{n\to+\infty}(u_n) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

$$\sup(u) := \inf_{P\in E}\big\{\limsup(P(\phi)(u))\big\}, \qquad \inf(u) := \sup_{P\in E}\big\{\liminf(P(\phi)(u))\big\}$$
$$I(u) = \big[\inf(u), \sup(u)\big] \setminus \{-\infty, +\infty\}$$

Exemple 3.2.7. *Pour ces définitions, il faut faire attention, on a par exemple :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n = (-3)^n + 2^n \qquad \Longrightarrow \qquad \liminf(u) = -\infty, \limsup(u) = +\infty$$
$$\left(\frac{X+3}{4}\right)(\phi)(u) = (2^{n-2})_n \qquad \Longrightarrow \qquad \liminf(u) = \limsup(u) = +\infty$$
$$\left(\frac{(X+3)(X-2)}{4}\right)(\phi)(u) = (0) \qquad \Longrightarrow \qquad \liminf(u) = \limsup(u) = 0$$

Ainsi, $\sup(u) = 0, \inf(u) = +\infty$ *et donc* $I(u) = \emptyset$.

Parfois le sup *n'est pas atteint par un polynôme, on a par exemple la suite* $u = \mathbb{1}_{\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}} \in L_c(\mathbb{R})$ *avec* $\inf(u) = \sup(u) = 0$ *dans l'exercice 3.4.1.*

Lemme 3.2.8. *Soient* $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $(nl, NL) \in \mathcal{NL}$ *tel que* $u \in NL$ *alors :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(\phi)(u) \in NL \quad \text{et} \quad nl\big(P(\phi)(u)\big) = P(1)\cdot nl(u)$$

<u>*Preuve*</u> *:* Soit $P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ alors $P(\phi)(u)$ est une combinaison linéaire (finie) de suites de la forme $\phi^k(u) = (u_{n+k})_n,\ k\in\mathbb{N}$, donc par l'indépendance du rang et par linéarité $P(\phi)(u) \in NL$, ainsi :

$$nl\big(P(\phi)(u)\big) = nl\left(\sum_{k=0}^{N}\lambda_k.\phi^k(u)\right) = \sum_{k=0}^{N}\lambda_k\cdot nl\left(\phi^k(u)\right) = \sum_{k=0}^{N}\lambda_k\cdot nl(u) = P(1)\cdot nl(u)$$

□

Théorème 3.2.9. *Soit* $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, alors :*

$$I(u) = \big\{nl(u)\in\mathbb{R} \;\big|\; (nl, EL)\in\mathcal{NL}(\mathbb{R}), u\in EL\big\}$$

Corollaire 3.2.10 (Caractérisation de $EL_c(\mathbb{R})$ et de $L_c(\mathbb{R})$)**.**

$$u\in EL_c(\mathbb{R}) \quad \text{ssi} \quad I(u)\neq\emptyset$$

$$u\in L_c(\mathbb{R}) \quad \text{ssi} \quad \exists\, l\in\mathbb{R}|\ I(u) = \{l\} \quad \text{ssi} \quad \inf(u) = \sup(u)\in\mathbb{R}$$

3.3 Théorème faible des suites consistantes

Définition 3.3.1.

$$E_+ = \{P \in \mathbb{R}_+[\mathrm{X}] \mid P(1) = 1\},$$
$$EL_+ = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists P \in E_+,\ P(\phi)(u) \in \mathbf{L}\}$$

où $\mathbf{L}$ *est l'ensemble des suites qui admettent une limite classique.*

Théorème 3.3.2 (Théorème faible des suites consistantes)**.**

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_+ : & EL_+ & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \lim(P(\phi)(u)) \end{array}, \quad \text{où } P \in E_+ \text{ tel que } P(\phi)(u) \in \mathbf{L}$$

EL_+ est un espace de limites consistant ($EL_+) \subset L_c$) et Λ_+ est une nouvelle-limite.

Preuve : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ $u, v \in EL_+$ et $P_u, P_v \in E_+$ tel que $P_u(\phi)(u), P_v(\phi)(v) \in \mathbf{L}$ alors :

1. Λ_+ est bien définie, soient $P_u = \sum_{i=0}^{d} \mu_i \mathrm{X}^i \in E_+$ et $P = \sum_{j=0}^{d'} \lambda_j \mathrm{X}^j \in E_+$ tels que $P(\phi)(u) \in \mathbf{L}$ avec $[P_u(\phi)(u)]_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{R}$ et $[P(\phi)(u)]_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l' \in \mathbb{R}$, alors :

$$\sum_{j=0}^{d'} \lambda_j . \underbrace{[P_u(\phi)(u)]_{n+j}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} l} = [(P \cdot P_u)(\phi)(u)]_n = [(P_u \cdot P)(\phi)(u)]_n = \sum_{i=0}^{d} \mu_i . \underbrace{[P(\phi)(u)]_{n+i}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} l'}$$

   Ainsi, par l'unicité de la limite classique, on en déduit : $P(1) \cdot l' = l' = P_u(1) \cdot l = \Lambda_+(u)$, donc Λ_+ ne dépend pas du choix du polynôme $P \in E_+[X]$ choisi.

2. $\lambda.u \in EL_+$ et $\Lambda_+(\lambda.u) = \lambda.\Lambda_+(u)$, car $P_u(\phi)(\lambda.u) = \lambda.P_u(\phi)(u) \in \mathbf{L}$ donc

$$\Lambda_+(\lambda.u) = \lim(P(\phi)(\lambda.u)) = \lambda. \lim(P(\phi)(u)) = \lambda.\Lambda_+(u)$$

3. $u + v \in EL_+$ et $\Lambda_+(u + v) = \Lambda_+(u) + \Lambda_+(v)$, car avec le point 1 :

$$(P_u \cdot P_v)(\phi)(u + v) = P_v(\phi)\big(\underbrace{P_u(\phi)(u)}_{\in \mathbf{L}}\big) + P_u(\phi)\big(\underbrace{P_v(\phi)(v)}_{\in \mathbf{L}}\big) \in \mathbf{L}$$

$$\Lambda_+(u + v) = \Lambda_+((P_u \cdot P_v)(\phi)(u + v)) = P_v(1).\Lambda_+(P_u(\phi)(u)) + P_u(1).\Lambda_+(P_v(\phi)(v))$$

4. $P(\phi)(\mathbb{1}) = P(1).\mathbb{1} \longrightarrow 1$ donc $\mathbb{1} \in EL_+$ et $\Lambda_+(\mathbb{1}) = 1$.

5. L'indépendance du rang, $P_u(\phi)(\phi(u)) = \phi\big(P_u(\phi)(u)\big) \in \mathbf{L}$ alors :

$$\Lambda_+(\phi(u)) = \lim(P_u(\phi)(\phi(u))) = \lim(P_u(\phi)(u)) = \Lambda_+(u)$$

6. La positivité, supposons $u \leqslant 0$, puisque $P_u = \sum_{i=0}^{d} \mu_i \mathrm{X}^i \in \mathbb{R}_+[\mathrm{X}]$, alors,

$$\big[P_u(\phi)(u)\big]_n = \sum_{i=0}^{d} \underbrace{\mu_i \cdot u_{n+i}}_{\geqslant 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \geqslant 0$$

   Ainsi, $\Lambda_+(u) = l \geqslant 0$.

   On en déduit que $(\Lambda_+, EL_+) \in \mathcal{NL}$.

7. u est une suite consistante, on vient de montrer l'existence. Pour l'unicité, soit $(\mathcal{L}, EL) \in \mathcal{NL}(\mathbb{R})$, tel que $u \in EL$ alors $P_u(\phi)(u) \in NL \cap \mathbf{L}$ or d'après le théorème du respect des limites 2.3.3, on obtient :

$$\lim(P_u(\phi)(u)) = nl(P_u(\phi)(u)) = P_u(1).nl(u) = nl(u)$$

   D'où l'unicité et la consistance des suites de $EL_+ \subset L_c$.

□

3.4 Exemples de suites consistantes

Exercice 3.4.1. *On peut montrer que les suites suivantes sont consistante et calculer les nouvelles-limites de toutes ces suites :*

1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{1}_{k\mathbb{N}} \in L_c(\mathbb{R})$
2. $\mathbb{1}_{\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}} \in L_c(\mathbb{R})$
3. $\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall \rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad (P(n)\rho^n)_n \in L_c(\mathbb{C})$

Correction de l'exercice 3.4.1, Pour montrer la notions de consistances, il faut l'existence et d'unicité, que nous allons montrer séparement :

- L'existence :

1. La limite de Césaro est une nouvelle limite et on a :

$$\forall N > 1, \quad Cu_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{k\mathbb{N}}(n) = \frac{1}{N}\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{k} = cl(\mathbb{1}_{k\mathbb{N}})$$

2. La limite de Césaro, nous donne encore l'existence :

$$\forall N > 1, \quad 0 \leqslant Cu_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{\{k^2 \mid k\in\mathbb{N}\}}(n) = \frac{1}{N}\lfloor\sqrt{N}\rfloor \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 = cl(\mathbb{1}_{\{k^2 \mid k\in\mathbb{N}\}})$$

3. La pseudo-limite, c'est-à-dire la limite au sens d'Abel généralisé est une nouvelle-limite et l'on a :

$$\Psi[u](z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta u_k x^k = (z-1)\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = (z-1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(k)(\rho z)^k$$

Par linéarité, il suffit de le montrer sur tous les polynômes de la forme $P = (X+d)(X+d-1)...(X+1)$:

$$\Psi[u](z) := (z-1)\sum_{k=0}^{+\infty}(k+d)...(k+1)\cdot(\rho z)^k = \frac{(z-1)\cdot d!(-1)^d}{(1-\rho z)^{d+1}} \xrightarrow[z\to 1^-]{} 0 = pl(u)$$

- L'unicité : Soit $(\mathcal{L}, EL)$ un espace de limite tel que $u \in EL$, alors $< u > \subset EL$, donc $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(\phi)(u) \in EL$:

1. Posons $P = 1 + X + X^2 + ...X^{k-1}$ alors :

$$P(1)\cdot\mathcal{L}(\mathbb{1}_{k\mathbb{N}}) = \mathcal{L}(P(\phi)(\mathbb{1}_{k\mathbb{N}})) = \mathcal{L}\big(\mathbb{1}_{k\mathbb{N}} + \mathbb{1}_{k\mathbb{N}+1} + ... + \mathbb{1}_{k\mathbb{N}+k-1}\big) = \mathcal{L}(\mathbb{1}) = 1$$

Ainsi, $\mathcal{L}(\mathbb{1}_{k\mathbb{N}}) = \dfrac{1}{k} = cl(\mathbb{1}_{k\mathbb{N}})$, d'où l'unicité.

2. Soit $K \in \mathbb{N}$, posons $P = 1 + X + X^2 + ...X^K$, alors :

$$\forall m > K^2, \quad 0 \leqslant P(\phi)(\mathbb{1}_{\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}})(m) = \sum_{k=0}^{K} \mathbb{1}_{\{n^2+k \mid n\in\mathbb{N}\}}(m) \leqslant 1$$

En effet, on a $K^2 \leqslant n^2 < n^2+1 < ... < n^2+K < (n+1)^2$, donc $m > K^2$ ne peut appartenir qu'à au plus un ensemble. Ainsi, $\forall K \in N,\ 0 \leqslant nl(\mathbb{1}_{\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}}) = \frac{1}{P(1)}nl(P(\phi)(u)) \leqslant \frac{1}{K+1}$ donc $nl(\mathbb{1}_{\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}}) = 0 = cl(\mathbb{1}_{\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}})$.

3. Posons $Q = (X-\rho)^{d+1}$ et $d = \deg(P)$ alors :

$$[Q(\phi(u))]_n = \sum_{k=0}^{d+1} \binom{d+1}{k} (-\rho)^{d+1-k} \cdot P(n+k)\rho^{n+k} = (-1)^{d+1}\rho^{n+d+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{d+1} \binom{d+1}{k} (-1)^k P(n+k)}_{=\Delta^{d+1}(P)(n)=0}$$

En effet, l'opérateur $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ vérifient $\deg(\Delta(P)) \leqslant \deg(P) - 1$ donc $\deg(\Delta^{d+1}(P)) \leqslant \deg(P) - (d+1) = -1$, d'où $\Delta^{d+1}(P) = 0$.
Ainsi, $Q(1) \cdot \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(Q(\phi(u)) = 0$ or $Q(1) \neq 0$ donc $\mathcal{L}(u) = 0 = pl(u)$, d'où l'unicité.

Remarque 3.4.2. *On verra même dans la sous-partie 4.2, que les suites ci-dessous sont consistantes.*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad u(s) := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s} \right)_n \in L_c(\mathbb{C}), \qquad \Lambda_+(u(s)) = \eta(s)$$

On utilisera pourle montrer les théorème faible des suites consistantes 3.3.2 qui donne l'existence et l'unicité en même temps.

3.5 Isomorphisme des nouvelles-limites $\mathcal{NL}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{NL}(\mathbb{C})$

Proposition 3.5.1. *Soit EL un $\mathbb{C}$-espace de limites, alors $EL(\mathbb{R}) := EL \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace de limites.*

Preuve : EL et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont tous les 2 des $\mathbb{R}$-espace de limites et toutes les prorpiétés des $\mathbb{R}$-espaces de limites sont stables par intersection quelconque. □

Théorème 3.5.2 (L'isomorphisme des nouvelles-limites)**.** *La restriction canonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ établit une bijection de $\mathcal{NL}(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{NL}(\mathbb{R})$:*

$$\begin{array}{cccc} |_{\mathbb{R}} : & \mathcal{NL}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{NL}(\mathbb{R}) \\ & (nl, EL) & \longmapsto & \big(nl_{|\mathbb{R}}, EL(\mathbb{R})\big) \end{array} \quad \text{où} \quad \forall u \in EL(\mathbb{R}), \quad nl_{|\mathbb{R}}(u) := nl(u)$$

Preuve : L'application de restriction est bien définie car $EL(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espaces de limite. Puis, on vérifie facilement que $nl_{|\mathbb{R}}$ est un une nouvelle-limite sur $EL(\mathbb{R})$.
L'injectivité : Soient $(nl_1, EL_1), (nl_2, EL_2) \in \mathcal{NL}(\mathbb{C})$ ayant la même restrictions sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\forall u \in EL_1, \quad \frac{u+\overline{u}}{2} \in EL_1(\mathbb{R}) = EL_2(\mathbb{R}), \quad \frac{u-\overline{u}}{2} \in EL_1(\mathbb{R}) = EL_2(\mathbb{R}) \implies u \in EL_2$$

$$\implies nl_1(u) = nl_1\left(\frac{u+\overline{u}}{2}\right) + i \cdot nl_1\left(\frac{u-\overline{u}}{2}\right) = nl_2\left(\frac{u+\overline{u}}{2}\right) + i \cdot nl_2\left(\frac{u-\overline{u}}{2}\right) = nl_2(u)$$

De la même façon, on a l'autre sens donc $EL_1 = EL_2$ et $nl_1 = nl_2$.
La surjectivité : Soit $(nl_{|\mathbb{R}}, EL_{|\mathbb{R}}) \in \mathcal{NL}(\mathbb{R})$ construisons sa réciproque :

$$EL := \{u + iv \mid (u,v) \in EL_{|\mathbb{R}}^2\} \text{ est bien un } \mathbb{C}\text{-espace de limite}$$

$$\forall (u,v) \in EL_{|\mathbb{R}}^2, \quad nl(u + i \cdot v) := nl_{|\mathbb{R}}(u) + i \cdot nl_{|\mathbb{R}}(v)$$

nl est bien une forme linéaire stable par translation de rang, par conjugaison. Par construction sa restriction à $\mathbb{R}$ est bien $nl_{|\mathbb{R}}$. □

Remarque 3.5.3. *Grâce à ce théorème, on comprend que tous le travail que l'on a fait sur $\mathbb{R}$, est applicable sur $\mathbb{C}$, dés que l'on utilise des nouvelles limites.*

Corollaire 3.5.4 (Théorème faible des suites consistantes sur $\mathbb{C}$)**.**

$$EL_+(\mathbb{C}) = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists P_u \in E_+,\ P_u(\phi)(u) \in \mathbf{L}\}$$

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_+ : & EL_+(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & u & \mapsto & \lim(P(\phi)(u)) \end{array}, \quad \textit{où } P \in E_+ \textit{ tel que } P(\phi)(u) \in \mathbf{L}$$

$EL_+(\mathbb{C})$ est un espace de limites consistant ($EL_+(\mathbb{C})) \subset L_c(\mathbb{C})$) et Λ_+ est une nouvelle-limite.

Preuve : On applique directement l'isomorphisme 3.5.2 précedent sur le théorème 3.3.2. On a alors une nouvelle limite complexe $(\Lambda_+, EL_+(\mathbb{C})) \in \mathcal{NL}(\mathbb{C})$ car :

$$\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists P_u \in E_+,\ P_u(\phi)(u) \in \mathbf{L}(\mathbb{C})\} = \{a+ib \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists P_a, P_u \in E_+,\ P_a(\phi)(a), P_b(\phi)(b) \in \mathbf{L}(\mathbb{R})\}$$

$$\Lambda_+(a+i.b) = \lim\big((P_a \cdot P_b)(\phi)(a+i.b)\big) = \lim\big(P_a(\phi)(a)\big) + i.\lim\big(P_b(\phi)(b)\big) = \Lambda_+(a) + i.\Lambda_+(b)$$

Pour montrer que $EL_+(\mathbb{C})) \subset L_c(\mathbb{C})$, on a l'existence avec $(\Lambda_+, EL_+(\mathbb{C})) \in \mathcal{NL}(\mathbb{C})$. On a l'unicité, en se ramènant à $\mathbb{R}$, (avec l'isomorphisme 3.5.2) où le résultat est déjà démontré. $\square$

4 Applications sur les fonctions complexes η et ζ

4.1 Introduction préliminaire

On définit les fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet par :

$$\forall s \in \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}, \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

$$\forall s \in \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 0\}, \quad \eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

Ce sont des fonctions analytiques que l'on peut prolonger sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ pour ζ et sur $\mathbb{C}$ tout entier pour η. On peut les relier par l'équation de fonctions analytiques que l'on démontre sur $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$ et que l'on prolonge à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad \eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

__Preuve__ : Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$, alors les séries $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^s}, \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$, converge absolument, donc on peut faire les opérations suivantes :

$$\zeta(s) - \eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^k}{k^s} = \sum_{2i=2}^{+\infty} \frac{2}{(2i)^s} = \frac{2}{2^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{i^s} = 2^{1-s}\zeta(s)$$

Ce qui nous donne le résultat sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1\}$ que l'on prolonge par analyticité sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. $\square$

On peut alors étudier la fonction si ζ de Riemann en étudiant la fonction η. La première partie va nous montrer que :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} \right)_n \in L_c, \quad \text{et que} \quad \Lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} \right) = \eta(s)$$

Ceci nous apporte une nouvelle approche de la fonction η qui est ainsi prolongeable sur tout $\mathbb{C}$, car les séries convergent de manière consistantes.

Dans la deuxième partie, nous utiliserons la formule d'Euler-Maclaurin, pour détermeiner certaines valeurs exactes de η donc de ζ :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \eta(-p) = (1 - 2^{p+1}) \frac{-\beta(p+1)}{p+1} = (1 - 2^{p+1})\zeta(-p)$$

Dans la dernière partie, toujours avec la formule d'Euler Maclaurin, nous allons déterminer des développements limités de sommes et des équivalents simples de produits comme la formule de Stirling.

$$\prod_{k=1}^{n} k^{k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}} \times \frac{n^{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}}{e^{\frac{n^3}{9} - \frac{n}{12}}}$$

4.2 La consistance de la fonction η

Définition 4.2.1. *Soient* $s \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta\eta_n(k,s) := \frac{(-1)^{n+k+1}\cdot \ln(n)^k}{n^s} \quad , \quad \eta_n(k,s) := \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+k+1}\cdot \ln(p)^k}{p^s}$$

Théorème 4.2.2 (Théorème de consistance de la fonction η)**.** *Soient* $s \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$,

$$\sum \Delta\eta(k,s) = \eta(k,s) = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+k+1}\cdot \ln(p)^k}{p^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in EL_+(\mathbb{C}) \subset L_c(\mathbb{C})$$

$$\textit{Avec} \quad \Lambda_+\left(\sum \Delta\eta(k,s)\right) = \Lambda_+\big(\eta(k,s)\big) = \eta^{(k)}(s)$$

Pour commencer montrons ces propositions :

Proposition 4.2.3. *Soient* $s \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N},\ P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{d}{ds}\left[P(\phi)(\Delta\eta(k,s))\right]_n = \left[P(\phi)(\Delta\eta(k+1,s))\right]_n$$

<u>*Preuve*</u> *:* Soient $s \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{d}{ds}\left(\Delta\eta_n(k,s)\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{(-1)^{n+k+1}\cdot \ln(n)^k}{e^{s\cdot\ln(n)}}\right) = \frac{(-1)^{n+k+2}\cdot \ln(n)^{k+1}}{n^s} = \Delta\eta_n(k+1,s)$$

Pour $P = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot X^i$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{d}{ds}\left[P(\phi)(\Delta\eta(k,s))\right]_n = \frac{d}{ds}\left(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot \Delta\eta_{n+i}(k,s)\right) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot \Delta\eta_{n+i}(k+1,s)) = \left[P(\phi)(\Delta\eta(k+1,s))\right]_n$$

$\square$

Proposition 4.2.4.

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(\phi)\left(\sum u\right) = \sum P(\phi)(u) + \left[P(\phi)\left(\sum u\right) - P(\phi)(u)\right]_0$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(\phi)\left(\sum u\right) = \sum P(\phi)(u) + \left[P(\phi)\left(\sum u\right) - P(\phi)(u)\right]_1$$

<u>*Preuve*</u> *:* Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot X^k \in \mathbb{R}[X], n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left[\sum u\right]_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ donc :

$$\left[P(\phi)\left(\sum u\right)\right]_n = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot \sum_{i=0}^{n+k} u_i = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i + \sum_{i=k}^{n+k} u_i\right) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} u_i + \sum_{j=0}^{n} u_{j+k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} u_i - u_k\right) + \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot u_{j+k}}_{=[P(\phi)(u)]_j} = \left[P(\phi)\left(\sum u\right) - P(\phi)(u)\right]_0 + \left[\sum P(\phi)(u)\right]_n$$

$\square$

Ainsi, au lieu de travailler sur les suites de la forme $P(\phi)\left(\sum u\right)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$, il suffit de faire l'étude sur les suites de la forme $P(\phi)\big(u\big)$. Ici, on travaille donc sur $P(\phi)\big(\Delta\eta(k,s)\big)$ plutôt que sur $P(\phi)\big(\eta(k,s)\big)$.

Lemme 4.2.5. *Soit $N \in \mathbb{N}$, on a l'égalité suivante :*

$$\forall p \in [\![0, N]\!], \quad \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^i \cdot i^p = 0$$

<u>Preuve</u> : Soient $N \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, N]\!]$, on commence par voir que :

$$\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^i \cdot i(i-1)\cdots(i-p+1) = \sum_{i=p}^{N} \frac{N! \cdot (-1)^i}{(N-i)!i!} \frac{i!}{(i-p)!}$$

$$= \frac{N!}{(N-p)!} \sum_{i=p}^{N} \frac{(N-p)!(-1)^i}{(N-i)!(i-p)!} = \frac{N!}{(N-p)!} \sum_{i=p}^{N} \binom{N-p}{i-p} (-1)^i = \frac{N!}{(N-p)!} \cdot (1-1)^{N-p} = 0$$

Or puisque la famille $\big(X(X-1)\cdots(X-p+1)\big)_{p \in [\![0,N]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$, nous pouvons écrire les polynômes X^p pour $p \in [\![0, N]\!]$, comme combinaison linéaire de cette base. De plus, puisque l'équation est linéaire, on obtient donc que :

$$\forall p \in [\![0, N]\!], \quad \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^i \cdot i^p = 0$$

□

Cette égalité va juste nous servir à démontrer le second lemme ci-dessous.

Lemme 4.2.6. *Soient $s \in \mathbb{C}$, $k, N \in \mathbb{N}$, on pose $P = \frac{1}{2^N} \cdot (X+1)^N$ alors :*

$$\exists C(s,k,N) > 0, \forall z \in B(s,1), \quad \Big| \big[P(\phi)\big(\Delta\eta(k,z)\big)\big]_n \Big| \leqslant \frac{\ln(n)^k}{n^{\Re(s)+N}} C(s,k,N)$$

avec $B(s,1) = \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z-s| < 1\big\}$. Cette domination des termes des séries est nécessaire pour utiliser le théorème de dérivabilité.

<u>Preuve</u> : L'idée de la démonstration est de voir que le polynôme $(X+1)$ permet de passer d'un $O\left(\frac{1}{n^s}\right)$ à un $O\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right)$:

$$[(X+1)(\phi)(\Delta\eta(0,s))]_n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^s} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \frac{(-1)^n}{n^s}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s} - 1\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}s}{n^{s+1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right)$$

Donc le polynôme $P = \frac{1}{2^N}(X+1)^N$ permet de passer $O\left(\frac{1}{n^s}\right)$ à un $O\left(\frac{1}{n^{s+N}}\right)$.

Soient $N \in \mathbb{N}, s, z \in \mathbb{C}$, tel que $|z-s| < 1$. On pose un $n_0 = \lfloor 2(|s|+1)N \rfloor + 1$, pour avoir :

$$(*) \quad \forall i \in [\![0, N]\!],\ \forall n \geqslant n_0, \quad \frac{(|z|+1)i}{n} \leqslant \frac{1}{2}$$

On prend pour commencer un $i \in [\![0, N]\!]$ et $n \geqslant n_0$, on a alors :

$$(n+i)^{-z} = \frac{1}{n^z} \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{-z} = \frac{1}{n^z} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^j \cdot z(z+1)\cdots(z+1-j)}{j!}}_{=c_j(z)} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^j$$

Or, on majore les $|z| + l \leqslant |s| + 1 + l \leqslant (|s|+1)(l+1)$ pour $l \in \mathbb{N}$.

$$|c_j(z)| = \left|\frac{(-1)^j \cdot \prod_{l=0}^{j-1} z + l}{j!}\right| \leqslant \frac{\prod_{l=0}^{j-1} |z| + l}{j!} \leqslant \frac{\prod_{l=0}^{j-1}(|s|+1)(l+1)}{j!} = (|s|+1)^j$$

Toutes la dépendance en z du reste que l'on veut majorer par avec cette majoration et cette autre-ci $\Re(z) \geqslant \Re(s) - 1$, car $|\Re(z-s)| \leqslant |z-s| < 1$. Majorons ensuite le reste de la somme correspondant au $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{s+N+1}}\right)$.

$$R_1(z,n,i,N) = \frac{1}{n^z} \cdot \sum_{j=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^j \cdot z(z+1)\cdots(z+1-j)}{j!} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^j = \frac{1}{n^z} \cdot \sum_{j=N+1}^{+\infty} c_j(z) \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^j$$

$$|R_1(z,n,i,N)| \leqslant \frac{1}{n^{\Re(z)}} \sum_{j=N+1}^{+\infty} \left(\frac{i(|s|+1)}{n}\right)^j \overset{(*)}{\leqslant} \frac{i^{N+1}(|s|+1)^{N+1}}{n^{(\Re(s)-1)} \cdot n^{N+1}} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l \leqslant \frac{C_1(s,i,N)}{n^{\Re(s)+N}}$$

avec $C_1(s,i,N) = 2i^{N+1}(|s|+1)^{N+1}$, on veut juste l'indépendance en n et en z. De plus, on observe qu'il existe un constante $C_2(k,i,N) > 0$ tel qu'on ait :

$$\ln(n+i) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \ln(n) + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^j + R_2(n,k,i,N), \quad |R_2(n,k,i,N)| \leqslant \frac{C_2(k,i,N)}{n^{N+1}}$$

Donc par produit, on peut trouver une constante $C_3(k,i,N) > 0$, tel que :

$$\ln(n+i)^k = \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{k} b_{p,q}(i,k) \frac{\ln(n)^q}{n^p} \cdot i^p + R_3(n,k,i,N), \quad |R_3(n,k,i,N)| \leqslant \frac{\ln(n)^k}{n^{N+1}} C_3(k,i,N)$$

En faisant le produit des dévellopements limités, nous pouvons dire que :

$$\frac{\ln(n+i)^k}{(n+i)^z} = \frac{1}{n^z} \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{k} a_{p,q}(z) \frac{\ln(n)^q}{n^p} \cdot i^p + R_4(n,z,k,i,N)$$

$$R_4(n,z,k,i,N) = \underbrace{R_1(n,z)}_{|\cdot| \leqslant \frac{C_1}{n^{N+\Re(s)}}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{k} b_{p,q}(i,k) \frac{\ln(n)^q}{n^p} \cdot i^p\right)}_{\leqslant C \cdot \ln(n)^k}$$

$$+ \underbrace{R_3(n,z)}_{|\cdot| \leqslant \frac{\ln(n)^k}{n^{N+1}} C_3} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^z}}_{|\cdot| \leqslant \frac{1}{n^{\Re(s)-1}}} \sum_{j=0}^{N} \underbrace{c_j(z) \left(\frac{i}{n}\right)^j}_{|\cdot| \leqslant \frac{1}{2^j} \ (*)} + \underbrace{R_1 \cdot R_3}_{ok}$$

Il existe une constante $C_4(s,k,N) > 0$, (que l'on suppose indépendante de $i \in [\![1,N]\!]$ car on prends le max sur $i \in [\![1,N]\!]$) tel que l'on puisse majorer le reste final $R_4(n,z,k,i,N)$:

$$\frac{\ln(n+i)^k}{(n+i)^z} = \frac{1}{n^s}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{k} a_{p,q}(z)\frac{\ln(n)^q}{n^p}\cdot i^p + R_4(n,z,k,i,N), \quad |R_4(n,z,k,i,N)| \leqslant \frac{\ln(n)^k}{n^{\Re(s)+N}}C_4(s,k,N)$$

On a fait tous le travail, il nous reste plus qu'à voir qu'avec le lemme précédent et le pôlynome $P = \frac{1}{2^N}\cdot(X+1)^N$, on a $\forall n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
\big[P(\phi)\big(\Delta\eta(k,z)\big)\big]_n &= \frac{1}{2^N}\cdot\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\Delta\eta_{n+i}(k,z) = \frac{1}{2^N}\cdot\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\frac{(-1)^{n+i+k+1}\cdot\ln(n+i)^k}{(n+i)^z} \\
&= \frac{1}{2^N}\cdot\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-1)^i\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{k}a_{p,q}(s)\frac{\ln(n)^q}{n^p}\cdot i^p + R_4(n,z,k,i,N)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^N}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\cdot\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{k}a_{p,q}(z)\frac{\ln(n)^q}{n^p}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-1)^i\cdot i^p}_{=0} + \frac{1}{2^N}\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-1)^i R_4(n,z,k,i,N)$$

Donc on a bien ce que l'on veut quitte à faire un max sur les $n < n_0$, car $\forall n \geqslant n_0$,

$$\left|\big[P(\phi)\big(\Delta\eta(k,z)\big)\big]_n\right| \leqslant \left|\frac{1}{2^N}\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-1)^i\cdot R_4\right| \leqslant \frac{1}{2^N}\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}\frac{\ln(n)^k}{n^{\Re(s)+N}}C_4 = \frac{\ln(n)^k}{n^{\Re(s)+N}}C_4(s,k,N)$$

□

Maintenant que l'on a fait le plus dure, on peut passer à la preuve du théorème, en s'aidant du corollaire ci-dessous, provenant de l'étude des suites consistantes.

Proposition 4.2.7.

$$Si \quad \exists P \in \mathbb{C}[X] \mid \quad P(\phi)(u) \in L(\mathbb{C}) \quad et \qquad et \quad P(1) \neq 0$$

$$alors \qquad u \in EL_+(\mathbb{C}) \subset L_c(\mathbb{C}) \quad et \quad \Lambda_+(u) = \frac{\lim(P(\phi)(u))}{P(1)}$$

Preuve : **La démonstration du théorème 4.2.2 :**

Soient $s_0 \in \mathbb{C}, k, N \in \mathbb{N}$, tel que $\Re(-s) + N \geqslant 3$ et posons $P = \frac{1}{2^N}(X+1)^N$. Nous allons montrer que le théorème est localement vraie sur la Boule $B(s_0,1) = \{s \in \mathbb{C} \mid |s - s_0| < 1\}$ en utilisant directement la domination du lemme 4.2.6. Soit $s \in B(s_0,1)$, on utilise d'abord la proposition 4.2.4 :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad [P(\phi)\,(\eta(k,s))]_m = \sum_{n=0}^{m}[P(\phi)(\Delta\eta(k,s))]_n + [P(\phi)\,(\eta(k,s)) - P(\phi)(\Delta\eta(k,s))]_1$$

$$\exists C(s,k,N) > 0, \forall z \in B(s,1), \qquad \left|\big[P(\phi)\big(\Delta\eta(k,z)\big)\big]_n\right| \leqslant \frac{\ln(n)^k}{n^{\Re(s)+N}}C(s,k,N) \leqslant \frac{C'(s,k,N)}{n^2}$$

On a donc $\forall s \in B(s_0,1)$, $P(\phi)\,(\eta(k,s)) \in L(\mathbb{C})$ car converge uniformément, car la série $\sum_{n\geqslant 0}[P(\phi)(\Delta\eta(k,s))]_n$ converge normalement.

D'après la proposition 4.2.7, on a directement que : $\forall s \in B(s_0, 1)$, car $P(1) = 1$,

$$\eta(k, s) \in L_c(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \Lambda_+(\eta(k, s)) = \lim \big(P(\phi)(\eta(k, s))\big)$$

De plus, par la convergence normale, nous pouvons dériver la variable complexe s sous le signe somme pour tout $s \in B(s_0, 1)$. En effet, par la proposition 4.2.3, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{d}{ds} \left[P(\phi)(\Delta\eta(k, s))\right]_n = \left[P(\phi)(\Delta\eta(k+1, s))\right]_n$$

Donc il vient que $\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall s \in B(s_0, 1)$, puisque toute les dérivées, il y a convergence normale :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{d}{ds}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[P(\phi)(\Delta\eta(k, s))\right]_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{ds} \left[P(\phi)(\Delta\eta(k, s))\right]_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[P(\phi)(\Delta\eta(k+1, s))\right]_n$$

Cette intervertion limite et dérivé se traduit directement sur l'équation, on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in B(s_0, 1), \quad \frac{d}{ds}\left(\Lambda_+\big(\eta(k, s)\big)\right) = \frac{d}{ds}\Big(\lim \big(P(\phi)(\eta(k, s))\big)\Big)$$

$$= \lim \left(\frac{d}{ds}\left(P(\phi)(\eta(k, s))\right)\right) = \lim \big(P(\phi)(\eta(k+1, s))\big) = \Lambda_+\big(\eta(k+1, s)\big)$$

On obtient alors que $\forall k \in \mathbb{N}$, $s \longmapsto \Lambda_+\big(\eta(k, s)\big)$ est holomorphe sur $B(s_0, 1)$ pour tout $s_0 \in \mathbb{C}$ donc elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier ! On en conclut que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad s \longmapsto \Lambda_+\big(\eta(k, s)\big)$ est entière. De plus, on sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}, \quad \eta^{(k)}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k+1} \cdot \ln(n)^k}{n^s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta\eta_n(k, s) = \Lambda_+\big(\eta(k, s)\big)$$

Par prolongement des fonctions entières, on conclut que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{C}, \quad \eta^{(k)}(s) = \Lambda_+\big(\eta(k, s)\big)$.

□

Corollaire 4.2.8. *Soient* $s \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\Delta\eta(k, s) = \left(\frac{(-1)^{n+k+1} \cdot \ln(n)^k}{n^s}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in EL_+(\mathbb{C}) \subset L_c(\mathbb{C}) \quad \textit{avec} \quad \Lambda_+\left(\Delta\eta(k, s)\right) = 0$$

Preuve : C'est une application directe de l'existence de limite par la suite des différences. Soient $k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{C}$, on a :

$$\eta(k, s) \in EL_+(\mathbb{C}) \implies \Delta\eta(k, s) \in EL_+(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \Lambda_+\left(\Delta\eta(k, s)\right) = 0$$

□

4.3 La formule d'Euler Maclaurin

Définition 4.3.1 (Les nombres de Bernoulli)**.** *Définissons par une récurrence forte les nombres de Bernoulli B et une variante que je vais appeler β (plus cohérente pour notre utilisation) :*

$$\beta(0) = B(0) = 1 \quad \textit{et} \quad \beta(1) = -B(1) = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \geqslant 2, \quad \beta(n) = B(n) = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B(k)$$

Pour éviter d'introduire des notations inutiles pour la suite, nous allons appliquer la formule d'Euler Maclaurin directement dans le cas particulier suivant.

Théorème 4.3.2 (La formule d'Euler Maclaurin :)**.** *Soient $p \in \mathbb{N}^*$,$f \in \mathcal{C}^p([0, +\infty[)$ une fonction à valeurs complexes, Alors :*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_p(f)$$

Si on note $f^{(-1)}$ une primitive arbitraire de f sur $[0, +\infty[$, on peut simplifer l'expression pour obtenir :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant m, \quad \sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_p(f)$$

avec le reste $R_p(f)$:

$$|R_p(f)| \leqslant \frac{4}{(2\pi)^p} \int_m^n \left|f^{(p)}(x)\right| dx$$

Je ne vais pas démontrer ce théorème. Il est un minimum connu. Nous allons cependant passer un peu de temps à démontrer le théorème suivant, en utilisant directement celui ci-dessus.

Théorème 4.3.3 (La formule d'Euler Maclaurin :)**.** *Soient $p \in \mathbb{N}^*$,$f \in \mathcal{C}^p([1, +\infty[)$ une fonction à valeurs complexes, on suppose de plus que :*

$$f^{(p)}(x) \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\text{ et que } f^{(p)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si on note $f^{(-1)}$ une primitive arbitraire de f sur $[1, +\infty[$, on peut simplifer l'expression pour obtenir :

$$\forall n \geqslant 2, \exists C_f \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(n) + C_f + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

$$\forall n \geqslant 2, \exists \widetilde{C}_f \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(2k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(2n) + \widetilde{C}_f + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot f(k) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(2^k - 1) f^{(k-1)}(n) \right) + C_f - 2\widetilde{C}_f + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

Ces formules vont nous être très utiles pour effectuer les calculs de developpement limité sans effort. On aura en pratique, (grâce à la consistance de η) directement la valeur de la constante $C_f - 2\widetilde{C}_f = \eta^{(k)}(s)$, pour $s \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec un f choisi adéquate. On va décomposer la preuve en trois parties.

Lemme 4.3.4. *Soient $p \in \mathbb{N}^*$,$f \in \mathcal{C}^p([1, +\infty[)$ une fonction à valeurs complexes, on suppose de plus que $f^{(p)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On note $f^{(-1)}$ une primitive arbitraire de f sur $[1, +\infty[$, on peut simplifer l'expression pour obtenir :*

$$\forall n \geqslant 2, \exists C_f \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(n) + C_f + \underset{n \to +\infty}{O} \left(\int_n^{+\infty} |f^{(p)}(t)| dt \right)$$

Preuve : Supposons les hypothèses du lemme. On peut utliser la formule d'Euler Maclaurin 4.3.2 à f sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Ce qui donne, soit $m,n \in \mathbb{N}, n \geqslant m$,

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_p(f)$$

On peut simplifier l'expression.

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = 1\cdot(f^{(-1)}(n) - f^{(-1)}(m)) + \frac{f(n)-f(m)}{2} + f(m) + \sum_{k=2}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_p(f)$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_p(f)$$

Posons (avec m=1), pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} f(k) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(1))$$

Notre but est alors de montrer que la suite (u_n) converge à une certaine vitesse. Pour cela, on va majorer $|u_{n+1} - u_n|$, il y a alors beaucoup de simplification :

$$|u_{n+1} - u_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n+1) - f^{(k-1)}(n)) \right| = |R_p(f)| \leqslant \frac{4}{(2\pi)^p} \int_n^{n+1} \left| f^{(p)}(x) \right| dx$$

De plus, puisque on a supposé $f^{(p)}$ intégrable, on a par la relation de Chasle que (u_n) converge et en posant l sa limite, on a que :

$$|u_n - l| = \left| u_n - \left(u_n + \sum_{k=n}^{\infty} u_{k+1} - u_k \right) \right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |u_{k+1} - u_k| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{4}{(2\pi)^p} \int_k^{k+1} \left| f^{(p)}(x) \right| dx$$

$$|u_n - l| \leqslant \frac{4}{(2\pi)^p} \int_n^{+\infty} \left| f^{(p)}(x) \right| dx$$

D'où le résultat voulue. □

Lemme 4.3.5.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 2^{k-1} \cdot \beta_k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (1 - 2^{m-1}) \cdot \beta_m$$

Preuve : Nous allons appliquer le théorème pour f un polynôme, soit $p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$ donc $f^{(k)}(x) = \frac{x^{p-1-k}}{(p-1-k)!}$, pout tout $k \in [\![-1, p-1]\!]$, on a de plus, $f^{(p)} = 0$, en particulier intégrable. Bref, f vérifie les hypothèses de la formule d'Euler Maclaurin (le théorème 4.3.2) avec

$$|R_p(f)| \leqslant \frac{4}{(2\pi)^p} \int_n^{+\infty} \left| f^{(p)}(x) \right| dx = \frac{4}{(2\pi)^p} \int_m^n 0 dx = 0$$

donc on a l'égalité de la formule, le reste est nulle !

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant m, \qquad \sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m))$$

On fait de même avec $g(x) = f(2x)$ et $h(x) = f(2x+1)$ donc

$$\forall k [\![-1, p]\!], \quad g(x)^{(k)} = 2^k f^{(k)}(2x), \quad h(x)^{(k)} = 2^k f^{(k)}(2x+1)$$

. De plus, on sait que :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(2k) + \sum_{k=0}^{n} f(2k+1)$$

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(2n+1) - f^{(k-1)}(0)) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} 2^{k-1}(f^{(k-1)}(2n) - f^{(k-1)}(0) + f^{(k-1)}(2n+1) - f^{(k-1)}(-1))$$

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!}(1-2^{k-1}) f^{(k-1)}(2n+1) \; - \frac{\beta_p}{p!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} 2^{k-1}(f^{(k-1)}(2n) - f^{(k-1)}(-1) \; - \frac{2^{p-1}\beta_p}{p!}$$

Or, avec la formule de Taylor, en dérivant jusqu'à avoir le reste nulle car f est un polynôme.

$$f^{(m-1)}(2n+1) = f^{(m-1)}(2n) + \frac{f^{(m)}(2n)}{1!} + ... + \frac{f^{(p-1)}(2n)}{(p-m)!} + \underbrace{\frac{f^{(p)}(2n)}{(p+1-m)!} + ...}_{=0} = \sum_{k=m}^{p} \frac{f^{(k-1)}(2n)}{(k-m)!}$$

En injectant dans le terme de droite de l'équation du dessus, on a :

$$\sum_{m=0}^{p} \frac{\beta_m}{m!}(1-2^{m-1}) \cdot f^{(m-1)}(2n+1) = \sum_{m=0}^{p} \frac{\beta_m}{m!}(1-2^{m-1}) \cdot \sum_{k=m}^{p} \frac{f^{(k-1)}(2n)}{(k-m)!}$$

Or, on sait que $\sum_{m=0}^{p} \sum_{k=m}^{p} = \sum_{0 \leqslant m \leqslant k \leqslant p} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{m=0}^{k}$, donc

$$= \sum_{k=0}^{p} \sum_{m=0}^{k} \frac{\beta_m}{m!}(1-2^{m-1}) \frac{f^{(k-1)}(2n)}{(k-m)!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} 2^{k-1}(f^{(k-1)}(2n) - \underbrace{f^{(k-1)}(-1)}_{=(-1)^{p-k}/(p-k)!} \;) + \frac{(1-2^{p-1})\beta_p}{p!}$$

$$\sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{m=0}^{k} \frac{(1-2^{m-1})\beta_m}{m!(k-m)!} - \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} \right) f^{(k-1)}(2n) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k(-1)^{p+1-k}}{k!(p-k)!} + \frac{(1-2^{p-1})\beta_p}{p!}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, par des équivalents simples, on a nécessairement que $f^{(k-1)}(2n) \longrightarrow +\infty$ pour $k < p$:

$$\sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{k} \frac{(1-2^{m-1})\beta_m}{m!(k-m)!} - \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} \right)}_{=0} \underbrace{f^{(k-1)}(2n)}_{\longrightarrow +\infty} = C$$

Avec

$$C = \frac{2^{p-1}\beta_p}{p!} - \sum_{m=0}^{p} \frac{(1-2^{m-1})\beta_m}{m!(k-m)!} + \sum_{m=0}^{p} \frac{2^{m-1}(-1)^{p+1-m}\beta_m}{m!(p-m)!} + \frac{(1-2^{p-1})\beta_p}{p!}$$

On a ainsi montré pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=0}^{k} \binom{m}{k} (1-2^{m-1})\beta_m = 2^{k-1}\beta_k \quad \text{et même} \quad \sum_{m=0}^{k} \binom{m}{k} 2^{m-1} \underbrace{(-1)^m \beta_m}_{=B_m} = (1-2^{k-1}) \underbrace{\beta_k(-1)^k}_{=B_k}$$

$\square$

Preuve : **La démonstration du théorème 4.3.3 :**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$,$f \in \mathcal{C}^p([1,+\infty[)$, tel que $f^{(p)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que $f^{(p)}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si on note $f^{(-1)}$ une primitive arbitraire de f sur $[1,+\infty[$, en utilisant lemme 4.3.4 sur f, on a puisque $f^{(p)}$ est intégrable :

$$\forall n \geqslant 2, \exists C_f \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(n) + C_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Puis sur $x \mapsto f(2x)$ et sur $x \mapsto f(2x+1)$,

$$\forall n \geqslant 2, \exists \widetilde{C_f} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(2k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(2n) + \widetilde{C_f} + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$\forall n \geqslant 2, \exists \bar{C_f} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{n} f(2k+1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(2n+1) + \bar{C_f} + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

On a maintenant toutes les données pour établir le dernier résultat.

Pour $N = 2n$,

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} \cdot f(k) = \sum_{k=1}^{2n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} 2f(2k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} \left(1 - 2 \cdot 2^{k-1}\right) f^{(k-1)}(2n) + C_f - 2\widetilde{C_f} + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$= (-1)^{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} \left(2^k - 1\right) f^{(k-1)}(2n) \right) + C_f - 2\widetilde{C_f} + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Pour $N = 2n+1$,

$$\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1} \cdot f(k) = \sum_{k=1}^{n} 2f(2k+1) - \sum_{k=1}^{2n+1} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} \left(2^n - 1\right) f^{(k-1)}(2n+1) + 2\bar{C_f} - C_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$= (-1)^{2n+2} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} \left(2^k - 1\right) f^{(k-1)}(2n+1) \right) + 2\bar{C_f} - C_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Il nous reste plus qu'à montrer que $C_f - 2\widetilde{C_f} = 2\bar{C_f} - C_f$, c'est-à-dire que $C_f = \widetilde{C_f} + \bar{C_f}$. Pour cela, on sait que,

$$\sum_{k=1}^{2n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(2k) + \sum_{k=0}^{n} f(2k+1)$$

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(2n+1) + C_f = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} 2^{k-1} (f^{(k-1)}(2n) + f^{(k-1)}(2n+1)) + \widetilde{C_f} + \bar{C_f} + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$\sum_{m=0}^{p} \frac{\beta_m(1 - 2^{m-1})}{m!} f^{(m-1)}(2n+1) - \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(2n) = \widetilde{C_f} + \bar{C_f} - C_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Comme pour le lemme 4.3.4, on utilise la formule de Taylor-Lagrange, en dérivant jusqu' p car f est de classe $\mathcal{C}^p$. $\exists \xi_{m,n} \in]0,1[$,

$$f^{(m-1)}(2n+1) = \sum_{k=m}^{p} 1^{k-m} \frac{f^{(k-1)}(2n)}{(k-m)!} + 1^{p+1-m} \underbrace{\frac{f^{(p)}(2n + \xi_{m,n})}{(p+1-m)!}}_{= \underset{n\to+\infty}{o(1)}}$$

$$\sum_{k=0}^{p} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{k} \frac{\beta_m(1-2^{m-1})}{m!(k-m)!} - \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} \right)}_{=0} f^{(k-1)}(2n) + \underset{n\to+\infty}{o(1)} = \widetilde{C}_f + \bar{C}_f - C_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

On a donc que $C_f = \widetilde{C}_f + \bar{C}_f$, ce qui finit la preuve :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot f(k) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{k!} (2^k - 1) f^{(k-1)}(n) \right) + C_f - 2\widetilde{C}_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

□

4.4 Les développements limités des sommes partielles de η et de ζ

Définition 4.4.1. *Pour simplifier les expressions ci dessous, nous introduisons les notations suivantes :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \beta_k, \ \textit{le}\, k^{eme} \textit{ nombre de Bernoulli sauf en 1, } \beta_1 = \frac{+1}{2} = -B_1$$

$$\forall k \geqslant -1, \quad H(s,k) := \begin{cases} \frac{-1}{s+1} & Si \quad k = -1 \\ 0 & Si \quad k = 0 \\ \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{s-m} & Si \quad k \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\forall s \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{s+1}{k} := \frac{(s+1)s(s-1)\cdot \ldots \cdot (s-k+2)}{k!} = \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(s-k+2)k!}$$

On poserons très souvent $f^{(-1)}$ une primitive arbitraire de f, que l'on fixera une fois choisie.

Remarque 4.4.2. *Par convention, on peut retrouver la valeur de H en 0 car c'est une somme vide et en -1 car on a alors :*

$$H(s,-1) = \sum_{m=0}^{-2} \frac{1}{s-m} = -\sum_{m=-1}^{-1} \frac{1}{s-m} = \frac{-1}{s+1}$$

En effet, je pense que le meilleur moyen de généraliser une telle somme qui a pour terme générale la suite $(f(k))_k$ où f est une fonction assez régulière, c'est de poser la convention :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{k=a}^{b} f(k) = -\sum_{k=b+1}^{a-1} f(k) \quad \textit{avec} \quad \sum_{k=a}^{a-1} f(k) = -\sum_{k=a}^{a-1} f(k) = 0$$

Dans la suite, nous allons pleinement utiliser les théorème 4.2.2 et 4.3.3 pour obtenir celui-ci :

Théorème 4.4.3. *Soient $s \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\}), p \in \mathbb{Z}$ tel que $\Re(s) - p + 1 \geqslant 0 > \Re(s) - p$,*

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{k=0}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k n^{s-k+1}}{s+1} + \zeta(-s) + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^s \ln(k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k (\ln(n) + H(s,k-1)) n^{s-k+1}}{s+1} - \zeta'(-s) + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^s = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k (2^k - 1) n^{s-k+1}}{s+1} \right) + \eta(-s) + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^s \ln(k) = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k (\ln(n) + H(s,k-1))(2^k - 1) n^{s-k+1}}{s+1} \right) - \eta'(-s) + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Pour commencer, on va toujours prendre un $s \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\})$ et un $p \in \mathbb{N}$ tel $p > \Re(s) + 2$. Nous allons optimiser ce p à la toute fin de la démonstration du théorème. Ensuite, on montrera un résultat plus précis lorsque $s \in \mathbb{N}$. Puis, on traitera le cas $s = -1$ séparément.

Lemme 4.4.4. *Soient $s \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\}), p \in \mathbb{N}$, posons $\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = x^s$ et $g(x) = \ln(x) x^s$, alors f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [1, +\infty[, \quad \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} = \frac{(s+1)s(s-1)\cdots(s-k+2)}{k!(s+1)} \cdot x^{s-k} = \binom{s+1}{k} \frac{x^{s-k+1}}{s+1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [1, +\infty[, \quad \frac{g^{(k-1)}(x)}{k!} = \binom{s+1}{k} \frac{x^{s-k+1}}{s+1} \big(\ln(x) + H(s, k-1) \big)$$

<u>Preuve</u> : Pour les primitives :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \frac{f^{(-1)}(x)}{0!} = \frac{1}{0!(s+1)} \cdot x^{s+1}$$

donc $f'^{(-1)}(x) = x^s = f(x)$.

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \frac{g^{(-1)}(x)}{0!} = \frac{1}{(s+1)} \cdot x^{s+1} \big(\ln(x) + H(s, -1) \big) = \frac{x^{s+1}}{(s+1)} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{(s+1)} \right)$$

donc $g'^{(-1)}(x) = x^s \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{(s+1)} \right) + \frac{x^{s+1}}{(s+1)} \cdot \frac{1}{x} = g(x)$.

Nous allons le démontrer directement pour les primitives, puis par récurrence sur $k \geqslant 1$. C'est immédiat pour $k = 1$. Soit $k \geqslant 1$, si $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$\frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} = \binom{s+1}{k} \frac{x^{s-k+1}}{s+1} \quad \text{alors} \quad \frac{f^{(k)}(x)}{(k+1)!} = \binom{s+1}{k} \frac{s-k+1}{k+1} \frac{x^{s-k}}{s+1} = \binom{s+1}{k+1} \frac{x^{s-k}}{s+1}$$

Si $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$\frac{g^{(k-1)}(x)}{k!} = \binom{s+1}{k} \frac{x^{s-k+1}}{s+1} \big(\ln(x) + H(s, k-1) \big)$$

alors,

$$\frac{g^{(k)}(x)}{(k+1)!} = \binom{s+1}{k}\frac{s-k+1}{k+1}\frac{x^{s-k}}{s+1}\big(\ln(x)+H(s,k-1)\big)+\binom{s+1}{k}\frac{x^{s-k+1}}{s+1}\cdot\frac{1}{x}\frac{s-k+1}{(k+1)(s-k+1)}$$

$$\frac{g^{(k)}(x)}{(k+1)!} = \binom{s+1}{k+1}\frac{x^{s-k}}{s+1}\left(\ln(x)+H(s,k-1)+\frac{1}{s-k+1}\right) = \binom{s+1}{k+1}\frac{x^{s-k}}{s+1}\big(\ln(x)+H(s,k)\big)$$

On finit par le principe de récurrence. □

Lemme 4.4.5. *Avec les mêmes notations que le lemme précédent :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [1,+\infty[, \quad 2^{k-1}\cdot f^{(k-1)}(2x) = 2^s \cdot f^{(k-1)}(x)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [1,+\infty[, \quad 2^{k-1}\cdot g^{(k-1)}(2x) = 2^s \cdot g^{(k-1)}(x) + \ln(2)2^s\cdot f^{(k-1)}(x)$$

Preuve :

$$2^{k-1}\cdot f^{(k-1)}(2x) = 2^{k-1}\binom{s+1}{k}\frac{(2x)^{s-k+1}}{s+1} = 2^s\binom{s+1}{k}\frac{x^{s-k+1}}{s+1} = 2^s\cdot f^{(k-1)}(x)$$

$$2^{k-1}\cdot g^{(k-1)}(2x) = 2^{k-1}\binom{s+1}{k}\frac{(2x)^{s-k+1}}{s+1}\big(\ln(2x)+H(s,k-1)\big)$$

$$= 2^s\binom{s+1}{k}\frac{x^{s-k+1}}{s+1}\big(\ln(x)+H(s,k-1)+\ln(2)\big) = 2^s\cdot g^{(k-1)}(x)+\ln(2)2^s\cdot f^{(k-1)}(x)$$

□

Si $p > \Re(s)+2$ alors la dérivée p^{eme} de f et de g vérifient les hypothèses du théorème 4.3.3. C'est-à-dire :

$$f^{(p)}(x) \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[\text{ et que } f^{(p)}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En effet, $\Re(s)-p < -2$ donc $\forall x \in [1,+\infty[$,

$$|x^{s-p}| \leqslant x^{\Re(s)-p} \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad |\ln(x)x^{s-p}| \leqslant \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Lemme 4.4.6. *Soient $s \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{N}\cup\{-1\}), p \in \mathbb{N}$ tel que $p > \Re(s)+2$, alors ils existent deux constantes C_f, C_g telles que $\forall n \geqslant 2$,*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p}\frac{\beta_k}{k!}f^{(k-1)}(n) + C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{k=0}^{p}\frac{\beta_k}{k!}g^{(k-1)}(n) + C_g + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k) = (-1)^{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\beta_k}{k!}(2^k-1)f^{(k-1)}(n)\right) + (1-2^{s+1})C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}g(k) = (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\beta_k}{k!}(2^k-1)g^{(k-1)}(n)\right) + (1-2^{s+1})C_g - \ln(2)2^{s+1}C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Preuve : On applique alors le théorème 4.3.3 à f dans un premier temps, puis ensuite à g. Il existe alors deux constantes $C_f, \widetilde{C}_f$ telles que $\forall n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(n) + C_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} f(2k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(2n) + \widetilde{C}_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Or d'après le lemme précedent, on a,

$$\sum_{k=1}^{n} f(2k) = 2^s \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} 2^s f^{(k-1)}(n) + \widetilde{C}_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

donc

$$2^s C_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)} = 2^s \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} f^{(k-1)}(n) \right) = \widetilde{C}_f + \underset{n\to+\infty}{o(1)} \implies 2^s C_f = \widetilde{C}_f$$

d'où $C_f - 2\widetilde{C}_f = (1 - 2^{s+1}) C_f$.

Pour g, on a deux constantes $C_g, \widetilde{C}_g$ telles que $\forall n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} g^{(k-1)}(n) + C_g + \underset{n\to+\infty}{o(1)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} g(2k) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} g^{(k-1)}(2n) + \widetilde{C}_g + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Par un processus similaire avec le lemme précedent, on a :

$$\widetilde{C}_g + \underset{n\to+\infty}{o(1)} = \sum_{k=1}^{n} g(2k) - \sum_{k=0}^{p} \frac{2^{k-1}\beta_k}{k!} g^{(k-1)}(2n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^s \cdot g(k) + \ln(2) 2^s \cdot f(k) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} \left(2^s \cdot g^{(k-1)}(n) + \ln(2) 2^s \cdot f^{(k-1)}(n) \right)$$

$$= 2^s \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} g(k) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} \cdot g^{(k-1)}(n) \right)}_{=C_g + o(1)} + \ln(2) 2^s \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\beta_k}{k!} \, f^{(k-1)}(n) \right)}_{=C_f + o(1)}$$

d'où le résultat $\widetilde{C}_g = 2^s C_g + \ln(2) 2^s C_f$, donc $C_g - 2\widetilde{C}_g = (1 - 2^{s+1}) C_g - \ln(2) 2^{s+1} C_f$ □

Preuve : **La démonstration du theorème 4.4.3 :**

Il nous reste plus qu'à remplacer les fonctions f et g par leur valeurs avec les formules du lemme 4.4.4 et de montrer que :

$$C_f = \zeta(-s) \quad , \quad C_g = -\zeta'(-s))$$

$$(1 - 2^{s+1}) C_f = \eta(-s) \quad , \quad (1 - 2^{s+1}) C_g - \ln(2) 2^{s+1} C_f = -\eta'(-s)$$

On va d'abord montrer les formules dépendantes de η. Puis, on en déduira celles dépendantes de ζ. D'après le théorème 4.2.2 et son corollaire 4.2.8, on sait que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f(k) \right)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^s \right)_n = \eta(0, -s) \in EL_+(\mathbb{C}) \rightsquigarrow \eta(-s)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}g(k)\right)_n = -\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1+1}\ln(k)k^s\right)_n = -\eta(1,-s) \in EL_+(\mathbb{C}) \rightsquigarrow -\eta'(-s)$$

$$\forall s \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta\eta(k,s) = \left(\frac{(-1)^{n+k+1}\cdot\ln(n)^k}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in EL_+(\mathbb{C}) \quad \text{avec} \quad \Lambda_+\left(\Delta\eta(k,s)\right) = 0$$

On a alors tout pour conclure :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k) = (-1)^{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\beta_k}{k!}(2^k-1)f^{(k-1)}(n)\right) + (1-2^{s+1})C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^s = (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{s+1}{k}\frac{\beta_k(2^k-1)n^{s-k+1}}{s+1}\right) + (1-2^{s+1})C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^s}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow}\eta(-s)} = \sum_{k=1}^{p}\binom{s+1}{k}\frac{\beta_k(2^k-1)}{s+1}\underbrace{\left((-1)^{n+1}n^{s-k+1}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow}0} + (1-2^{s+1})C_f + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{o}(1)}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow}0}$$

Donc $\eta(-s) = (1-2^{s+1})C_f$ par la formule qui relie η et ζ. On a $C_f = \zeta(-s)$. De même,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}g(k) = (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\beta_k}{k!}(2^k-1)g^{(k-1)}(n)\right) + (1-2^{s+1})C_g - \ln(2)2^{s+1}C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^s\ln(k)}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow}-\eta'(-s)} - \sum_{k=1}^{p}\binom{s+1}{k}\frac{\beta_k(2^k-1)}{s+1}\underbrace{\left((-1)^{n+1}\big(\ln(n)+H(s,k-1)n^{s-k+1}\big)\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow}0}$$

$$= (1-2^{s+1})C_g - \ln(2)2^{s+1}C_f + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \quad \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \quad (1-2^{s+1})C_g - \ln(2)2^{s+1}C_f = -\eta'(-s)$$

Donc $-\eta'(-s) = (1-2^{s+1})C_g - \ln(2)2^{s+1}\zeta(-s)$. En dérivant la formule qui relie η et ζ, $\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}, \quad \eta(-s) = (1-2^{s+1})\zeta(-s)$,

$$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}, \quad -\eta'(-s) = -\ln(2)2^{s+1}\zeta(-s) - (1-2^{s+1})\zeta'(-s)$$

on a $C_g = -\zeta'(-s)$. On a finit, il nous reste plus qu'à remplacer ces constantes et les dérivées de f et g dans les formules du lemme 4.4.6.

Maintenant, nous allons optimiser le p, au lieu de prendre tel que $p \in \mathbb{N}$ et $p > \Re(s)+2$, on peut le choisir dans $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\Re(s)-p+1 \geqslant 0 > \Re(s)-p$. On a ainsi pris p tel que :

$$n^{s-p+1} \neq \underset{n\to+\infty}{o}(1) \quad \text{et} \quad n^{s-p} = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

□

Théorème 4.4.7. *Soient $s \in \mathbb{N}$, (ici, on a pris $p = s+1$)*

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{k=0}^{s+1} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k n^{s-k+1}}{s+1} + \zeta(-s)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^s = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{s+1} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k (2^k-1) n^{s-k+1}}{s+1} \right) + \eta(-s)$$

Avec encore :

$$\sum_{k=1}^{n} k^s \ln(k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k (\ln(n) + H(s,k-1)) n^{s-k+1}}{s+1} - \zeta'(-s) + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^s \ln(k) = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k (\ln(n) + H(s,k-1))(2^k-1) n^{s-k+1}}{s+1} \right) - \eta'(-s) + \underset{n\to+\infty}{o(1)}$$

Preuve : Il faut refaire toute la preuve précédente en remplaçant f et g et leurs dérivés par $\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = x^s$ et $g(x) = \ln(x) x^s$, donc

$$\forall x \in [1, +\infty[, \forall k \leqslant s+1, \quad \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} = \binom{s+1}{k} \frac{x^{s-k+1}}{s+1}, \quad \forall k > s+1, \frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} = 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \forall k \leqslant s+1, \quad \frac{g^{(k-1)}(x)}{k!} = \binom{s+1}{k} \frac{x^{s-k+1}}{s+1} \big(\ln(x) + H(s,k-1) \big)$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \forall k > 0, \quad \frac{g^{(s+k)}(x)}{s!} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

Puisque les dérivées $f^{(s+2)}$ vérifient les hypohèses du théorème 4.3.3. On peut l'appliquer en remarquant que le reste pour la fonction f est identiquement nulle, car les dérivées de f sont nulles à partir de la dérivée $s+1^{eme}$. Ceci donne que une égalité sans $o(1)$. Ensuite, on applique la même démarche que la démonstration du théorème précédent 4.4.3. □

4.5 Valeurs particulières de ζ et de η

Nous allons maintenant retrouver des valeurs particulières de ζ et de η. En effet, dès le théorème 4.2.2 et son corollaire 4.2.8, nous aurions pu montrer directement ceci au moins pour les premières valeurs :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \underbrace{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} 0 \quad (2)} + \frac{1}{2} \quad \underset{n\to+\infty}{\overset{(1)}{\rightsquigarrow}} \quad \eta(0) = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k = \underbrace{(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{4}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} 0 \quad (2)} + \frac{1}{4} \quad \underset{n\to+\infty}{\overset{(1)}{\rightsquigarrow}} \quad \eta(-1) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = \underbrace{(-1)^{n-1}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} 0 \quad (2)} \quad \underset{n\to+\infty}{\overset{(1)}{\rightsquigarrow}} \quad \eta(-2) = 0$$

(1) d'après le théorème 4.2.2, (2) d'après le corollaire 4.2.8.

Mais nous pouvons maintenant généralisé facilement cette méthode grâce au théorème précédent 4.4.7 qui nous dit :

Soient $s \in \mathbb{N}$, (ici, on a pris $p = s+1$)

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{k=0}^{s+1}\binom{s+1}{k}\frac{\beta_k n^{s-k+1}}{s+1} + \zeta(-s)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^s = (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{s+1}\binom{s+1}{k}\frac{\beta_k(2^k-1)n^{s-k+1}}{s+1}\right) + \eta(-s)$$

Alors, il suffit par exemple de prendre $n = 0$, pour obtenir :

$$0 = \sum_{k=1}^{0} k^s = \sum_{k=0}^{s+1}\binom{s+1}{k}\frac{\beta_k 0^{s-k+1}}{s+1} + \zeta(-s) = \binom{s+1}{s+1}\frac{\beta_{s+1}}{s+1} + \zeta(-s)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{0}(-1)^{k+1}k^s = (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{s+1}\binom{s+1}{k}\frac{\beta_k(2^k-1)0^{s-k+1}}{s+1}\right) + \eta(-s) = -\frac{\beta_{s+1}(2^{s+1}-1)}{s+1} + \eta(-s)$$

Donc on obtient les valeurs de ζ et η sur les entiers négatifs :

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \zeta(-s) = -\frac{\beta_{s+1}}{s+1} \quad \text{et} \quad \eta(-s) = \frac{\beta_{s+1}(2^{s+1}-1)}{s+1}$$

On retrouve ainsi les zéros triviaux de ces fonctions car on a $\forall n \geqslant 1, \quad \beta_{2n+1} = 0$, donc $\forall n \geqslant 1, \ \zeta(-2n) = \eta(-2n) = 0$.

4.6 Des équivalents remarquables

On va maitenant trouver les équivalents simples de $\prod_{k=1}^{n} k^{k^s}$ pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Pour cela, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.6.1. *Soient* $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $C \in \mathbb{C}$ *tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \ln(k) = w_n \ln(n) - v_n + C + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Alors,

$$\prod_{k=1}^{n} k^{u_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^C \cdot \frac{n^{w_n}}{e^{v_n}}$$

Preuve : On ne peut pas composer les équivalent mais on peut passer à la limite et appliquer la fonction exponentielle.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \ln(k) - w_n \ln(n) + v_n \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad C$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \ln(k) - w_n \ln(n) + v_n + v_n\right) = \prod_{k=1}^{n} k^{u_k} \cdot \frac{e^{v_n}}{e^{w_n \ln(n)}} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad e^C$$

d'où le résultat,

$$\prod_{k=1}^{n} k^{u_k} \cdot \frac{e^{v_n}}{n^{w_n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^C.$$

□

Nous allons maintenant appliquer directement ce lemme sur les formules des théoremes 4.4.3 et 4.4.7, ce qui nous donne les formules suivantes :

Théorème 4.6.2. *Soit* $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \cup \{-1\}$ *prenons* $p \in \mathbb{N}$ *et* $\Re(s) + 1 \geqslant p > \Re(s)$, *c'est-à-dire* $p = \lfloor \Re(s) + 1 \rfloor$,

$$\prod_{k=1}^{n} k^{k^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\zeta'(-s)} \times \frac{n^{\sum_{k=0}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k n^{s+1-k}}{s+1}}}{e^{-\sum_{k=0}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k H(s,k-1) n^{s+1-k}}{s+1}}}$$

$$\prod_{k=1}^{n} k^{k^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\zeta'(-s)} \times \frac{n^{\sum_{k=1}^{n} k^s - \zeta(-s)}}{e^{\frac{n^{s+1}}{(s+1)^2} - \sum_{k=2}^{p} \binom{s+1}{k} \frac{\beta_k H(s,k-1) n^{s+1-k}}{s+1}}}$$

Avec β_k *le* k^{ieme} *nombre de Bernoulli (sauf en 1,* $\beta_1 = \frac{+1}{2}$*)*
Avec $H(s,k) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{s-m}$, *en particulier :* $H(s,0) = 0$ *et* $H(s,-1) = \frac{-1}{s+1}$
Avec $\binom{s+1}{k} = \frac{(s+1)s(s-1)\cdot \ldots \cdot(s-k+2)}{k!} = \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(s-k+2)k!}$

En faisant plus attention aux valeurs de s et p, pour que ce soit défini, on obtient ceci avec les premiers coefficients explicites :

$$\prod_{k=1}^{n} k^{k^s} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\zeta'(-s)} \times \frac{n^{\frac{n^{s+1}}{s+1}+\frac{n^s}{2}+\frac{sn^{s-1}}{12}-\frac{s(s-1)(s-2)n^{s-3}}{720}+\dots}}{e^{\frac{n^{s+1}}{(s+1)^2}-\frac{n^{s-1}}{12}+\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right)\frac{s(s-1)(s-2)n^{s-3}}{720}+\dots}}$$

Remarque 4.6.3. *On retrouve la formule de Stirling, avec $s=0$ et donc $p=1$,*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k^{k^0} \underset{n\to+\infty}{\overset{(p=1)}{\sim}} e^{-\zeta'(-s)} \times \frac{n^{\frac{n^{s+1}}{s+1}+\frac{n^s}{2}}}{e^{\frac{n^{s+1}}{(s+1)^2}}} \underset{n\to+\infty}{\overset{(s=0)}{\sim}} e^{-\zeta'(-0)} \times \frac{n^{n+1/2}}{e^n}$$

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\zeta'(0)} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On en déduit donc que $e^{-\zeta'(0)} = \sqrt{2\pi}$, c'est-à-dire que $\zeta'(0) = -\dfrac{\ln(2\pi)}{2}$

Remarque 4.6.4. *Mon équivalent favori est celui correspondant à $s=2$ (donc p=3) :*

$$\prod_{k=1}^{n} k^{k^2} \underset{n\to+\infty}{\overset{(p=3)}{\sim}} e^{-\zeta'(-s)} \times \frac{n^{\frac{n^{s+1}}{s+1}+\frac{n^s}{2}+\frac{sn^{s-1}}{12}}}{e^{\frac{n^{s+1}}{(s+1)^2}-\frac{n^{s-1}}{12}}} \underset{n\to+\infty}{\overset{(s=2)}{\sim}} e^{-\zeta'(-2)} \times \frac{n^{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}}{e^{\frac{n^3}{9}-\frac{n}{12}}}$$

En plus, on peut montrer que $e^{-\zeta'(-2)}$ dépend des constantes $e, \pi, \zeta(3)$:

$$\frac{\eta'(-2)}{7} = \frac{\zeta(3)}{4\pi^2} = -\zeta'(-2)$$

Donc on obtient une formule avec une constante très stylé :

$$\prod_{k=1}^{n} k^{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}} \times \frac{n^{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}}{e^{\frac{n^3}{9}-\frac{n}{12}}}$$

Remarque 4.6.5. *De manière plus générale, on peut trouver le développement limité suivant. Soient $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z|=1$ et $z \neq 1$, $m \in \mathbb{N}, a=(a_1,\cdots,a_m) \in \mathbb{N}^m$, $s \in \mathbb{C}$, alors pour $n \geqslant k_m$, on a*

$$\sum_{k=k_m}^{n} z^k \cdot k^s \cdot \ln(k)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \ln^m(k)^{a_m} = z^n \cdot n^{s-\lfloor \Re(s) \rfloor} \cdot P\big(n, \ln(n), \ldots, \ln^m(n), \ln^{m+1}(n)\big) + C + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

où $C = \Lambda_+\left(\sum_{k=k_m}^{n} z^k \cdot k^s \cdot \ln(k)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \ln^m(k)^{a_m}\right)$ et $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}]$ de degré au plus $d = 1 + \lfloor \Re(s) \rfloor + a_1 + \ldots + a_m$,
où l'on définit par réccurence $\ln^{m+1} = \ln^m \circ \ln$ et $k_{m+1} = \lfloor e^{k_m} \rfloor + 1$ avec $k_0 = 1$.

Nous pouvons déterminer C (comme pour la démonstration du théorème 4.2.2), avec une somme où le terme général converge en $O(n^{-p})$, en utilisant le polynôme $(X-z)^{\lfloor \Re(s) \rfloor + 1 + p}$ évalué en $\phi : (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$, à $p \in \mathbb{N}$ fixé arbitrairement.

Ceci implique aussi l'équivalent "simple" du produit (voir le lemme 4.6.1).

Ce qui est remarquable c'est que l'on puisse déterminer la constante C du développement limité, sans expliciter le polynôme P.