Séminaire ensemble de Cantor :

Romaric Batisse

Septembre 2023

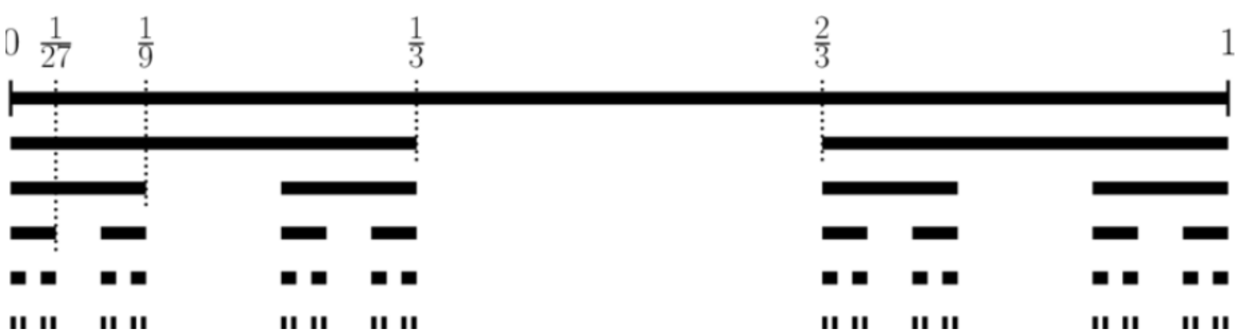


Table des matières

Ce séminaire s'appuie sur [1]. Dans tout ce qui suit, si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\lambda(A)$ la mesure de Lebesgue de A. Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. On notera C l'ensemble de Cantor. La notation $B(x,r)$ (resp $B_f(x,r)$) désignera la boule ouverte (resp fermée) centrée en x et de rayon r.

1 Ensemble triadique de Cantor

Définition 1.1 (Ensemble triadique de Cantor)**.** Pour définir l'ensemble de Cantor, on considère le segment $C_0 := [0,1]$. On sépare cet intervalle en 3 segments de longueurs égales et on retire celui du milieu. On obtient l'ensemble $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On recommence ce procédé sur chaque intervalle fermé restant, en notant C_n l'ensemble obtenu à l'étape n. On appelle ensemble triadique de Cantor (que l'on désignera par ensemble de Cantor dans la suite), l'ensemble : $C := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

On énonce ici certaines propriétés de l'ensmble de Cantor qui seront démontrées dans la partie "Cantor gras".

Définition 1.2 (espace totalement discontinu)**.** On dit qu'un espace E est totalement discontinu si ses composantes connexes sont des singletons.

Proposition 1.1. *L'ensemble C vérifie les propriétés suivantes :*
i) C est compact.
ii) $\lambda(C) = 0$. En particulier, C est d'intérieur vide.
iii) C est totalement discontinu.
iv) C ne possède aucun point isolé.
v) C a la puissance du continu.

2 Cantor-Bendixon

On commence par introduire quelques définitions :

Définition 2.1 (Point isolé, point d'accumulation)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$. On dit que x est un point isolé de A si il existe un voisinage $U \in \mathscr{V}(x)$ de x tel que $(U \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$.
On dit que x est un point d'accumulation de A si pour tout voisinage $U \in \mathscr{V}(x)$ de x, on a $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Définition 2.2 (Parfait)**.** Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est appelée un parfait de $\mathbb{R}$ si A est fermée et si A ne possède aucun point isolé.

Définition 2.3 (Puissance du continu)**.** On dit qu'un ensemble E a la puissance du continu si E est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème important 1 (Cantor-Bendixon)**.** Tout fermé de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe d'un parfait et d'un ensemble au plus dénombrable. De plus cette partition est unique.

Nous allons commencer par établir certaines propriétés sur les parfaits de $\mathbb{R}$.

Lemme 2.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie sans point isolé, $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Alors $A \cap]a, b[$ est sans point isolé.*

Démonstration. Par l'absurde, soit $x \in A \cap]a, b[$ un point isolé de $A \cap]a, b[$. Posons alors $r > 0$ tel que $(]x-r, x+r[\setminus \{x\}) \cap (A \cap]a, b[) = \emptyset$. Comme $x \in]a, b[$, quitte à réduire $r > 0$, on peut supposer $]x-r, x+r[\subset]a, b[$. Comme $x \in A$ n'est pas un point isolé de A par hypothèse, on a : $(]x-r, x+r[\setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, ce qui contredit ce qui précède. $\square$

Remarque 2.1. Ce lemme devient faux si on ferme l'une des bornes de l'intervalle. En effet, si on prend $A := [0, 1]$ qui ne contient pas de point isolé, $a := 1$, $b := 2$, on a :

$$A \cap [a, b[= [0, 1] \cap [1, 2[= \{1\}$$

qui est un point isolé de $\{1\}$. (Tout voisinage $U \in \mathscr{V}(1)$ vérifie $(U \setminus \{1\}) \cap \{1\} = \emptyset$).

Lemme 2.2. *Si $A \subset \mathbb{R}$ est sans point isolé, alors $\overline{A}$ est sans point isolé.*

Démonstration. Par l'absurde, soit $x \in \overline{A}$ un point isolé de $\overline{A}$. Posons $U \in \mathscr{V}(x)$ tel que $(U \setminus \{x\}) \cap \overline{A} = \emptyset$.
<u>Cas 1 : $x \in A$</u> Comme x n'est pas un point isolé de A par hypothèse, $\emptyset \neq (U \setminus \{x\}) \cap A \subset (U \setminus \{x\}) \cap \overline{A} = \emptyset$, ce qui est absurde.
<u>Cas 2 : $x \notin A$</u>
Comme $x \in \overline{A}$ et $U \in \mathscr{V}(x)$, il existe $y \in U \cap A$. Comme $x \notin A$, on a $y \neq x$.
Ainsi $y \in (U \setminus \{x\}) \cap A \subset (U \setminus \{x\}) \cap \overline{A} = \emptyset$, ce qui est absurde. $\square$

Lemme 2.3. *Dans un parfait P non vide de $\mathbb{R}$, on peut trouver deux parfaits non vides disjoints.*

Démonstration. P n'est pas un singleton (car sinon il contiendrait un point isolé). Posons alors $p_1, p_2 \in P$, avec $p_1 < p_2$. Posons $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$ tels que $p_1 \in]a_1, b_1[$ et $p_2 \in]a_2, b_2[$. Comme P est parfait, il n'a pas de point isolé. Par les deux lemmes précédents, on obtient successivement que $]a_1, b_1[\cap P$ n'a pas de point isolé, puis que $P_1 := \overline{]a_1, b_1[\cap P}$ non plus. Comme P_1 est fermé, c'est un parfait de $\mathbb{R}$. On montre de même que $P_2 := \overline{]a_2, b_2[\cap P}$ est un parfait de $\mathbb{R}$; et il est clair qui P_1 et P_2 sont non vides et disjoints. $\square$

Théorème 2.1. *Un parfait non vide de $\mathbb{R}$ a la puissance du continu.*

Démonstration. Soit P un parfait non vide de $\mathbb{R}$.
Étape 1 : P n'est pas fini
Par l'absurde, posons $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Posons $r := \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_1 - x_i|\} > 0$, on a $(]x_1 - r, x_1 + r[\setminus \{x_1\}) \cap P = \emptyset$ par définition de r, donc x_1 est un point isolé de P, ce qui est absurde.
Étape 2 : P n'est pas dénombrable
On note $P = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Montrons que pour tout $x \in P$, $r > 0$, $]x - r, x + r[\cap P$ est infini. Soit $x \in P$, supposons par l'absurde qu'il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\cap P$ possède $k \in \mathbb{N}^*$ éléments, notés $y_1, \ldots, y_k$. Posons $r' := \min\limits_{1 \leq i \leq k} |x - y_i| > 0$. Alors par définition des y_i, on a $(]x - r', x + r'[\setminus \{x\}) \cap P = \emptyset$, donc x est un point isolé de P, ce qui contredit que P est parfait.
En appliquant ceci à $x \in P$, $x \neq x_1$, on pose $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$ tels que $]a_1, b_1[\cap P$ est infini et ne contient pas x_1. Posons $I_1 := [a_1, b_1]$. Posons $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
$I_2 := [a_2, b_2] \subset I_1$, $\frac{b_2 - a_2}{2} \leq b_1 - a_1$, $x_2 \notin I_2$ et $]a_2, b_2[\cap I_2$ est infini. Si $x_2 \notin I_1$, il est clair que cette construction est possible. Si $x_2 \in I_1$, alors $]a_1, x_2[\cap P$ ou $]x_2, b_1[\cap P$ est infini car $]a_1, b_1[\cap P$ l'est. On peut supposer (par symétrie des rôles) que $]a_1, x_2[\cap P$ est infini, donc $]a_1, \frac{a_1 + x_2}{2}[\cap P$ ou $]\frac{a_1 + x_2}{2}, x_2[\cap P$ est infini. En choisissant celui qui l'est, la condition $\frac{b_2 - a_2}{2} \leq b_1 - a_1$ est bien vérifiée.
En itérant ce procédé, on construit une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de compacts emboîtés dont la longueur tend vers 0. Posons alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{a\}$. Par construction, ce point a est limite d'une suite de points de P, et comme P est fermé, on a donc $a \in P$. Si on note $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = x_n$, on a une contradiction car $x_n \notin I_n$ par construction de I_n.
Étape 3 : P a la puissance du continu
Comme P est une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$, d'après l'hypothèse du continu, P a la puissance du continu.
Méthode alternative :
On donne maintenant une preuve alternative du même résultat pour éviter d'avoir recours à un un résultat indécidable. La preuve suivante ne fait donc pas appel à l'hypothèse du continu.
Cas 1 : P borné
Supposons P borné, comme il est fermé car parfait, il est compact. D'après le lemme précédent, on obtient deux parfaits non vides disjoints P_0, P_1 inclus dans P. On recommençant, on peut construire $P_{0,0}, P_{0,1} \subset P_0, P_{1,0}, P_{1,1} \subset P_1$. Si on considère $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on pose $I := P_{\alpha_0} \cap P_{\alpha_0, \alpha_1} \cap P_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \cap \ldots$. Comme on effectue une intersection décroissante de compacts non vides, on a $I_\alpha \neq \emptyset$. Pour chaque suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on peut donc associer un élément de $p \in I_\alpha \subset P$. Comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a la puissance du continue, on en déduit que P aussi.
Cas 2 : P non borné
Supposons maintenant que P n'est ni majoré, ni minoré. Pour $x \in]-1, 1[$, on définit $h(x) := \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ qui est un homéomorphisme de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. Comme h est continue, l'ensemble $Q := h^{-1}(P) \cup \{-1, 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Montrons que si $x \in Q$, alors x n'est pas un point isolé. Soit $r > 0$. Si $x \in \{-1, 1\}$, comme P n'est ni majoré ni minoré, il existe $p \in P$ tel que $|h^{-1}(p) - x| < r$, avec $h^{-1}(p) \in]-1, 1[$, donc $h^{-1}(p) \neq x$. Ainsi $h^{-1}(p) \in]x - r, x + r[\setminus \{x\} \cap Q$.
Si $x \in h^{-1}(P)$, alors $h(x) \in P$. Comme h^{-1} est continue, posons $\eta > 0$ tel que si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $|a - b| < \eta$, alors $|h^{-1}(a) - h^{-1}(b)| < r$. Comme P est parfait, $h(x)$ n'est pas isolé dans P, donc il existe $p \in P \setminus \{h(x)\}$ tel que $|h(x) - p| < \eta$. On a donc : $|x - h^{-1}(p)| < r$, donc $h^{-1}(p) \in]x - r, x + r[\setminus \{x\} \cap Q$.
Par conséquent, Q est un parfait borné, donc d'après le cas 1, il a la puissance du continu, et donc P aussi. Si P est minoré non majoré ou majoré non minoré, on procède de la même manière. □

Corollaire 2.1. *Si P est un parfait de $\mathbb{R}$ et O un ouvert de $\mathbb{R}$ vérifiant $P \cap O \neq \emptyset$. Alors $P \cap O$ a la puissance du continu.*

Démonstration. Soit $x \in P \cap O$. Comme O est un ouvert, posons $r > 0$ tel que $]x - 2r, x + 2r[\subset O$. Posons $P' := \overline{P \cap]x - r, x + r[}$. D'après les lemmes 2.1 et 2.2, P' est un parfait. Comme il est non vide, il a la puissance du continu par le théorème précédent. De plus $P' \subset P \cap O$, donc $P \cap O$ a la puissance du continu. □

Définition 2.4 (ensemble dérivé)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$, on note A' l'ensemble des points d'accumulation de A, et on l'appelle ensemble dérivé de A

Proposition 2.1. *Soit I un ensemble, $(A_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^I$, alors on a :*

$$\bigcup_{i\in I} A_i' \subset \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)'$$

Démonstration. Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i'$, posons $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}'$. Soit $U \in \mathscr{V}(x)$. On a :

$$\emptyset \neq (U \setminus \{x\}) \cap A_{i_0} \subset (U \setminus \{x\}) \cap \bigcup_{i\in I} A_i$$

donc $x \in \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)'$. □

Notation 1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, on note $N(A)$ la réunion de toutes les parties de A sans point isolé.

Proposition 2.2. *Si $A \subset \mathbb{R}$, alors $N(A)$ est sans point isolé, et $A \setminus N(A)$ ne contient aucune partie non vide sans point isolé. De plus, si A est fermé, alors $N(A)$ l'est aussi donc est parfait.*

Démonstration. Soit $x \in N(A)$, $U \in \mathscr{V}(x)$. Comme $x \in N(A)$, posons $B \subset A$ sans point isolé tel que $x \in B$. Ainsi x n'est pas un point isolé de B, donc :

$$\emptyset \neq (U \setminus \{x\}) \cap B \subset (U \setminus \{x\}) \cap N(A)$$

donc x n'est pas un point isolé de $N(A)$.
Soit $D \subset A \setminus N(A)$ tel que D n'a pas de point isolé. Alors $D \subset N(A)$ par définition de $N(A)$, donc $D = \emptyset$.
Supposons A fermé. Comme $N(A) \subset A$, on a : $\overline{N(A)} \subset \overline{A} = A$ car A est fermé. De plus, comme $N(A)$ n'a pas de point isolé, $\overline{N(A)}$ n'en n'a pas non plus par le lemme 2.2. Par définition de $N(A)$, on a donc $\overline{N(A)} \subset N(A)$, donc $N(A)$ est fermé. Comme il est sans point isolé, c'est un parfait de $\mathbb{R}$. □

Définition 2.5 (Point de condensation)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$. On dit que x est un point de condensation de A si pour tout $U \in \mathscr{V}(x)$, alors $U \cap A$ a la puissance du continu. On note A° l'ensemble des points de condensation de A.

Proposition 2.3. *Soient $A, B \subset \mathbb{R}$. Alors A° est un fermé, $A^\circ \subset A'$,et on a :*
i) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
ii) $A \setminus A^\circ$ est au plus dénombrable.
iii) $A^{\circ\circ}$=A°

Démonstration. Soit $x \in \overline{A^\circ}$, $U \in \mathscr{V}(x)$. Posons alors $y \in U \cap A^\circ$. On a donc $U \in \mathscr{V}(y)$, donc par définition de A°, $U \cap A$ a la puissance du continu, donc $x \in A^\circ$. Cela montre que A° est fermé. Si $x \in A^\circ$, $U \in \mathscr{V}(x)$, alors $U \cap A$ a la puissance du continu, donc $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, donc $x \in A'$.
i) Soit $x \in (A \cup B)^\circ$, $U \in \mathscr{V}(x)$. On a :

$$U \cap (A \cup B) = (U \cap A) \cup (U \cap B)$$

Comme $U \cap (A \cup B)$ a la puissance du continu par hypothèse, alors $(U \cap A)$ ou $(U \cap B)$ a la puissance du continu, donc $x \in A^\circ \cup B^\circ$.
ii) Notons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille dénombrable des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ à extrémités rationnelles. Pour $A \in \mathbb{R}$, notons $I(A) := \{n \in \mathbb{N} \,/\, I_n \cap A \text{ est au plus dénombrable}\}$. On a la relation :

$$A \setminus A^\circ = \bigcup_{n\in I(A)} (I_n \cap A)$$

qui est donc au plus dénombrable en tant qu'union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
iii) On a $A = A^\circ \cup (A \setminus A^\circ)$, donc d'après la propriété i), $A^\circ = A^{\circ\circ} \cup (A \setminus A^\circ)^\circ$. Or $A \setminus A^\circ$ est au plus dénombrable, donc $(A \setminus A^\circ)^\circ = \emptyset$, donc $A^\circ = A^{\circ\circ}$. □

Théorème 2.2. *Toute partie de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun sous-ensemble non vide sans point isolé est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant ces conditions. Par la proposition précédente, on a $A^\circ = A^{\circ\circ} \subset (A^\circ)'$, donc A° n'a pas de point isolé et vérifie $A^\circ \subset A$. Par hypothèse, on a donc $A^\circ = \emptyset$, c'est-à-dire que A est au plus dénombrable. □

Théorème important 2 (Cantor-Bendixon)**.** Tout fermé de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe d'un parfait et d'un ensemble au plus dénombrable. De plus cette partition est unique.

Démonstration. Étape 1 : Existence
Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Par la proposition 2.2, $F \setminus N(F)$ vérifie l'hypothèse du théorème précédent, donc est au plus dénombrable, et $N(F)$ est parfait car F est fermé. Ainsi, la partition $F = N(F) \sqcup (F \setminus N(F))$ convient.
Étape 2 : Unicité
Soient P_1, P_2 des parfaits de $\mathbb{R}$, D_1, D_2 des ensembles au plus dénombrables tels que $F = P_1 \sqcup D_1 = P_2 \sqcup D_2$. Si $D_1 = D_2$, il est clair que $P_1 = P_2$. Si $D_1 \neq D_2$, on peut supposer $D_1 \not\subset D_2$. Soit alors $p \in D_1 \setminus D_2$, on a alors $p \in P_2$ et $p \notin P_1$. Comme P_1^c est un ouvert, posons $U \in \mathscr{V}(p)$ tel que $U \cap P_1 = \emptyset$. On a donc :

$$U \cap P_2 \subset U \cap F = U \cap D_1$$

Or $p \in U \cap P_2$ donc $U \cap P_2 \neq \emptyset$, donc par le corollaire 2.1, $U \cap P_2$ a la puissance du continu alors que $U \cap D_1$ est au plus dénombrable, ce qui est absurde. □

Nous allons maintenant présenter une application du théorème de Cantor-Bendixon :

Application 1. Soit F une partie fermée de $[0,1]$, d'intérieur vide, alors il existe un homéomorphisme h de $[0,1]$ tel que $h(F)$ soit de mesure nulle.

Démonstration. D'après le théorème de Cantor-Bendixon, posons P parfait et D un ensemble au plus dénombrable tels que $F = P \sqcup D$. Si $P = \emptyset$, alors F est de mesure nulle, donc prendre l'identité pour h suffit. Si $P \neq \emptyset$, comme P est parfait, compact car fermé dans $[0,1]$, d'intérieur vide car F l'est, on dispose d'après le théorème 3 d'un homéomorphisme $h : [0,1] \to [0,1]$ tel que $h(P) = C$. Ainsi, on a : $h(F) = h(P) \sqcup h(D) = C \sqcup h(D)$, qui est bien de mesure nulle car C l'est et car $h(D)$ est au plus dénombrable. □

3 Théorème de Cantor

Définition 3.1 (ensembles similaires)**.** Soient $(X, \prec)$ et $(Y, \prec')$ deux ensembles totalement ordonnés. Ces ensembles sont dit similaires s'il existe une bijection croissante $f : X \to Y$, c'est-à-dire vérifiant pour tous $x, x' \in X$, si $x \prec x'$, alors $f(x) \prec' f(x')$.

Remarque 3.1. Dans ce cas, la bijection est même strictement croissante.

Théorème 3.1 (de Cantor)**.** *Soit $(X, \prec)$ un ensemble totalement ordonné dénombrable.*
On suppose que $\prec$ vérifie les conditions suivantes :
i) Elle ne possède ni plus petit ni plus grand élément.
ii) Si $p, q \in X$, avec $p \neq q$ et $p \prec q$, alors il existe $r \in X \setminus \{p, q\}$ tel que $p \prec r \prec q$.
Alors $(X, \prec)$ est similaire à $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Démonstration. Comme X est dénombrable, on écrit $x = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.
Notons $Y := \{\frac{m}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq m < 2^n\}$. On va construire une bijection f strictement croissante de $(X, \prec)$ sur $(Y, \leq)$. À la première étape, on pose $f(x_1) = \frac{1}{2}$. À la deuxième étape, si $x_1 \prec x_2$, on note n_1 le premier indice tel que $x_{n_1} \prec x_1$, ce qui est possible par la condition i). On pose $f(x_2) = \frac{3}{4}$ et $f(x_{n_1}) = \frac{1}{4}$. On a une bijection strictement croissante entre $\{x_1, x_2, x_{n_1}\}$ et $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Supposons qu'à la n-ième étape, on ait une bijection de X_n sur $Y_n := \{\frac{m}{2^n}, 1 \leq m < 2^n\}$, où X_n est un ensemble à $2^n - 1$ éléments contenant $x_1, \ldots, x_n$. On note $X_n = \{x'_1, \ldots, x'_{2^n-1}\}$, où les x'_i sont rangés par ordre croissant pour $\prec$. D'après les points i) et ii), il existe 2^n éléments distincts de ceux de X $x''_1, \ldots, x''_{2^n} \in X$ tels que :

$$x''_1 \prec x'_1 \prec x''_2 \prec x'_2 \prec \cdots \prec x'_{2^n-1} \prec x''_{2^n}$$

Si $x_{n+1} \notin X$, on peut imposer que l'un des x''_i soit x_{n+1}. En notant $X_{n+1} = \{x''_1, x'_1, x''_2, x'_2, \ldots, x'_{2^n-1}, x''_{2^n}\}$, $Y_{n+1} = \{\frac{m}{2^{n+1}}, 1 \leq m < 2^{n+1}\}$, et en posant pour $1 \leq i \leq 2^n$, $f(x''_i) = \frac{2i-1}{2^{n+1}}$, la propriété de récurrence est bien vérifiée à l'étape $n+1$. Finalement, on construit de proche en proche la bijection f de X sur Y qui est bien croissante. Comme $(\mathbb{Q}, \prec)$ vérifie les conditions du théorème, il est similaire à $(Y, \leq)$ donc à $(X, \prec)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Application 2. Toute partie de $\mathbb{R}$, dénombrable et contenant $\mathbb{Q}$ est homéomorphe à $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $P \subset \mathbb{R}$ dénombrable telle que $\mathbb{Q} \subset P$. Comme $\mathbb{Q} \subset P$ et P est dénombrable, $(P, \leq)$ vérifie les hypothèses du théorème précédent, posons alors $f : \mathbb{Q} \to P$ une bijection strictement croissante. Comme f est croissante, pour montrer qu'elle est continue, il suffit de montrer que :

$$f(x) = \sup_{y \in \mathbb{Q}, y < x} f(y) = \inf_{z \in \mathbb{Q}, z > x} f(z)$$

Par croissance de f, on a $\sup_{y \in \mathbb{Q}, y < x} f(y) \leq f(x)$. Par l'absurde, si l'inégalité est stricte, alors par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{Q} \subset P$ tel que $\sup_{y \in \mathbb{Q}, y < x} f(y) < b < f(x)$. Comme $b \in P$ et f est une bijection croissante, posons $a \in \mathbb{Q}$, $a < x$ tel que $f(a) = b$. On a donc $\sup_{y \in \mathbb{Q}, y < x} f(y) < f(a)$, ce qui est absurde. On montre de même que $f(x) = \inf_{z \in \mathbb{Q}, z > x} f(z)$, donc f est continue. Comme $f^{-1} : P \to \mathbb{Q}$ est strictement croissante car f l'est, on peut procéder de la même manière pour montrer que f^{-1} est continue. Ainsi, P est homéomorphe à $\mathbb{Q}$. $\square$

Proposition 3.1. *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O s'écrit comme réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.*

Démonstration. Notons $(I_j)_{j \in J}$ l'ensemble des composantes connexes de O, on a donc la partition :

$$O = \bigsqcup_{j \in J} I_j$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $j_0 \in J$ tel que I_{j_0} ne soit pas ouvert. On peut supposer $I_{j_0} = [a, b)$ où $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Comme O est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset O$, ce qui contredit que I_{j_0} est une composante connexe de O. Ainsi, les I_j sont des intervalles ouverts. Pour $j_0 \in J$, comme I_{j_0} est ouvert et non vide, on pose $r_{j_0} \in \mathbb{Q}$ tel que $r_{j_0} \in I_{j_0}$. De plus, comme les I_j sont disjoints, on a nécessairement $r_{j_0} \notin O \setminus I_{j_0}$. Par conséquent, l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & J & \to & \mathbb{Q} \\ & & j & \mapsto & r_j \end{array}$$

est injective, donc J est au plus dénombrable, ce qui achève la preuve. □

À partir de maintenant, on considère $P \subset \mathbb{R}$ non vide, parfait, compact, d'intérieur vide et vérifiant $\inf P = 0$, $\sup P = 1$. D'après la proposition précédente, l'ouvert $]0,1[\setminus P = [0,1] \setminus P$ s'écrit comme une réunion disjointe d'une famille au plus dénombrable $\mathscr{I}$ d'intervalles ouverts. Par l'absurde, supposons cette famille fini, notons n son cardinal. On note $I_k =]a_k, b_k[$ pour $1 \leq k \leq n$, où $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n$. Si $a_1 > 0$, alors $[0, a_1] \subset P$, ce qui contredit que P est d'intérieur vide. Donc $a_1 = 0$, ce qui signifie que $\{0\}$ est isolé dans P, ce qui est absurde. Ainsi $\mathscr{I}$ est dénombrable. On définit sur $\mathscr{I}$ la relation d'ordre totale $\prec$ suivante :

$$I \prec J \Longleftrightarrow (I = J \ \ ou \ \ \sup I \leq \inf J)$$

Lemme 3.1. *L'ensemble $(\mathscr{I}, \prec)$ ainsi défini n'a ni plus grand ni plus petit élément, et si $I, J \in \mathscr{I}$ vérifient $I \neq J$ et $I \prec J$, alors il existe $K \in \mathscr{I}$ tel que $I \prec K \prec J$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\mathscr{I}$ admet un plus grand élément I, et notons $b := \sup I$. Si $b < 1$, alors comme I est le plus grand élément de $\mathscr{I}$, on a $]b, 1[\subset P$, ce qui est absurde car P est d'intérieur vide. Ainsi $b = 1$, donc $1 \in P$ est un point isolé de P, ce qui est absurde car P est parfait. On montre de même que $\mathscr{I}$ n'a pas de plus petit élément. Soient $I, J \in \mathscr{I}$ vérifiant $I \neq J$ et $I \prec J$, et supposons qu'il n'y ait pas d'intervalle de $\mathscr{I}$ entre les deux. On a donc $]\sup I, \inf J[\subset P$, et comme P est d'intérieur vide, il vient $\sup I = \inf J$. Par conséquent, $\sup I$ est un point isolé de P, ce qui est absurde car P est parfait. Cela achève la preuve. □

Théorème important 3. Deux sous-ensembles non vides, parfaits, compacts, d'intérieur vide sont homéomorphes.

Démonstration. Soient $P, P' \in [0,1]$ vérifiant les conditions du théorème et tels que $\inf P = \inf P' = 0$ et $\sup P = \sup P' = 1$. On note $(\mathscr{I}, \prec)$ et $(\mathscr{I}', \prec')$ les familles d'intervalles ouverts associés. D'après le lemme précédent et comme $\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}'$ sont des familles dénombrables, $(\mathscr{I}, \prec)$ et $(\mathscr{I}', \prec')$ sont similaires d'après le théorème 3.1. Notons alors $\phi : \mathscr{I} \to \mathscr{I}'$ une bijection strictement croissante. On définit $h : [0,1] \to [0,1]$ de la manière suivante : Si I est un intervalle de $\mathscr{I}$, alors h est la fonction affine strictement croissante sur I telle que $h(I) = \phi(I)$. Si $x \in P$, on note :

$$x^- := \sup_{y<x, y\notin P} h(y) \ \ et \ \ x^+ := \inf_{z>x, y\notin P} h(z)$$

Par construction, $]x^-, x^+[\subset P$, or P est d'intérieur vide, donc $x^- = x^+$. On pose alors $h(x) = x^-$. h est clairement continue sur $[0,1] \setminus P$. Comme h est strictement croissante, ce qui précède montre que h est aussi continue sur P. Comme $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$, d'après le théorème de la bijection monotone, $h([0,1]) = [0,1]$ et h est bien un homéomorphisme de $[0,1]$ qui vérifie $h(P) = h(P')$.
Maintenant, on ne suppose plus que $P, P' \subset [0,1]$. Comme P est compact non vide, on peut poser $a := \inf P \in \mathbb{R}$, $b := \sup P \in \mathbb{R}$. Posons $f(t) := \frac{t-a}{b-a}$. f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ vérifiant $f([a,b]) = [0,1]$. L'ensemble $f(P) \subset [0,1]$ vérifie toujours les conditions du théorème, et $\inf f(P) = 0$, $\sup f(P) = 1$. On peut faire de même avec P'. En appliquant ce qui précède, on obtient que P et P' sont homéomorphes. □

Remarque 3.2. L'ensemble de Cantor vérifie ces propriétés, donc ce théorème stipule que tout ensemble non vide, parfait, compact et d'intérieur vide est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

Lemme 3.2. *Si $F \subset \mathbb{R}$ est un fermé non dénombrable, alors il contient un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il n'existe pas de fermé $F_2 \subset F$ borné non dénombrable. Or on a :

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F \cap [-n, n])$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F \cap [-n, n] \subset F$ est un fermé borné, donc il est au plus dénombrable. L'égalité précédente montre alors que F est au plus dénombrable, ce qui est absurde. Par conséquent, on peut considérer $F_2 \subset F$ un fermé non dénombrable borné. Si F_2 n'est pas d'intérieur vide, il contient un intervalle ouvert non vide. Or celui-ci contient un intervalle fermé non vide et non réduit à un point noté $I \subset F_2$. Comme de plus I est compact, il est homéomorphe à $[0, 1]$ qui contient l'ensemble de Cantor. On suppose maintenant que F_2 est d'intérieur vide. Posons d'après le théorème de Cantor-Bendixon P parfait, D au plus dénombrable tels que $F_2 = P \sqcup D$. Comme F_2 est d'intérieur vide, P l'est aussi. Comme F_2 est non dénombrable, $P \neq \emptyset$, et comme P est compact car borné, il est homéomorphe à l'ensemble de Cantor d'après le théorème 3. ☐

Théorème 3.2. *Soit (E, d) un espace métrique compact, alors il existe une application continue surjective de C sur E.*

Démonstration. Comme E est compact, posons par Borel-Lebesgue $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, \frac{1}{2})$. Considérons alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \geq n_1$. On note $I_1, \dots I_{2^n}$ les 2^n composantes connexes de C_n. Posons :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \ : \ C_n & \to & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} x_1 & si \ \ x \in I_1 \\ x_2 & si \ \ x \in I_2 \\ \vdots & \\ x_{n_1} & si \ \ x \in I_{n_1} \\ \vdots & \\ x_{n_1} & si \ \ x \in I_{2^n} \end{cases} \end{array}$$

qui est bien définie car $2^n \geq n_1$. Elle est continue car localement constante. Comme $C \subset C_n$, posons $\phi_1 := \varphi_{1|C}$.

Pour $1 \leq i \leq n_1$, comme $B_f(x_i, \frac{1}{2})$ est compacte, posons $m_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_f(x_i, \frac{1}{2}) \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} B(x_{i_j}, \frac{1}{4})$. Posons $m \geq n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n_1$, $I_i \cap C_m$ possède $k \geq \max_{1 \leq i \leq n_1} m_i$ composantes connexes, notées I_{i_j}. Comme $m \geq n$, on a $C_m \subset C_n = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} I_i$, donc $C_m = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} (I_i \cap C_m) = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} \bigsqcup_{j=1}^{k} I_{i_j}$. On peut alors définir :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \ : \ C_m & \to & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} x_{i_1} & si \ \ x \in I_{i_1} \\ x_{i_2} & si \ \ x \in I_{i_2} \\ \vdots & \\ x_{i_{m_i}} & si \ \ x \in I_{i_{m_i}} \\ \vdots & \\ x_{i_{m_i}} & si \ \ x \in I_{i_k} \end{cases} \end{array}$$

qui est bien définie car pour tout $1 \leq i \leq n_1$, on a $k \geq m_i$. Elle est continue car localement constante. Posons $\phi_2 := \varphi_{2|C}$. Par construction, on a pour $x \in C$, $d(\phi_1(x), \phi_2(x)) \leq \frac{1}{2}$. En itérant ce procédé (en divisant à chaque étape le rayon des boules par 2), on obtient $(\phi_k)_{k \geq 1}$ une suite d'application continues de C dans E, vérifiant pour $x \in C$, $d(\phi_k(x), \phi_{k+1}(x)) \leq \frac{1}{2^k}$. Notons pour $n, m \in \mathbb{N}$, $d_\infty(\phi_n, \phi_m) = \sup_{x \in C} d(\phi_n(x), \phi_m(x))$.

Soit $\epsilon > 0$, posons $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{k-1}} < \epsilon$. Pour $m > n \geq k$, $x \in C$ on a par inégalité triangulaire :

$$d(\phi_n(x), \phi_m(x)) \leq \sum_{l=n}^{m-1} d(\phi_l(x), \phi_{l+1}(x)) \leq \sum_{l=n}^{m-1} \frac{1}{2^l} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}} < \epsilon$$

Par passage au sup sur $x \in C$, il vient $d_\infty(\phi_n, \phi_m) \leq \epsilon$, donc $(\phi_k)_{k \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $(\mathscr{C}(C, E), d_\infty)$ qui est complet car (E, d) est compact donc complet. Notons alors Φ la limite uniforme des

ϕ_k, qui est bien continue.
Montrons que Φ est surjective. Soit $y \in E$, $k \in \mathbb{N}^*$. Comme chacune des composantes connexes de C_{m_k} contient au moins un point de C, on peut poser par construction de ϕ_k, $x_k \in C$ tel que $d(y, \phi_k(x)) \leq \frac{1}{2^k}$.
On a :

$$d(y, \Phi(C)) \leq d(y, \Phi(x_k)) \leq d(y, \phi_k(x_k)) + d(\phi_k(x_k), \Phi(x_k))$$

d'où :

$$d(y, \Phi(C)) \leq \frac{1}{2^k} + \sup_{z \in C} d(\phi_k(z), \Phi(z))$$

Comme $\phi_k \xrightarrow[k \to +\infty]{d_\infty} \Phi$, on a par passage à la limite quand $k \to +\infty$: $d(y, \Phi(C)) = 0$. Comme $\Phi(C)$ est fermé en tant qu'image d'un compact par une application continue, il vient $y \in \Phi(C)$. Φ vérifie donc les conditions du théorème. $\square$

On rappelle la formule du changement de variable dont on aura besoin dans la preuve du théorème suivant :

Théorème 3.3. *Soient U, V deux ouverts de R^d, Φ un C^1-difféomorphisme de U sur V. On note $J_\Phi(x)$ le déterminant de la matrice jacobienne de Φ en x. Soit $g : V \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors g est intégrable sur V si et seulement si $(g \circ \Phi) \cdot |J_\Phi| : U \to \mathbb{R}$ est intégrable sur U, et dans ce cas, on a l'égalité :*

$$\int_V g(y) \mathrm{d}y = \int_U g(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| \mathrm{d}x$$

Théorème 3.4. *Pour tous $0 < \alpha < 1$, $F \subset [0,1]$ fermé non dénombrable, il existe un homéomorphisme f de $[0,1]$ tel que $\lambda(f(F)) \geq \alpha$.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2, F contient un sous ensemble G homéomorphe à l'ensemble de Cantor C. Notons h l'homéomorphisme de $[0,1]$ tel que $h(G) = C$. On remarque que $h(F)$ est toujours non dénombrable car h est une bijection, et est fermé car h^{-1} est continue. Quitte à composer l'homémorphisme que l'on va construire par h, on peut donc supposer que $C \subset F$. Comme $[0,1]$ est un espace métrique compact, il existe une application $g : C \to [0,1]$ continu et surjective d'après 3.2. Posons $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = (1 - \alpha)x + \alpha \lambda(g([0,x] \cap C))$$

Comme $1 - \alpha > 0$, f est strictement croissante. Montrons que f est continue sur $[0,1]$. Pour la continuité à gauche, considérons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $g([0, x_n] \cap C) \subset g([0, x_{n+1}] \cap C)$. Ainsi, par le théorème de continuité monotone de la mesure, on a :

$$\lambda(g([0,x_n] \cap C)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g([0, x_n] \cap C)\right) = \lambda\left(g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0, x_n] \cap C)\right)\right) = \lambda(g([0,x[\cap C)) = \lambda(g([0,x] \cap C))$$

La continuité à droite se démontre de la même manière. De plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \alpha + \alpha\lambda(g(C)) = 1$ car $g(C) = [0,1]$ car g est surjective. D'après le théorème de la bijection monotone, f est donc un homéomorphisme de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrons que f est C^1 sur $]0,1[\setminus C$. Soit $x \in [0,1] \setminus C$. Comme $[0,1] \setminus C$ est un ouvert, posons $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\cap C = \emptyset$. Pour $y \in]x - \eta, x + \eta[$, on a comme $1 - \alpha > 0$:

$$|f(x) - f(y)| = (1 - \alpha)|x - y|$$

Ainsi, f est dérivable en x avec $f'(x) = 1 - \alpha \neq 0$. f est donc un C^1 difféomorphisme de $[0,1] \setminus C$ sur $f([0,1] \setminus C)$. Comme $C \subset F$, on a $]0,1[\setminus F \subset]0,1[\setminus C$. On peut donc appliquer la formule du changement de variable rappelée précédemment avec :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : &]0,1[\setminus F & \to & f(]0,1[\setminus F) \\ & t & \mapsto & f(t) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g : & f(]0,1[\setminus F) & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & 1 \end{array}$$

Par ce qui précède, Φ est bien un C^1 difféomorphisme sur son image, $U :=]0,1[\backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $V := f(]0,1[\backslash F)$ aussi. g est clairement intégrable sur $f(]0,1[\backslash F) \subset [0,1]$, donc d'après la formule de changement de variable :

$$\lambda(V) = \int_V 1\mathrm{d}y = \int_U |J_f(x)|\mathrm{d}x = \int_U |f'(x)|\mathrm{d}x = \int_{]0,1[\backslash F} (1-\alpha)\mathrm{d}x$$

Comme $\{0\}, \{1\}$ sont de mesure nulle, il vient :

$$\lambda(f([0,1] \setminus F)) = \int_0^1 (1-\alpha)\mathrm{d}x = (1-\alpha)\lambda([0,1] \setminus F)$$

Comme f est un homéomorphisme de $[0,1]$, on a donc :

$$\lambda(f(F)) = \lambda(f([0,1]) - \lambda(f([0,1] \setminus F)) = 1 - (1-\alpha)\lambda([0,1] \setminus F) = 1 - (1-\alpha)(1-\lambda(F))$$

soit :

$$\lambda(f(F)) = \alpha + (1-\alpha)\lambda(F) \geq \alpha$$

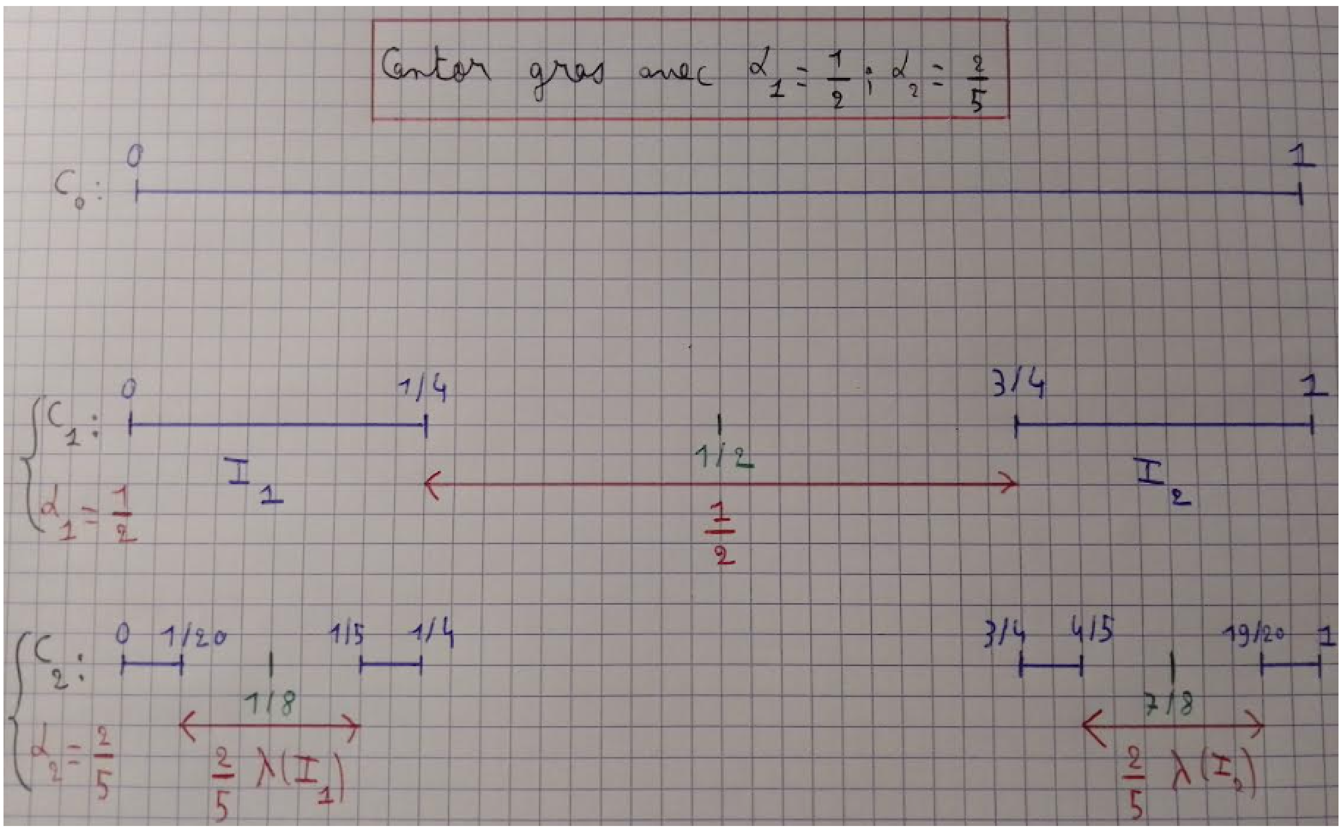
$\square$

4 Cantor gras

On va généraliser la définition de l'ensemble de Cantor en choisissant à chaque étape la longueur des intervalles qu'on enlève. Plus formellement, on obtient :

Définition 4.1 (Cantor gras)**.** Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}$. On part du segment $[0,1]$. A l'étape $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_{n,k}$ pour $1 \leq k \leq 2^n$ les 2^k intervalles disjoints tels que $C_n^\alpha = \bigcup\limits_{1\leq k\leq 2^n} I_{n,k}$. A l'étape $n+1$, pour $1 \leq k \leq 2^n$, on retire l'intervalle centré au milieu de $I_{n,k}$ et de longueur $\alpha_{n+1}\lambda(C_n^\alpha)$. On note $C^\alpha := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} C_n^\alpha$, et on l'appelle ensemble de Cantor généralisé.

Exemple 1. On donne ici les ensembles C_1^α et C_2^α dans le cas où $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{2}{5}$:



Remarque 4.1. Cette définition généralise bien celle de l'ensemble de Cantor, puisqu'en choisissant α définit par $\alpha_n = \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $C^\alpha = C$.

Notation 2. On notera pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq 2^{k-1}$, $J_{n,k}^\alpha$ les intervalles de C_{n-1}^α que l'on enlève pour obtenir C_n^α.

Proposition 4.1. *Pour $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}$, l'ensemble C^α vérifie les propriétés suivantes :*
i) C^α est compact.
ii) C^α est d'intérieur vide.
iii) C^α est totalement discontinu.
iv) C^α ne possède aucun point isolé.
v) C^α a la puissance du continu.

Démonstration. On a $C^\alpha = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} C_n^\alpha$ où les C_n^α sont compacts, donc C^α est compact.

Par l'absurde, supposons $\overset{\circ}{C^\alpha} \neq \emptyset$ et posons $I \neq \emptyset$ intervalle ouvert tel que $I \subset C^\alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $I \subset C_n^\alpha$. Il existe alors I_n l'un des 2^n intervalles constituant C_n^α tel que $I \subset I_n$.
Or $I_n = \frac{1}{2^n}\lambda(C_n^\alpha) \leq \frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $I = \emptyset$, ce qui est absurde.
Les composantes connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Par l'absurde, soit $I \subset C^\alpha$ un intervalle non vide non réduit à un singleton. Alors $\emptyset \neq \overset{\circ}{I} \subset C^\alpha$, ce qui contredit ii).
Par l'absurde, soit $x \in C^\alpha$ un point isolé de C^α. Posons alors $r > 0$ tel que $(]x-r, x+r[\setminus\{x\}) \cap C^\alpha = \emptyset$. On a donc : $]x-r, x+r[\setminus\{x\} \subset [0,1] \setminus C^\alpha$. Ainsi, comme $x \in C^\alpha$, $]x-r, x[$ et $]x, x+r[$ sont inclus dans deux intervalles distincts $J_{n,p}^\alpha$. Mais cela est absurde car entre deux intervalles de la forme $J_{n,p}^\alpha$, on peut toujours en trouver un troisième.
Par les propriétés i) et iv), $\mathbb{C}^\alpha$ est parfait, il est non vide car $0 \in C^\alpha$, donc d'après le théorème 2.1, C^α a la puissance du continu. □

Remarque 4.2. Par conséquent, l'ensemble C^α est un parfait de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.1. *Si* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}$*, alors il existe un homéomorphisme* H *de* $[0,1]$ *vérifiant* $H(C^\alpha) = C^\beta$*.*

Démonstration. Soit $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*} \in]0,1[^{\mathbb{N}^*}$, il suffit de construire un homéomorphisme de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $h(C) = C^\alpha$. On définit h sur $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*, 1\leq k\leq 2^{n-1}} J_{n,k}$ de la manière suivante :
Pour $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq 2^{n-1}$, on considère la fonction affine par morceaux telle que $h(J_{n,k}) = J_{n,k}^\alpha$. Ainsi, h est clairement strictement croissante et continue sur $[0,1] \setminus C$.
Pour $x \in C \setminus \{0,1\}$, posons :

$$a := \sup_{y<x, y\notin C} h(y) \quad et \quad b := \inf_{z>x, z\notin C} h(z)$$

Par croissance de h, on a $a \leq b$. Or on a $]a,b[\subset C^\alpha$. En effet, si par l'absurde il existe $c \in]a,b[\setminus C^\alpha$, alors il existe $t \notin C$ tel que $c = h(t)$ par construction de h. On a :

$$a = \sup_{y<x, y\notin C} h(y) < h(t) = c < \inf_{z>x, z\notin C} = b$$

Comme h est strictement croissante, il vient :

$$\sup\{y < x, y \notin C\} < t < \inf\{z > x, z \notin C\}$$

On a $t \neq x$ car $t \notin C$. Si $t < x$, on a donc :

$$\sup\{y < x, y \notin C\} < t \leq \sup\{y < x, y \notin C\}$$

ce qui est absurde. On raisonne de même si $t > x$.
Comme C^α est d'intérieur vide par la proposition 4.1, et que $]a,b[\subset C^\alpha$ par ce qui précède, on a donc $a = b$.
On prolonge h en H sur $[0,1]$ en posant :

$$H(0) = 0, \quad H(1) = 1, \quad H(x) = \sup_{y<x, y\notin C} h(y) \quad pour \quad x \in C \setminus \{0,1\}$$

Ce qui précède assure que H est strictement croissante. Montrons maintenant qu'elle est continue. Soit $x \in C \setminus \{0,1\}$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de H, posons $y < x$, $z > x$, $y, z \in [0,1]$ tels que :

$$h(z) - \epsilon \leq H(x) \leq h(y) + \epsilon$$

Posons $\eta := \min\{z - x, x - y\} > 0$. Par croissance de H, on a donc si $x' \in [0,1]$ vérifie $|x - x'| \leq \eta$:

$$|H(x) - H(x')| \leq \epsilon$$

Si $x = 0$, on pose $z > 0$ tel que $0 \leq H(z) \leq \epsilon$. Par croissance de H, on a donc si $|x'| \leq z$, $|H(x') - H(0)| \leq \epsilon$.
On montre de même que H est continue en 1, et comme h est continue sur $[0,1] \setminus C$, H est bien continue sur $[0,1]$. Comme de plus H est strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$, par le théorème de la bijection monotone, c'est bien un homéomorphisme de $[0,1]$. Par construction de h, on a :

$$H([0,1] \setminus C) = h([0,1] \setminus C) = [0,1] \setminus C^\alpha$$

Comme H est bijective, on a :

$$H(C) = H([0,1]) \setminus H([a,b] \setminus C) = [0,1] \setminus ([a,b] \setminus C^\alpha) = C^\alpha$$

$\square$

Remarque 4.3. Ce théorème montre qu'en particulier, C^α et C^β sont homéomorphes.

Théorème 4.2. *Si* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \,]0,1[^{\mathbb{N}^*}$*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\lambda(C_n^\alpha) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$*, et* $\lambda(C^\alpha) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1-\alpha_k)$*.*

Démonstration. Comme $C_0^\alpha = [0,1]$, on a $\lambda(C_0^\alpha) = 1$, et par définition de C_n^α, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(C_{n+1}^\alpha) = \lambda(C_n^\alpha) - \alpha_{n+1}\lambda(C_n^\alpha) = (1-\alpha_{n+1})\lambda(C_n^\alpha) > 0$$

la dernière inégalité est justifiée par le fait que $\alpha_{n+1} \neq 1$. Par conséquent, il vient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(C_n^\alpha) = \lambda(C_0^\alpha)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda(C_{k+1}^\alpha)}{\lambda(C_k^\alpha)} = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$$

Comme $(C_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante avec $\lambda(C_0^\alpha) = 1 < +\infty$, on a par le théorème de continuité monotones des mesures :

$$\lambda(C^\alpha) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1-\alpha_k)$$

$\square$

Théorème 4.3. *Si* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \,]0,1[^{\mathbb{N}^*}$*, alors* $\lambda(C^\alpha) > 0$ *si et seulement si* $\sum_{n\geq 1}\alpha_n$ *converge.*

Démonstration. On a d'après le théorème précédent, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda(C_n^\alpha) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_k < 1$, donc $\lambda(C_n^\alpha) > 0$. Ainsi $\log(\lambda(C_n^\alpha))$ est bien défini, et $\log(\lambda(C_n^\alpha)) = \sum_{k=1}\log(1-\alpha_k)$.

Si $\alpha_k \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, alors $\log(1-\alpha_k) \underset{k\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ (cela s'obtient par contraposée), et comme $\sum_{n\geq 1}\log(1-\alpha_n)$ est une série à termes négatifs, elle diverge vers $-\infty$, donc $\lambda(C^\alpha) = 0$.

Si $\alpha_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\log(1-\alpha_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\alpha_k$, et comme les séries $\sum_{n\geq 1}\log(1-\alpha_n)$ et $\sum_{n\geq 1}(-\alpha_n)$ sont à termes négatifs, $\sum_{n\geq 1}\log(1-\alpha_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1}\alpha_n$ converge. Dans ce cas, en notant $l := \sum_{n=1}^{+\infty}\log(1-\alpha_n) \in \mathbb{R}_-^*$, on a $\lambda(C^\alpha) = e^l \in]0,1[$. $\square$

Remarque 4.4. On peut donc construire des ensembles de Cantor généralisés de mesure de Lebesgue non nulle, et même arbitrairement proche de 1.

5 Bibliographie

Références

[1] Hassam Boualem and Robert Brouzet. *La planète R : voyage au pays des nombres réels.* Dunod, 2002.