Théorie des topos

E. Hecky

3 janvier 2023

Ce poly est écrit pour accompagner la présentation (ou les présentations, si ça plaît) au séminaire des élèves de l'ENS courant décembre 2022. Il s'agit d'une courte introduction à la théorie des topos et à ses incarnations en logique et en géométrie ; une discussion bien plus détaillée peut être trouvée dans mon rapport de stage (en anglais), disponible à cette adresse.

Introduction

En révolutionnant au siècle dernier la géométrie algébrique avec la théorie des schémas, (l'école d') Alexandre Grothendieck s'est retrouvé à étudier systématiquement des *catégories de faisceaux*. Plus précisément, pour étudier un schéma X, parmi ses multiples invariants connus on peut en calculer sa *cohomologie étale*, qui vient naturellement avec un *topos étale sur* X. Ce n'est pas la cohomologie étale qui nous intéressera ici, mais ce qui est venu juste après : l'étude systématique des topos, non seulement comme des objets utiles en géométrie algébrique, mais généralement dans toutes leurs incarnations, recouvrant la topologie, la géométrie, la théorie des catégories, la logique, ...

1 Théorie des catégories

Les topos étant des cas particulier de catégories, il faut bien sûr une première section pour expliquer les bases fondamentales de cette théorie. Rien de très spécifique à la théorie des topos n'est présenté ici, si bien que celleux qui connaissent déjà les principes de base des catégories peuvent ignorer cette section.

1.1 Foncteurs et transformations naturelles

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'*objets* et d'une collection de *morphismes* (ou *flèches*) entre les objets. Une flèche a un *objet source* et un *objet but*, si bien que pour deux objets c et d, on notera une flèche f de source c et de but d sous la forme $f : c \to d$. La classe des flèches est munie d'une loi de *composition*, où $f : c \to d$ et $g : e \to f$ peuvent être composées si et seulement si $d = e$, donnant une flèche $g \circ f : c \to e$. La composition doit être associative ($h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$), et doit admettre un élément neutre $\mathrm{id}_c : c \to c$ pour chaque objet c ($g \circ \mathrm{id}_c = g$ et $\mathrm{id}_c \circ f = f$).

Pour deux objets c et d, on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ la collection des flèches $c \to d$. Si la collection de tous les objets et la collection de toutes les flèches forment des ensembles, on dit que $\mathcal{C}$ est *petite* ; si pour tous objets c et d la collection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ forme un ensemble on dit que $\mathcal{C}$ est *localement petite*.

Exemple 1.2. Voici quelques exemples simples de catégories :
- La catégorie **Set** des ensembles a pour objets les ensembles et pour morphismes les applications. Elle n'est pas petite, mais elle est localement petite ;
- La catégorie **Top** des espaces topologiques et des applications continues ;
- Pour un groupe G fixé, on peut former la petite catégorie (aussi notée G) qui possède un seul objet $\bullet$ et une flèche $g : \bullet \to \bullet$ pour chaque élément $g \in G$. La composition est donnée par la loi de groupe, si bien que chaque flèche g est un isomorphisme, d'inverse g^{-1}.

(Ce dernier exemple montre que les morphismes dans une catégorie ne doivent pas nécessairement être vus comme des vraies applications.)

Définition 1.3. Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, on peut former la *catégorie opposée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, avec les mêmes objets et une flèche $f^{\mathrm{op}} : d \to c$ pour chaque flèche $f : c \to d$ dans $\mathcal{C}$. Remarquons que $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Définition 1.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Une flèche $f : c \to d$ est un *monomorphisme* si pour toutes flèches $g, h : b \to c$ telles que $f \circ g = f \circ h$, on a $g = h$. Un *sous-objet* d'un objet c de $\mathcal{C}$ est une classe d'équivalence de monomorphismes $a \to c$, où $a \to c$ et $b \to c$ sont équivalents si l'un se factorise à travers l'autre. Si $\mathcal{C}$ est localement petite, alors on obtient pour tout c l'ensemble ordonné $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c)$ des sous-objets de c.

Définition 1.5. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur (covariant)* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée pour chaque objet c de $\mathcal{C}$ d'un objet Fc de $\mathcal{D}$, et pour chaque flèche $f : c \to d$ dans $\mathcal{C}$ d'une flèche $Ff : Fc \to Fd$ dans $\mathcal{D}$. On demande bien sûr que les identités soient conservées ($F\mathrm{id}_c = \mathrm{id}_{Fc}$), de même que la composition ($F(g \circ f) = Fg \circ Ff$). Un *foncteur contravariant* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur (covariant) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$, ou, de manière équivalente, un foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Exemple 1.6. Voici quelques exemples simples de foncteurs :
- Le foncteur d'oubli U : **Top** $\to$ **Set** qui à un espace topologique (resp. une application continue) associe son ensemble sous-jacent (resp. son application sous-jacente) ;
- Étant donné un groupe G, un foncteur $\rho : G \to$ **Set** envoie l'objet $\bullet$ sur un ensemble X, et les éléments du groupe $g \in G$ sur des permutations $\rho(g)$ de X. Autrement dit, les foncteurs $G \to$ **Set** (d'image X) sont exactement les actions de groupe de G (sur l'ensemble X).
- Étant donné un ensemble X, le foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$: **Set** $\to$ **Set** associe à un ensemble Y l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$ des applications $X \to Y$, et à une application $f : Y \to Z$ l'application $\mathrm{Hom}(X, f) : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ qui envoie g sur $f \circ g$. De même, il existe un foncteur contravariant $\mathrm{Hom}(-, X) : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ qui envoie une fonction f sur la composition à droite $g \mapsto g \circ f$;

— (Pour celleux qui connaissent un peu de topologie algébrique.) Étant donné un point x d'un espace topologique X, on peut former le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ des lacets basés en x à homotopie près. On sait que si $f : X \to Y$ envoie x sur un point y alors on dispose d'un morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$; cette construction est *fonctorielle* car si $g : Y \to Z$ envoie y sur un point z, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. On vient donc de construire un foncteur π_1 de la catégorie des espaces topologiques (pointés) vers les groupes ;

— (Pour celleux qui connaissent un peu de géométrie algébrique.) À un ensemble algébrique V de la forme $V(f_1, \ldots, f_n) = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{C}^d \mid f_1(x_1, \ldots, x_d) = \ldots = f_n(x_1, \ldots, x_d) = 0\}$ avec $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$, on peut associer la $\mathbf{C}$-algèbre $\Gamma(V) = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]/I(V)$ des fonctions polynomiales sur V (où $I(V)$ est l'idéal des polynômes qui s'annulent sur V). Cette construction est fonctorielle (contravariante), et elle fournit une *équivalence de catégories* entre la catégorie des ensembles algébriques sur $\mathbf{C}$ et la catégorie opposée des $\mathbf{C}$-algèbres de type fini réduites. Plus généralement, la catégorie opposée à celle des anneaux est la catégorie des schémas affines.

Définition 1.7. Étant donnés deux catégories $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et deux foncteurs $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, une *transformation naturelle* $\alpha : F \to G$ est la donnée, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, d'une flèche $\alpha_c : Fc \to Gc$ dans $\mathcal{C}$. On demande que ces composantes respectent les morphismes, au sens où pour toute flèche $f : c \to d$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fd \arrow[r, "\alpha_d"'] & Gd \end{tikzcd}$$

Si tous les α_c sont des isomorphismes, alors α est un isomorphisme (aussi appelé *isomorphisme naturel*) $F \cong G$.

Exemple 1.8. Voici quelques exemples simples de transformations naturelles :

— Soient k un corps et $k - \mathrm{Mod}$ la catégorie des k-espaces vectoriels. On dispose de deux foncteurs particuliers $k - \mathrm{Mod} \to k - \mathrm{Mod}$, le premier est l'identité et le second envoie un espace V sur son bidual V^{**} (et une application linéaire $u : V \to W$ sur la bitransposée $u^{**} : V^{**} \to W^{**}$, envoyant χ sur $\psi \mapsto \chi(\psi \circ u)$). Pour tout espace V, on dispose d'une application linéaire $\eta_V : V \to V^{**}$ qui envoie x sur l'évaluation $\phi \mapsto \phi(x)$. On vérifie facilement que ces flèches forment une transformation naturelle $\eta : \mathrm{id}_{k-\mathrm{Mod}} \to (-)^{**}$. En fait, η_V est un isomorphisme exactement lorsque V est de dimension finie, donc η n'est pas un isomorphisme naturel, mais sa restriction à la sous-catégorie des k-espaces de dimension finie en est un : tout espace V de dimension finie est *naturellement* isomorphe à son bidual V^{**}. Noter que cela n'aurait pas de sens de parler de transformation naturelle $\mathrm{id}_{k-\mathrm{Mod}} \to (-)^*$ car le foncteur *espace dual* $(-)^*$ est contravariant. Au-delà de ça (il est possible de parler de transformations extranaturelles pour éviter l'obstruction covariant/contravariant), même en dimension finie il n'existe pas d'isomorphisme naturel $V \cong V^*$ car un isomorphisme entre V et son dual demande un choix de base, et la naturalité demande que cette base soit préservée par tous les endomorphismes de V ;

— Soit G un groupe. On a déjà vu qu'un foncteur $G \to \mathbf{Set}$ est une action de groupe. De même, une transformation naturelle $\rho \to \pi$ entre deux tels foncteurs correspond à une application G-équivariante (ou G-morphisme) entre les deux actions ;

— Le groupe linéaire d'ordre n et le groupe multiplicatif sont deux foncteurs GL_n et $(-)^\times$ de la catégorie des anneaux (commutatifs unitaires) vers celle des groupes. Le déterminant fournit une transformation naturelle du premier vers le second ;

— L'abélianisation est un foncteur de la catégorie des groupes vers celle des groupes abéliens. Étant donné un groupe G, on dispose d'un morphisme de groupes de projection $\pi_G : G \to G^{\mathrm{ab}}$; ces morphismes fournissent les composantes d'une transformation naturelle $\pi : \mathrm{id}_{\mathbf{Grp}} \to (-)^{\mathrm{ab}}$. On verra plus tard que cette transformation naturelle est l'unité d'une adjonction, apparaissant gratuitement avec la définition de l'abélianisation.

Remarque 1.9. *Il est possible de composer des transformations naturelles* verticalement*, c'est-à-dire suivant le schéma suivant :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Il suffit pour cela de composer composante par composante, et de vérifier la naturalité de la composée $\beta \circ \alpha$ en concaténant les carrés de naturalité pour α et β. On vérifie alors qu'étant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, la collection des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ forme une catégorie, dont les morphismes sont donnés par les transformations naturelles. On note cette catégorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Lorsque les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont petites, elles sont des objets de la catégorie **Cat** *des petites catégories, et la catégorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ se retrouve comme la collection* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Définition 1.10. Deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ avec $GF \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ et $FG \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Remarque 1.11. *On pourrait remplacer les deux isomorphismes naturels par des égalités et obtenir la définition de catégories* isomorphes*, mais cette condition est trop restrictive. La plupart des propriétés vraies sur une catégorie sont vraies sur les catégories qui lui sont équivalentes.*

1.2 Limites et adjonctions

Jusqu'ici on a défini les concepts fondamentaux de la théorie des catégories, mais ce qui les fait réellement vivre au sein des mathématiques, ce sont les limites et les adjonctions, qui fournissent en particulier les *propriétés universelles* que l'on utilise tous les jours. Comme en analyse, le concept de limites mesurera la complétude d'une catégorie donnée, et celui d'adjonctions donnera de la structure sur les morphismes. L'analogie s'arrête ici pour ce poly (mais il y a un vrai lien avec l'analyse hilbertienne).

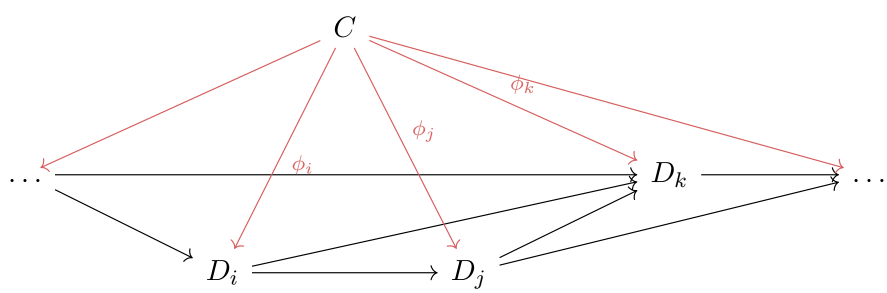
Définition 1.12. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *diagramme* dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $D : I \to \mathcal{C}$. On le dessine comme le diagramme formé des objets Di pour $i \in I$ et des morphismes $Di \to Dj$ entre eux pour $i \to j \in I$. Un diagramme est dit petit (resp. fini, etc) si la catégorie d'indices I l'est.

Exemple 1.13. Un *carré* est un diagramme où la catégorie d'indices est de la forme :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[d] & j \arrow[d] \\ k \arrow[r] & l \end{tikzcd}$$

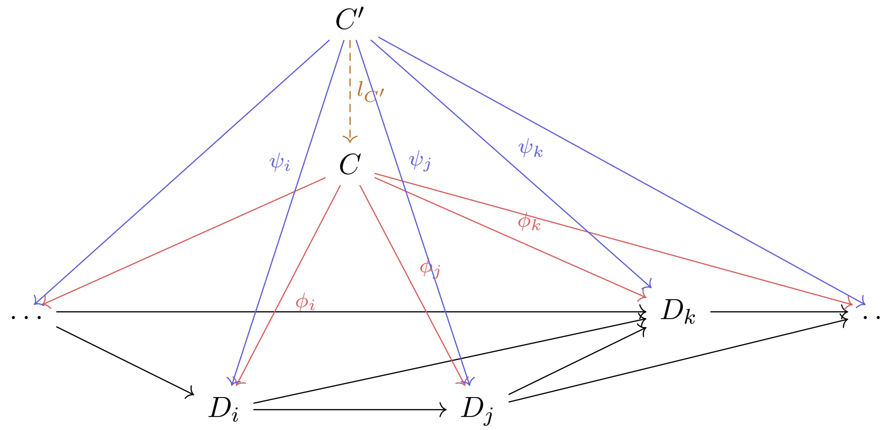
avec égalité entre les composées $i \to j \to l$ et $i \to k \to l$.

Définition 1.14. Soit $D = (D_i)$ un diagramme dans une catégorie $\mathcal{C}$. Un *cône* sur D est la donnée d'un objet C de $\mathcal{C}$ et de morphismes $\phi_i : C \to D_i$ tel que chaque triangle (les faces triangulaires du cône) commute : $\phi_j = D(i \to j) \circ \phi_i$ pour tout $i \to j$ dans I.



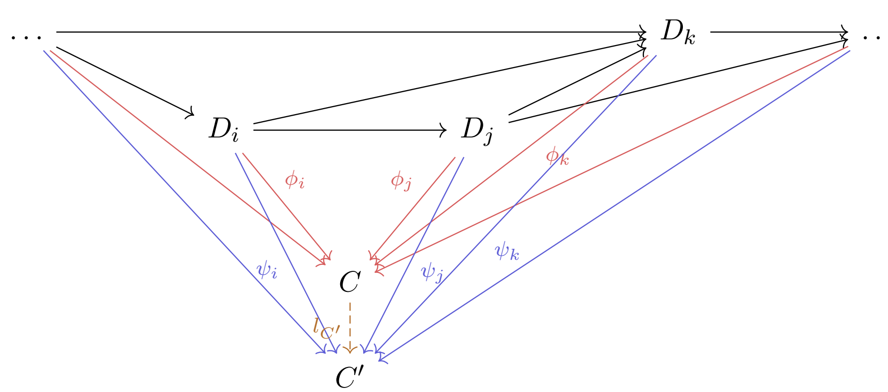
En noir en bas est représenté un diagramme D, et en rouge est représenté un cône sur D. Chaque triangle formé de C, de deux morphismes ϕ_i, ϕ_j et d'un morphisme $D(i \to j)$ doit commuter.

Une *limite* de D est un *cône terminal*, c'est-à-dire un cône (C, ϕ) tel que pour tout cône (C', ψ) il existe un unique morphisme $l_{C'} : C' \to C$ tel que les triangles apparaissant commutent : $\psi_i = \phi_i \circ l_{C'}$ pour tout i.



Ici, le cône rouge est une limite quand tout cône bleu se factorise à travers le cône rouge.

Un *cocône* (resp. une *colimite*) d'un diagramme dans $\mathcal{C}$ est un cône (resp. une limite) dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.



Ici, le cocône rouge est une colimite quand tout cocône bleu se factorise à travers le cocône rouge.

Exemple 1.15. Voici quelques exemples fondamentaux de limites et colimites :

— La limite (si elle existe) du diagramme vide, notée 1, est appelée un *objet terminal* de la catégorie $\mathcal{C}$. La propriété de limite se reformule : pour tout objet C de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $C \to 1$. Par exemple, tout singleton est un objet terminal de la catégorie des ensembles ;

— De manière duale, la colimite (si elle existe) du diagramme vide, notée 0, est appelée un *objet initial* : pour tout objet C de $\mathcal{C}$ il existe un unique morphisme $0 \to C$. Par exemple, l'ensemble vide est un objet initial dans **Set** ;

— La limite (si elle existe) d'un diagramme formé de deux objets C et D de $\mathcal{C}$ et aucun morphisme, notée $C \times D$, est appelée un *produit* de C et D. Par exemple, le produit cartésien fournit un produit dans **Set** ;

— De manière duale, la colimite (si elle existe) d'un diagramme formé de deux objets C et D de $\mathcal{C}$ et aucun morphisme, notée $C \amalg D$, est appelée un *coproduit* de C et D. Par exemple, la réunion disjointe fournit un coproduit dans **Set**.
— La limite (si elle existe) d'un diagramme de la forme $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ est appelée un *pullback*, et le cône limite dessine un carré. En général, la limite de $X \longrightarrow Z \longleftarrow Y$ est notée $X \times_Z Y$:

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Par exemple le pullback dans **Set** de deux inclusions $A, B \subset X$ est l'intersection $A \cap B$;
— De manière duale, la colimite (si elle existe) d'un diagramme de la forme $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ est appelée un *pushout*, et le cocône limite dessine un carré. En général, la colimite de $X \longleftarrow Z \longrightarrow Y$ est notée $X \amalg_Z Y$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X \amalg_Z Y \end{tikzcd}$$

Par exemple le pushout dans **Set** de l'inclusion $A \longleftarrow A \cap B \longrightarrow B$ de l'intersection de deux parties d'un ensemble X est leur réunion $A \cup B$. Le carré que l'on obtient est alors à la fois un diagramme de pullback (les flèches en haut et à gauche forment un cône) et un diagramme de pushout (les flèches en bas et à droite forment un cocône) ;
— La limite (si elle existe) d'un diagramme formé de deux flèches parallèles $f, g : C \to D$ dans $\mathcal{C}$ est appelée un *égalisateur* de f et g. Par exemple dans **Set**, c'est l'inclusion de la plus grande partie de C où f et g sont égales ;
— De manière duale, la colimite (si elle existe) d'un diagramme formé de deux flèches parallèles $f, g : C \to D$ dans $\mathcal{C}$ est appelée un *coégalisateur* de f et g. Par exemple dans **Set**, c'est la projection de D sur le quotient de D par la relation d'équivalence identifiant $f(x)$ avec $g(x)$ pour tout $x \in C$.

Proposition 1.16. *Les (co)limites sont uniques à unique isomorphisme près : si D est un diagramme dans une catégorie $\mathcal{C}$ admettant une limite C, alors toute limite de D est isomorphe à C, via un unique isomorphisme de cônes.*

Définition 1.17. Une catégorie est dite *complète* (resp. *cocomplète*) si tous les petites limites (resp. *colimites*) existent (c'est-à-dire que tous les petits diagrammes ont une limite (resp. *colimite*)).

Exemple 1.18. La catégorie **Set** des ensembles est complète et cocomplète. En fait, il suffit de vérifier qu'une catégorie $\mathcal{C}$ a tous les égalisateurs et tous les petits produits (limites de diagrammes formé d'un *ensemble quelconque* d'objets, sans aucun morphisme) pour s'assurer qu'elle soit complète. Les autres petites limites s'en déduisent en combinant des égalisateurs et des produits. Comme **Set** a tous les produits, coproduits, égalisateurs et coégalisateurs, elle est complète et cocomplète. C'est un phénomène qui est commun à tous les topos, comme on le verra plus tard.

Une autre notion importante en théorie des catégories est celle d'adjonction. C'est une relation entre foncteurs qui les relie très fortement, et qui a des conséquences importantes sur chacun des deux foncteurs en jeu.

Définition 1.19. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. On dit que F est *adjoint à gauche de* G, ou que G est *adjoint à droite de* F, ce que l'on note $F \dashv G$, si l'on dispose d'un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-).$$

Autrement dit, pour tous objets c de $\mathcal{C}$ et d de $\mathcal{D}$, on dispose d'une correspondance :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd)$$

qui est à la fois naturelle en c et en d. Si l'on dispose d'une telle adjonction $F \dashv G$, alors on obtient deux transformations naturelles $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ et $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, appelées respectivement l'*unité* et la *counité* de l'adjonction. Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, η_c est obtenue comme l'image de id_{Fc} sous la correspondance $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, Fc) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, GFc)$, et pour tout objet d de $\mathcal{D}$, ε_d est obtenue comme l'image de id_{Gd} sous la correspondance $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Gd, Gd) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGd, d)$.

Exemple 1.20. Voici quelques exemples d'adjonctions :

— Les ensembles $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}$ des nombres entiers et réels, munis de leurs ordres $\leqslant$ respectifs, forment deux catégories (avec un unique morphisme $x \to y$ lorsque $x \leqslant y$). Un foncteur entre deux catégories formées par des ensembles ordonnés est une application croissante. Le foncteur d'inclusion $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ admet alors un adjoint à gauche et un adjoint à droite, respectivement la partie entière supérieure et la partie entière inférieure : leurs unités et counités respectives donnent quatre propriétés sur les parties entières ;

— Si $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ sont deux foncteurs qui forment une équivalence de catégories, alors F et G sont adjoints, l'unité et la counité étant des isomorphismes ;

— Si l'on dispose d'une catégorie de structures $\mathcal{C}$ (par exemple les groupes) et d'une catégorie d'objets avec un peu plus de structure $\mathcal{C}^*$ (par exemple les groupes abéliens), alors on dispose généralement d'un foncteur d'oubli $\mathcal{C}^* \to \mathcal{C}$ qui oublie la structure supplémentaire. Souvent, ce foncteur admet un adjoint à gauche, et fournit des objets libres. Par exemple, le foncteur d'oubli $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ qui oublie le caractère abélien d'un groupe admet un adjoint à gauche qui est le foncteur d'abélianisation, l'unité étant la projection $\pi_G : G \to G^{\mathrm{ab}}$ et la counité étant un isomorphisme ;

— Un autre exemple de foncteur d'oubli est l'inclusion de la catégorie des espaces topologiques compacts dans la catégorie des espaces topologiques, il a aussi un adjoint à gauche qui est le foncteur de compactification de Stone-Čech ;
— Le foncteur d'oubli $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ qui oublie la structure de groupe a un adjoint à gauche, le foncteur *groupe libre* qui à un ensemble X associe le groupe libre F_X généré par X ;
— Le foncteur d'oubli $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ qui oublie la structure de groupe abélien a un adjoint à gauche, le foncteur *groupe abélien libre* qui à un ensemble X associe le groupe abélien libre généré par X ;
— Si A est un anneau et M est un A-module, le foncteur $M \otimes_A -$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$;
— Dans $\mathbf{Set}$, pour tout ensemble X le foncteur de produit $X \times -$ admet un adjoint à droite, le foncteur $(-)^X$ envoyant un ensemble Y sur l'ensemble Y^X des applications $X \to Y$, comme en témoigne la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z^X)$. L'unité $Y \to (X \times Y)^X$ envoie y sur $x \mapsto (x, y)$ et la counité $Y^X \times X \to Y$ est l'évaluation $(f, x) \mapsto f(x)$. On appelle Y^X un *objet exponentiel*, et l'on dit que $\mathbf{Set}$ *admet tous les objets exponentiels*. Lorsqu'une catégorie $\mathcal{C}$ admet tous les produits finis et les objets exponentiels (pour tout objet c, le foncteur $c \times -$ a un adjoint à droite), on dit alors que $\mathcal{C}$ est une catégorie *cartésienne fermée*. Nous verrons que c'est le cas de tous les topos.

Remarque 1.21. *La donnée d'une unité et d'une counité η et ε telles que $\varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c = \mathrm{id}_{Fc}$ et $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \mathrm{id}_{Gd}$ pour tous objets c de $\mathcal{C}$ et d de $\mathcal{D}$ suffisent à assurer l'existence d'une adjonction $F \dashv G$.*

La conséquence la plus spectaculaire et importante qu'une adjonction $F \dashv G$ a sur les foncteurs F et G est la suivante.

Théorème 1.22. *Soient $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ deux foncteurs, avec F adjoint à gauche de G. Alors F préserve toutes les colimites et G préserve toutes les limites.*

2 Les faisceaux en topologie

Comme dit dans l'introduction, les topos sont des catégories de faisceaux. Les faisceaux sont une notion générale, mais elle prend sa source en topologie. Ce sont eux qui font vivre la géométrie moderne, qu'elle soit différentielle ou algébrique. En voici une courte introduction, qui nous permettra de comprendre la notion plus générale plus tard.

Définition 2.1. Soit X un espace topologique. Muni de l'inclusion, l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}(X)$ de X est ordonné, on peut donc le considérer comme une catégorie (avec un morphisme $U \to V$ pour chaque inclusion d'ouverts $U \subset V$). On note $\mathbf{Psh}(X)$ la catégorie des foncteurs $[\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$. Autrement dit, un *préfaisceau* sur X est un foncteur $F : \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, c'est-à-dire la donnée pour tout ouvert U d'un ensemble $F(U)$, et pour toute inclusion $U \subset V$, d'une application $F(V) \to F(U)$. Un *morphisme de préfaisceaux* est alors une transformation naturelle $F \to G$, c'est-à-dire la donnée pour tout ouvert U d'une application $F(U) \to G(U)$; telle que ces applications préservent les restrictions $F(V) \to F(U)$ et $G(V) \to G(U)$ des deux préfaisceaux.

Exemple 2.2. Par exemple avec $X = \mathbf{R}$, on dispose d'un préfaisceau $\mathcal{C}$ des fonctions continues, envoyant tout ouvert U de $\mathbf{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{C}(U)$ des fonctions continues (réelles, disons) sur U. Les applications $\mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(U)$ sont les restrictions usuelles des fonctions. De même, on dispose d'un sous-préfaisceau $\mathcal{C}_b$ des fonctions continues bornées (on peut voir soit que chaque $\mathcal{C}_b(U)$ est inclus dans $\mathcal{C}(U)$ et que les restrictions sont les mêmes, soit plus abstraitement voir que $\mathcal{C}_b \to \mathcal{C}$ est un monomorphisme, donc un sous-objet dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{R})$).

On l'aura compris en regardant bien la définition et l'exemple : les préfaisceaux généralisent la notion d'ensemble de fonctions sur un espace topologique. Pour mieux voir l'analogie, on écrit, pour un préfaisceau F sur X, une inclusion d'ouverts $U \subset V$ et $s \in F(V)$, plutôt $s|_U$ que $F(U \subset V)(s)$ pour l'élément de $F(U)$ image par s de la restriction : l'élément s est vu comme une fonction. Parmi les propriétés des ensembles de fonctions que l'on utilise le plus souvent, il y a celle de recollement : si l'on dispose de fonctions sur un recouvrement de l'espace qui coïncident sur les intersections, alors on peut les recoller d'une unique manière. On obtient alors la notion de faisceau.

Définition 2.3. Soient X un espace topologique et $F \in \mathbf{Psh}(X)$ un préfaisceau sur X. On dit que F est un *faisceau* si pour tout ouvert U de X, tout recouvrement ouvert $U \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ et toute famille $(f_i \in F(U_i))_{i\in I}$ telle que pour tous $i, j \in I$ on ait $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, il existe un unique $f \in F(U)$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $f_i = f|_{U_i}$.

Exemple 2.4. Reprenons l'exemple précédent. Le préfaisceau $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ est un faisceau. En effet, si l'on dispose de fonctions continues sur un recouvrement ouvert qui coïncident sur les intersections, alors on peut les recoller en une seule grande fonction. Par contre, le préfaisceau $\mathcal{C}_b$ des fonctions continues bornées n'est pas un faisceau. En effet, on peut prendre les ouverts $U_n =]-n, n[$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, qui forment un recouvrement de $\mathbf{R}$, et les fonctions $f_n = \mathrm{id}_{U_n}$ qui sont toutes continues et bornées, mais elles ne peuvent pas se recoller en une fonction continue bornée (l'identité n'est pas bornée sur $\mathbf{R}$). Cela dit, s'il existe un recollement de fonctions continues bornées alors celui-ci est unique : on dit que le préfaisceau $\mathcal{C}_b$ est *séparé*. On verra plus tard que $\mathcal{C}$ est d'une certaine manière le plus petit faisceau qui étende $\mathcal{C}_b$.

Comme dit plus haut, les faisceaux jouent un rôle central en géométrie différentielle et (surtout) en géométrie algébrique. Le lien est le suivant (pour celleux qui connaissent un peu de géométrie ; sinon ce paragraphe n'est pas important). Une variété différentielle M de dimension n est la donnée d'un espace topologique localement homéomorphe à des ouverts de $\mathbf{R}^n$ via des cartes $\varphi_i : U_i \subset M \to V_i \subset \mathbf{R}^n$, les changements de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ étant lisses. Mais toute l'information sur la variété M est en fait encodée dans le faisceau $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions lisses sur les ouverts de M (ici, c'est plutôt un faisceau de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels). En effet, par définition les coordonnées des cartes $(\varphi_i)_k : U_i \to V \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sont elles-mêmes des fonctions lisses sur M, donc des éléments du faisceau $\mathcal{C}^\infty$. C'est exactement la même idée qui définit les schémas en géométrie algébrique : un schéma

$(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace topologique X muni d'un *faisceau structural* $\mathcal{O}_X$ (qui est un faisceau d'anneaux plutôt), et on le voit bien : c'est le faisceau des fonctions régulières qui encode toute l'information dont on a besoin à propos de la structure du schéma.

Définition 2.5. Pour un espace topologique X, on note $\mathbf{Sh}(X)$ la *sous-catégorie pleine* de $\mathbf{Psh}(X)$ formée des faisceaux : c'est la catégorie dont les objets sont les faisceaux, et les morphismes sont exactement ceux dans $\mathbf{Psh}(X)$. Autrement dit, un morphisme $F \to G$ entre deux faisceaux est simplement un morphisme dans $\mathbf{Psh}(X)$, c'est-à-dire une transformation naturelle.

Les catégories $\mathbf{Psh}(X)$ et $\mathbf{Sh}(X)$ sont deux exemples de topos. Nous verrons la définition générale dans la section suivante, mais on peut quand même énoncer un théorème qui présage ceci.

Théorème 2.6. *Soit X un espace topologique. Alors les catégories $\mathbf{Psh}(X)$ et $\mathbf{Sh}(X)$ ont toutes les petites limites et colimites. De plus, le foncteur d'inclusion $i : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Psh}(X)$ admet un adjoint à gauche $a : \mathbf{Psh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ qui préserve les limites finies.*

On entrevoit déjà une forme de structure très forte sur ces deux catégories, qui sera typique des topos. Le foncteur a défini dans le théorème s'appelle la *faisceautisation* : de même que pour les foncteurs d'objets libres, étant donné un préfaisceau F sur X on obtient un faisceau $a(F)$, qui est le *plus petit faisceau qui prolonge* F, au sens où l'on dispose d'un morphisme $F \to a(F)$ (qui est l'unité de l'adjonction) qui factorise tout morphisme $F \to G$ vers un faisceau G. La counité de l'adjonction est un isomorphisme : tout faisceau est naturellement isomorphe à sa faisceautisation, ce qui est rassurant.

Remarque 2.7. *Pour reprendre l'exemple développé plus haut, on a un isomorphisme $\mathcal{C} \cong a(\mathcal{C}_b)$: la faisceautisation du préfaisceau des fonctions continues bornées sur $\mathbf{R}$ est le faisceau des fonctions continues. Il y a plusieurs manières de le voir. La première est de remarquer que de manière générale, si P est un sous-préfaisceau d'un faisceau F, alors $a(P)$ envoie U sur l'ensemble des éléments de $F(U)$ qui sont* localement *dans P. Plus précisément, un élément $f \in F(U)$ est localement dans P s'il existe un recouvrement ouvert $U \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ tel que $f|_{U_i}$, qui est* a priori *dans $F(U_i)$, soit en fait dans $P(U_i)$. Les fonctions continues sont localement bornées, donc le faisceau des fonctions continues est la faisceautisation du préfaisceau des fonctions continues bornées. Il y a une autre manière de voir la faisceautisation. Si P est un préfaisceau sur X, on peut construire un espace topologique ΛP qui se projette sur X via un homéomorphisme local $p : \Lambda P \to X$. Il faut voir ceci comme une manière d'interpréter les préfaisceaux comme des* espaces au-dessus *de X, la* fibre *(l'image réciproque par p) au-dessus d'un point $x \in X$ étant donnée par les* germes *du préfaisceau en x. À partir de cet espace, on peut alors construire un faisceau $\Gamma\Lambda P$ sur X en envoyant un ouvert U de X sur l'ensemble des applications $s : U \to \Lambda_P$ telles que $p \circ s$ soit l'inclusion $U \subset X$. Le faisceau $\Gamma\Lambda P$ ainsi construit est en réalité la faisceautisation du préfaisceau P (et il se cache derrière cette remarque une adjonction $\Lambda \dashv \Gamma$).*

3 Les topos de Grothendieck

L'idée des topos de Grothendieck est la suivante : on part d'une petite catégorie, sur laquelle on définit une *topologie*, nous permettant de considérer des faisceaux dessus. On obtient une catégorie de faisceaux, un topos, qui comme on le verra plus tard se comporte un peu comme un espace topologique généralisé.

Définition 3.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle *préfaisceau* sur $\mathcal{C}$ un foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ **Set** contravariant à valeur dans les ensembles, et l'on note $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ la catégorie correspondante, celle des foncteurs $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$.

Exemple 3.2. Un *graphe* G est défini par la donnée d'un ensemble de sommets S et un ensemble d'arêtes E, chaque arête ayant un sommet de départ et un sommet d'arrivée. Autrement dit, G est déterminé par les deux applications $E \to S$ donnant respectivement le départ et l'arrivée d'une arête. On trouve alors que la catégorie des graphes (et des morphismes de graphe) est exactement la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie $\bullet \leftleftarrows \bullet$.

On retrouve pour les préfaisceaux généraux la même définition que celle des préfaisceaux sur les espaces topologiques, et ainsi les mêmes propriétés sur la catégorie $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$. Si on se limite à une petite catégorie $\mathcal{C}$, on pourrait définir une topologie sur $\mathcal{C}$ (puis les faisceaux sur $\mathcal{C}$) comme on définit une topologie sur les ensembles, mais on obtiendrait une notion redondante et inutile. Les topologies sur les catégories sont réellement des généralisations de la structure de la catégorie $\mathcal{O}(X)$, lorsque X est un espace topologique.

Définition 3.3. Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. On appelle *crible* sur un objet c un ensemble S de flèches allant vers c, tel que pour tout $f \in S$ de la forme $d \to c$ et *toute* flèche $g : e \to d$, la composée fg soit dans S. Si $\mathcal{C}$ est petite, c'est de manière équivalente un sous-préfaisceau de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c)$. Une *topologie de Grothendieck* J sur $\mathcal{C}$ est alors la donnée, pour tout objet c, d'une collection $J(c)$ de cribles sur c telle que :

1. Pour tout objet c, le crible maximal $M_c = \{f \mid \operatorname{cod} f = c\}$ est dans $J(c)$;
2. Pour tout $f : d \to c$ et tout $S \in J(c)$, le crible tiré en arrière $f^*S = \{g : e \to d \mid fg \in S\}$ est dans $J(d)$;
3. Pour tout crible S sur c et tout $T \in J(c)$, si $f^*S \in J(\operatorname{dom} f)$ pour tout $f \in T$ alors $S \in J(c)$.

On dit alors d'un crible S de J qu'il est *couvrant*, *J-couvrant*, ou encore que c'est un *J-crible*. Un couple $(\mathcal{C}, J)$ avec J une topologie de Grothendieck sur une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé un *site*. Si $\mathcal{C}$ est petite, on dit alors que c'est un *petit site*.

Exemple 3.4. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, la topologie *triviale*, donnée par $J(c) = \{M_c\}$ pour tout objet c, est une topologie de Grothendieck.

Si X est un espace topologique, on peut former sur $\mathcal{O}(X)$ la topologie de Grothendieck ayant pour cribles couvrants les recouvrements ouverts. C'est ici que l'on voit en quoi les sites généralisent les catégories d'ouverts : on peut créer des sites plus adaptés à certaines situations en ne gardant que certains recouvrements (ou des cribles qui ne sont pas des recouvrements). On obtiendra des catégories de faisceaux différentes (par exemple le site étale d'un schéma), et des informations plus détaillées sur l'espace X à travers le topos obtenu.

Définition 3.5. Soit $(\mathcal{C}, J)$ un petit site. Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, tout J-crible $S \in J(c)$ et tout préfaisceau $P \in \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$, une famille $(x_f \in P(\operatorname{dom} f))_{f \in S}$ est dite *harmonieuse* si pour tout $f \in S$ et toute flèche g composable avec f, on a $P(g)(x_f) = x_{f \circ g}$. (En anglais, on dit *matching family*. Je ne sais pas s'il existe un mot français, et je n'ai pas trouvé mieux.) Pour une telle famille, un *recollement* est un élément $x \in P(c)$ tel que $x_f = P(f)(x)$ pour tout $f \in S$. Le préfaisceau P est dit *séparé* si toute famille harmonieuse admet au plus un recollement. On dit que P un *faisceau* si toute famille harmonieuse admet un unique recollement. Autrement dit, pour tout objet c de $\mathcal{C}$ et tout J-crible $S \in J(c)$, le diagramme :

$$P(c) \to \prod_{f \in S} P(\operatorname{dom} f) \rightrightarrows \prod_{f \in S, \operatorname{dom} f = \operatorname{cod} g} P(\operatorname{dom} g)$$

est un égalisateur (dans $\mathbf{Set}$). On notera $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ formée des faisceaux (c'est-à-dire la catégorie formée des faisceaux et de toutes les transformations naturelles entre eux). Un *topos de Grothendieck* est une catégorie qui est équivalente à $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ pour un certain petit site $(\mathcal{C}, J)$; on dit alors que $(\mathcal{C}, J)$ est un *site de définition* du topos.

Exemple 3.6. Voici quelques exemples de topos de Grothendieck :

— Pour tout espace topologique X, en notant J la topologie sur $\mathcal{O}(X)$ dont les cribles couvrants sur un ouvert $U \subset X$ sont ceux générés par des petites familles (U_i) qui forment des recouvrements ouverts de U, on a $\mathbf{Sh}(X) = \mathbf{Sh}(\mathcal{O}(X), J)$. En particulier, $\mathbf{Sh}(X)$ est un topos de Grothendieck ; les topos de cette forme sont dit *spatiaux* car ils proviennent d'espaces ;

— La catégorie $\mathbf{Set}$ des ensembles est le topos spatial des faisceaux sur le point $\{*\}$;

— Toute catégorie de préfaisceaux $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ est un topos de Grothendieck, puisque c'est $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ avec J la topologie triviale (le seul crible couvrant est le crible maximal). Par exemple, la catégorie des graphes est un topos ;

— On peut montrer qu'étant donné un groupe topologique G, la catégorie $\mathbf{B}G$ des actions de groupe continues de G sur les espaces topologiques est un topos de Grothendieck.

De la même manière qu'avec la faisceautisation sur les espaces topologiques, il est toujours possible, sur un site, de passer d'un préfaisceau à un faisceau associé.

Théorème 3.7. *Soit $(\mathcal{C}, J)$ un petit site. Alors l'inclusion $i : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \to \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, la* faisceautisation*, qui préserve les limites finies.*

Idée de démonstration. Étant donné un préfaisceau P sur $\mathcal{C}$ et un objet c, on définit $P^+(c)$ comme étant la limite inductive des ensembles $\operatorname{Match}(R, P)$ de familles harmonieuses sur les cribles couvrants $R \in J(c)$, lorsque $R \in J(c)$ varie (un élément de $P^+(c)$

est une classe d'équivalence de familles harmonieuses, avec $(x_f)_{f\in R}$ et $(y_g)_{g\in S}$ équivalentes lorsqu'il existe un crible couvrant $T \subset R \cap S$ avec $x_h = y_h$ pour tout $h \in T$). Le phénomène rigolo ici est que $(-)^+$ augmente petit à petit la régularité du préfaisceau. Si P est un préfaisceau alors P^+ est séparé, et si P est un préfaisceau séparé alors P^+ est un faisceau. La faisceautisation est alors donnée par le foncteur $(-)^{++}$. □

Définition 3.8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites finies. Un *classificateur de sous-objets* dans $\mathcal{C}$ est un monomorphisme true : $1 \to \Omega$ partant de l'objet terminal, tel que pour tout monomorphisme $A \to X$ dans $\mathcal{C}$ il existe une unique flèche *classifiante* $\chi_A : X \to \Omega$ telle que le carré suivant soit un pullback :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\ X \arrow[r, "\chi_A"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Exemple 3.9. L'exemple le plus éclairant et le plus simple est celui de **Set**. Dans la catégorie des ensembles, on dispose d'une injection $\{1\} \to \{0,1\}$, de l'objet terminal $\{1\}$ vers l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$ qui est un classificateur de sous-objets. En effet, pour toute injection $A \to X$ d'un ensemble dans un autre, on peut considérer A comme une partie de X (l'image de l'injection), et construire l'indicatrice $\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}$ qui envoie les éléments de A sur 1 et les autres sur 0. On vérifie alors instantanément que le carré correspondant est bien un pullback. Remarquons que le monomorphisme $1 \to \Omega$ est appelé *true*, car il correspond à des *valeurs de vérité*. Dans une catégorie ayant un classificateur de sous-objets, même si les objets de la catégorie sont des ensembles, il se peut que le classificateur ne ressemble pas du tout à $\{0,1\}$.

Définition 3.10. Un *topos élémentaire* est une catégorie qui admet toutes les limites finies, qui est cartésienne fermée et qui admet un classificateur de sous-objets.

Théorème 3.11. *Tout topos de Grothendieck est un topos élémentaire et admet toutes les petites limites et petites colimites.*

Idées de démonstration. Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site de définition. Il faut donc démontrer que $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$:

— admet les petites limites, on peut les calculer terme à terme comme dans $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$, et elles sont préservées par l'inclusion $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ puisque celle-ci admet un adjoint à gauche ;

— admet les petites colimites, il suffit de les calculer dans $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ et de les faisceautiser, puisque la faisceautisation admet un adjoint à droite donc préserve les colimites ;

— admet les objets exponentiels, on peut les calculer dans $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ et ce sont automatiquement des faisceaux ;

- admet un classificateur de sous-objets : on définit $\Omega \in \mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ qui envoie un objet c sur l'ensemble des cribles J-clos (S est J-clos si toute flèche $f : c \to d$ telle que $f^*S \in J(d)$ est dans S), et une flèche f sur $S \mapsto f^*S$. On vérifie que Ω est bien un faisceau, et qu'avec la flèche true : $1 \to \Omega$ envoyant c sur le crible maximal M_c, il forme bien un classificateur de sous-objets.

$\square$

Définition 3.12. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des topos de Grothendieck. Un *morphisme géométrique* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une paire de foncteurs adjoints $f^* \dashv f_*$ tels que l'adjoint à gauche $f^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ préserve les limites finies. Si plus fortement f^* admet lui-même un adjoint à gauche, on dit alors que f est un morphisme géométrique *essentiel*. Un *point* d'un topos $\mathcal{E}$ est un morphisme géométrique $\mathbf{Set} \to \mathcal{E}$. Une *transformation géométrique* $f \to g$ entre deux morphismes géométriques est une transformation naturelle $f^* \to g^*$. On note alors $\mathfrak{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ la catégorie des morphismes géométriques $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et des transformations géométriques entre eux.

Exemple 3.13. Voici quelques exemples de morphismes géométriques :

- Pour justifier la notion de point d'un topos : soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Alors f induit un morphisme géométrique $f : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$. Si Y est séparé (ou plus généralement, sobre), alors l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \to \mathfrak{Geom}(\mathbf{Sh}(X), \mathbf{Sh}(Y))$ que l'on obtient est une bijection. En particulier en choisissant $X = \{*\}$, on obtient une bijection entre les points de l'espace Y et les points du topos $\mathbf{Sh}(Y)$;
- Tout foncteur $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induit un morphisme géométrique essentiel $f : \mathbf{Psh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \to \mathbf{Psh}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$;
- Il existe des topos de Grothendieck non triviaux mais qui n'ont aucun point. Nous verrons plus tard une interprétation en logique de leur existence. Il y a plusieurs exemples connus de tels topos, mais en voici un élémentaire. On s'intéresse aux parties mesurables de $[0, 1]$, modulo les parties de mesure de Lebesgue nulle. Elles forment un ensemble ordonné pour l'inclusion (toujours modulo les parties négligeables), et donc une catégorie. On y dispose alors d'une topologie de Grothendieck donnée par les recouvrements ouverts dénombrables (toujours modulo les parties négligeables). Le topos correspondant n'est alors pas trivial, mais il n'a aucun point. (En fait plus généralement, on peut faire ceci sur un espace compact mesuré (K, μ), et les points du topos correspondent aux $x \in K$ tels que $\mu(\{x\}) \neq 0$.)

4 Topos en logique

Le chemin s'écarte de la géométrie algébrique où sont nés les topos pour les emporter en logique et y voir leur incarnation naturelle. On reviendra brièvement en géométrie pour relier ces deux mondes.

On s'intéresse donc à la généralisation de la logique du premier ordre que l'on connaît dans la théorie des ensembles à tous les topos.

4.1 Théories du premier ordre

Définition 4.1. Une *signature* Σ est un triplet (S, F, R) d'ensembles, S étant l'ensemble des *sortes* (qui seront les *types* des variables), F l'ensemble des *symboles de fonctions* et R l'ensemble des *symboles de relation*. Tout symbole de fonction f a un *type*, c'est-à-dire une suite non vide de sortes. Par exemple, si f est de type $(A_1, \dots, A_n, B)$, on note $f : A_1 \cdots A_n \to B$. De même, tout symbole de relation R a un type, qui est une suite possiblement vide de sortes. Par exemple, si r est de type $(A_1, \dots, A_n)$, on note $r \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$.

Comme dit plus haut, une sorte A représente le type que peut avoir une variable. On suppose ainsi avoir, pour chaque sorte, autant de *variables* de cette sorte que l'on veut. Si x est une telle variable, on note $x : A$. Un *terme* est alors soit une variable, soit une expression de la forme $f(t_1, \dots, t_n)$ avec $t_i : A_i$ des termes de type A_i et $f : A_1 \cdots A_n \to B$ un symbole de fonction. Le terme $f(t_1, \dots, t_n)$ est alors de type B.

Définition 4.2. Étant donnée une signature Σ, on définit une *formule* sur Σ comme étant récursivement l'une des expressions suivantes :

- $r(t_1, \dots, t_n)$ avec $t_i : A_i$ des termes et $r \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ un symbole de relation ;
- $s = t$ avec s et t deux termes de même sorte ;
- $\top$;
- $\phi \wedge \psi$;
- $\bot$;
- $\phi \vee \psi$;
- $\phi \implies \psi$;
- $\neg\phi$;
- $(\exists x : A)\phi$ avec x une variable de sorte A ;
- $(\forall x : A)\phi$ avec x une variable de sorte A ;
- $\bigvee_{i\in I} \phi_i$ avec ϕ_i des formules ;
- $\bigwedge_{i\in I} \phi_i$ avec ϕ_i des formules ;

ϕ et ψ étant deux formules. Par exemple, $(\exists x : A)(r(x,x) \wedge r'(x,y) \wedge y = f(z))$ est une formule si $r \rightarrowtail A\ A$, $r' \rightarrowtail A\ B$, $y : B$, $z : C$ et $f : C \to B$ sont des symboles des bons types. On dit qu'une formule est *géométrique* si les symboles $\implies$, $\neg$, $\forall$ et $\bigwedge$ n'apparaissent pas.

Maintenant que l'on dispose de formules, on peut définir les *théories*, qui seront l'objet principal dans cette section, à mettre en correspondance avec les topos.

Définition 4.3. Un *séquent* est une expression de la forme $\phi \vdash \psi$ avec ϕ et ψ des formules. Intuitivement, on pensera à ψ comme une conséquence logique de ϕ. On dit qu'un séquent est *géométrique* si les deux formules ϕ et ψ le sont. Une *théorie* est un ensemble de séquents appelés les *axiomes*. Si tous les axiomes d'une théorie sont des séquents géométriques, on dit alors que la théorie est *géométrique*.

Remarque 4.4. *Les formules, séquents et théories sont dits* géométriques *car, comme on le verra plus tard, les morphismes géométriques entre topos préservent les modèles des* *théories géométriques. Quant au terme* morphisme géométrique, *il provient du fait que les topos peuvent être vus comme des espaces généralisés, ceux-ci provenant d'ailleurs principalement de la géométrie algébrique.*

Exemple 4.5. Définissons une signature Σ ayant une sorte A, deux symboles de constantes 0 et 1, deux symboles de fonctions binaires $+$ et $\times$, et un symbole de fonction unaire $-$. On construit alors la *théorie des anneaux*, qui contient les axiomes suivants :

$$\begin{aligned}
&\top \vdash 0 + x = x \\
&\top \vdash x + y = y + x \\
&\top \vdash (x + y) + z = x + (y + z) \\
&\top \vdash x + (-x) = 0 \\
&\top \vdash 1 \times x = x \\
&\top \vdash x \times y = y \times x \\
&\top \vdash (x \times y) \times z = x \times (y \times z) \\
&\top \vdash x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z).
\end{aligned}$$

On dit que cette théorie est *algébrique* car la signature n'a aucun symbole de relation et car tous les axiomes sont de la forme $\top \vdash s = t$. On peut ajouter les axiomes :

$$x_1 + \cdots + x_n = 1 \vdash \bigvee_{i=1}^{n} \exists y (x_i \times y = 1)$$

pour chaque $n \in \mathbf{N}$, qui signifient que l'anneau en question est local. On obtient alors la théorie géométrique des anneaux locaux.

4.2 Lien avec les topos

Maintenant que nous savons ce que sont les théories, nous pouvons les faire correspondre avec les topos de Grothendieck. Pour cela, nous allons *interpréter* les formules du premier ordre dans tous les topos (dans les cours de logique en général on le fait seulement dans le topos des ensembles, et on perd beaucoup d'informations intéressantes).

Définition 4.6. Soient $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck (ou plus généralement, mais ça marche moins bien, une catégorie admettant tous les produits finis) et Σ une signature. Une Σ-*structure* M dans $\mathcal{E}$ est la donnée :

- Pour chaque sorte A d'un objet MA de $\mathcal{E}$;
- Pour chaque symbole de fonction $f : A_1 \cdots A_n \to B$ d'une flèche $Mf : MA_1 \times \cdots \times MA_n \to MB$;
- Pour chaque symbole de relation $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ d'un sous-objet $MR \rightarrowtail MA_1 \times \cdots \times MA_n$.

Étant données deux Σ-structures M et N dans $\mathcal{E}$, un *homomorphisme de* Σ-*structures* $h : M \to N$ est la donnée d'une flèche $h_A : MA \to NA$ pour chaque sorte A de Σ, vérifiant que :

— Pour tout symbole de fonction $f : A_1 \cdots A_n \to B$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} MA_1 \times \cdots \times MA_n \arrow[r, "Mf"] \arrow[d, "h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}"] & MB \arrow[d, "h_B"] \\ NA_1 \times \cdots \times NA_n \arrow[r, "Nf"] & NB \end{tikzcd}$$

commute ;

— Pour tout symbole de relation $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$, il existe une flèche $MR \to NR$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} MR \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed] & MA_1 \times \cdots \times MA_n \arrow[d, "h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}"] \\ NR \arrow[r, tail] & NA_1 \times \cdots \times NA_n \end{tikzcd}$$

commute.

On obtient une catégorie $\Sigma - \mathrm{Str}(\mathcal{E})$ des Σ-structures dans $\mathcal{E}$ et homomorphismes entre elles.

Une catégorie de Σ-structures n'est pas réellement intéressante en elle-même. Par exemple lorsque l'on définit les groupes de Lie (comme des groupes dans la catégorie des variétés différentielles) ou les schémas en groupes (comme des groupes dans la catégorie des schémas), ce qui nous intéresse réellement dans la catégorie des Σ-structures, ce sont celles qui obéissent aux axiomes de la théorie des groupes. On va donc extraire dans $\Sigma - \mathrm{Str}(\mathcal{E})$ la sous-catégorie des *modèles* d'une théorie donnée.

Définition 4.7. Soient $\mathcal{E}$ un topos, Σ une signature et M une Σ-structure dans $\mathcal{E}$. Étant donnés un terme $t : B$ et un *contexte* $\vec{x} = (x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)$ (c'est-à-dire une suite finie de variables contenant au moins toutes les variables libres de t), on *interprète* le terme t dans le contexte $\vec{x}$ comme une flèche $[\![\vec{x}.t]\!]_M : MA_1 \times \cdots \times MA_n \to MB$. Récursivement, si t est une variable x_i alors l'interprétation $[\![\vec{x}.t]\!]_M : MA_1 \times \cdots \times MA_n \to MA_i$ est la projection ; et si $t = f(t_1 : C_1, \ldots, t_m : C_m)$ alors $[\![\vec{x}.t]\!]_M$ est la composée $Mf \circ ([\![\vec{x}.t_1]\!]_M, \ldots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_M)$.

Si ϕ est une formule et $\vec{x} = (x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)$ est un contexte adapté, on *interprète* la formule ϕ dans le contexte $\vec{x}$ comme un sous-objet de $MA_1 \times \cdots \times MA_n$. Il y a une définition pour chaque type de formule, par exemple l'interprétation $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ de $\phi = (\psi \wedge \chi)$ est le pullback des interprétations $[\![\vec{x}.\psi]\!]_M$ et $[\![\vec{x}.\chi]\!]_M$ (c'est-à-dire l'intersection des deux sous-objets correspondants). Les détails sont listés dans le rapport en anglais.

Exemple 4.8. On reprend les notations de l'exemple 4.5. Si $\mathcal{E}$ est un topos et M une Σ-structure dans $\mathcal{E}$, la formule $0 + x = x$ (notée plus tard ϕ), dans le contexte $x : A$, est interprétée de la manière suivante. Elle est de la forme $s = t$ avec s et t deux termes, donc son interprétation est l'égalisateur des interprétations de s et t. Le terme $0+x$, réécrit $+(0(),x)$, s'interprète dans le contexte x comme la composée $MA \cong 1 \times MA \to MA \times MA \to MA$, la première flèche étant $([\![0]\!], \mathrm{id})$ et la seconde étant l'interprétation $M+$ de l'addition dans la structure M. Le second terme x s'interprète dans le contexte x comme l'identité $MA \to MA$. L'égalisateur de ces deux interprétations est le sous-objet $[\![x.(0+x=x)]\!]_M$ de MA.

Si $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ par exemple, MA est un ensemble qui est le candidat à être un anneau, et $M+$ est la loi d'addition que l'on a choisie dessus. L'interprétation $[\![x.(0+x=x)]\!]_M$ est alors une partie de MA, qui correspond aux $x \in MA$ tels que $0+x=x$. Si l'on veut que MA soit réellement un anneau, il faudra alors que cette interprétation soit égale à MA tout entier, comme on va le voir dans la définition suivante.

Définition 4.9. Soient $\mathcal{E}$ un topos, Σ une signature, M une Σ-structure dans $\mathcal{E}$ et $\sigma = (\phi \vdash \psi)$ un séquent, muni d'un contexte $\vec{x}$ adapté à ϕ et ψ. On dit que σ est *satisfait* dans M si $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ est un sous-objet de $[\![\vec{x}.\psi]\!]_M$. Dans ce cas, on note $M \vDash \sigma$. Si tous les axiomes d'une théorie $\mathbb{T}$ sont satisfaits dans M, on dit alors que M est un *modèle* de $\mathbb{T}$ (ou un $\mathbb{T}$-modèle), et l'on note $M \vDash \mathbb{T}$. La sous-catégorie des Σ-structures dans $\mathcal{E}$ constituée des $\mathbb{T}$-modèles est notée $\mathbb{T} - \mathrm{Mod}(\mathcal{E})$.

Exemple 4.10. Reprenons l'exemple précédent, où l'on a interprété la formule $0+x=x$ dans le contexte $x : A$ de la (signature de la) théorie des anneaux. L'axiome $\top \vdash 0+x=x$ de la théorie des anneaux est satisfait dans M si $[\![x.\top]\!]_M$ est un sous-objet du sous-objet $[\![x.(0+x=x)]\!]_M$ de MA que l'on a construit. Comme $[\![x.\top]\!]_M$ est toujours égal à MA, cela revient à demander que ce sous-objet compliqué soit égal à MA tout entier. Dans l'exemple de $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$, on retrouve bien la condition que $0+x=x$ pour tout élément x de MA.

Remarque 4.11. *La condition que l'interprétation de ϕ soit un sous-objet de l'interprétation de ψ (pour un axiome $\phi \vdash \psi$ d'une théorie) montre bien l'idée que dans les modèles de la théorie, la vérité de la formule ϕ entraîne la vérité de la formule ψ.*

Comme annoncé plus haut, la raison première pour considérer les théories géométriques est la suivante.

Proposition 4.12. *Si $\mathbb{T}$ est une théorie géométrique sur une signature Σ et M est un $\mathbb{T}$-modèle dans un topos $\mathcal{E}$, alors pour tout morphisme géométrique $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, la Σ-structure $f^*(M)$ dans $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{T}$-modèle. C'est faux en général si $\mathbb{T}$ n'est pas géométrique.*

Celleux ayant déjà suivi un cours de logique du premier ordre connaissent probablement le *calcul des séquents*, qui est une collection de règles logiques qui permettent de prouver des théorèmes dans une théorie donnée, en partant des axiomes. Par exemple, les séquents $\phi \vdash \psi$ et $\phi \vdash \chi$ entraînent à eux deux la validité du séquent $\phi \vdash \psi \wedge \chi$. Intuitivement, si ψ et χ sont deux formules conséquences logiques de ϕ, alors $\psi \wedge \chi$ est aussi une conséquence logique de ϕ. Il existe toute une liste de telles règles, qui permettent de démontrer que des modèles d'une théorie donnée vérifient des séquents donnés. Le théorème assurant ceci, appelé *théorème de cohérence*, montre qu'un raisonnement effectué dans un topos, par exemple celui des ensembles, restera toujours vrai dans les autres topos. Le théorème devient faux si l'on accepte la règle introduisant la loi du tiers exclu $\top \vdash \phi \vee \neg\phi$. En effet, une partie A d'un ensemble E admet toujours un complémentaire A^{c} tel que $A \cap A^{c} = \emptyset$ et $A \cup A^{c} = E$, mais ceci est faux en général dans les topos quelconques. Un topos qui vérifie la loi du tiers exclu est dit *booléen*. De même, il n'est pas possible de faire des raisonnements par récurrence dans les topos qui n'admettent pas d'*objet nombres naturels* (l'analogue de $\mathbf{N}$ dans la catégorie des ensembles). À par ces deux restrictions, toutes les mathématiques que l'on fait avec les ensembles aujourd'hui, si elles sont finitistes (n'utilisent pas de récurrence) et constructives (n'utilisent pas le tiers exclu), sont *valides dans tous les topos*.

4.3 Les topos classifiants

Nous avons vu que les topos sont un cadre idéal pour interpréter la logique du premier ordre, et grâce au théorème de cohérence, pour y prouver des choses en raisonnant avec des ensembles. Mais le lien entre les topos et les théories géométriques est encore plus fort, comme nous l'allons maintenant voir.

Définition 4.13. Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique. Un *topos classifiant* pour $\mathbb{T}$ est un topos de Grothendieck $\mathbf{Set}[\mathbb{T}]$ tel que pour tout topos $\mathcal{E}$, on ait une équivalence :

$$\mathfrak{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Set}[\mathbb{T}]) \simeq \mathbb{T} - \mathrm{Mod}(\mathcal{E}).$$

On demande que cette équivalence soit *naturelle en $\mathcal{E}$*, autrement dit pour tout morphisme géométrique $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Set}[\mathbb{T}]) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "- \circ f"] & \mathbb{T} - \mathrm{Mod}(\mathcal{E}) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathfrak{Geom}(\mathcal{F}, \mathbf{Set}[\mathbb{T}]) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{T} - \mathrm{Mod}(\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

commute à isomorphisme près. Il est clair que s'il existe, un topos classifiant est toujours unique à isomorphisme canonique près.

Une théorie $\mathbb{T}$ étant donnée, un topos classifiant est donc un topos qui permet de *détecter* les modèles de $\mathbb{T}$ dans n'importe quel topos $\mathcal{E}$ via les morphismes géométriques $\mathcal{E} \to \mathbf{Set}[\mathbb{T}]$.

Remarque 4.14. *Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique admettant un topos classifiant $\mathbf{Set}[\mathbb{T}]$. Dans la définition précédente, on peut choisir $\mathcal{E} = \mathbf{Set}[\mathbb{T}]$, et transporter l'identité* $\mathrm{id}_{\mathbf{Set}[\mathbb{T}]} \in \mathfrak{Geom}(\mathbf{Set}[\mathbb{T}], \mathbf{Set}[\mathbb{T}])$ *à travers l'équivalence* $\mathfrak{Geom}(\mathbf{Set}[\mathbb{T}], \mathbf{Set}[\mathbb{T}]) \simeq \mathbb{T} - \mathrm{Mod}(\mathbf{Set}[\mathbb{T}])$ *pour obtenir un* $\mathbb{T}$-modèle universel U *dans* $\mathbf{Set}[\mathbb{T}]$*. Ce modèle est* universel *au sens où tout modèle de la théorie $\mathbb{T}$ dans tout topos $\mathcal{F}$ se réalise comme image réciproque de U par un certain morphisme géométrique $\mathcal{F} \to \mathbf{Set}[\mathbb{T}]$.*

Bien sûr, il est possible de définir les topos classifiants pour n'importe quelle théorie, pas forcément géométrique. Mais le théorème suivant met un terme à cette discussion.

Théorème 4.15. *Toute théorie géométrique admet un topos classifiant, et tout topos de Grothendieck classifie une théorie géométrique.*

Idée de démonstration. Pour une théorie $\mathbb{T}$ donnée, on peut construire une *catégorie syntactique* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ qui, munie d'une topologie $J_{\mathbb{T}}$ bien choisie, donne un topos $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ qui convient comme topos classifiant. Réciproquement, si $(\mathcal{C}, J)$ est un petit site alors on peut construire une théorie $\mathbb{T}_J^{\mathcal{C}}$ *des foncteurs plats J-continus sur $\mathcal{C}$*, qui est classifiée par $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$. □

Exemple 4.16. On a vu plus haut que la théorie $\mathbb{T}$ des anneaux locaux était une théorie géométrique (la théorie des anneaux est algébrique, et l'axiome de localité n'introduit que les symboles $\bigvee$ et $\exists$ qui font partie de la logique géométrique). En vertu du théorème précédent, $\mathbb{T}$ admet donc un topos classifiant $\mathbf{Set}[\mathbb{T}]$. Ce topos est communément connu comme sous le nom de *topos de Zariski* du schéma Spec $\mathbf{Z}$. (Le modèle universel correspondant est le foncteur d'oubli $\mathcal{O} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ défini sur la catégorie $\mathcal{C}$ des anneaux finiment présentés ; cela provient de la description explicite du topos de Zariski.) Le topos de Zariski d'un schéma est un objet important en géométrie algébrique, tout comme le sont d'autres topos créés à partir de schémas, notamment les topos étale et cristallin. L'étude des théories classifiées par ces topos, établissant un lien fort entre logique et géométrie algébrique, est importante et encore ouverte en général. On ne connaît explicitement une théorie classifiée par le topos cristallin d'un schéma en général que depuis 2022.

Remarque 4.17. *On remarque avec la définition que les points du topos classifiant* $\mathbf{Set}[\mathbb{T}]$ *d'une théorie géométrique* $\mathbb{T}$ *correspondent aux modèles de* $\mathbb{T}$ *dans la catégorie des ensembles,* $\mathbf{Set}$*. On retrouve alors, comme dans l'exemple* **??***, des topos non triviaux n'ayant aucun point. Ce sont ceux qui classifient des théories géométriques consistantes n'ayant aucun modèle dans* $\mathbf{Set}$*.*

Terminons en énonçant un joli théorème de dualité, qui fait correspondre les *quotients* d'une théorie (c'est-à-dire les théories plus fortes) avec les sous-topos de son topos classifiant.

Définition 4.18. Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique. Un *quotient* de $\mathbb{T}$ et une théorie $\mathbb{T}'$ dans laquelle on peut prouver tous les axiomes de $\mathbb{T}$. Deux théories sont dites *syntactiquement équivalentes* si tout séquent géométrique prouvable dans l'une est prouvable dans l'autre.

Théorème 4.19. *Soit* $\mathbb{T}$ *une théorie géométrique. Il y a une bijection entre les quotients de* $\mathbb{T}$ *modulo équivalence syntactique et les sous-topos de* $\mathbf{Set}[\mathbb{T}]$*, qui envoie un quotient* $\mathbb{T}'$ *sur* $\mathbf{Set}[\mathbb{T}']$ *vu comme sous-topos de* $\mathbf{Set}[\mathbb{T}]$*.*