Projection dans un espace de HILBERT

Florian BOUGUET

Références :
– MADÈRE : Développements d'analyse

Voici un théorème vraiment central en analyse hilbertienne, avec le théorème de représentation de RIESZ. En fait, on a le même résultat dans un espace préhilbertien (muni d'un produit scalaire, non nécessairement complet), à condition de projeter sur un convexe *complet*.

Theorème 1 (*projection dans un espace de* HILBERT)

Soient E un espace de HILBERT, *et $x \in E$.*
Si F est un convexe fermé non-vide de E
Alors
(i) $\exists! p(x) \in F$ vérifiant $\|x - p(x)\| = d(x, F)$.
(ii) $p(x)$ est caractérisé par $\forall y \in F, \Re e\,(< x - p(x), y - p(x) >) \leq 0$.
(iii) L'application $x \mapsto p(x)$ est 1-lipschitzienne.

Preuve de (i) :

Commençons par montrer l'existence d'un tel projeté. Notons $d = d(x, F)$. Par définition de d et caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $lim_{n\to\infty}\|x - y_n\| = d$. On va montrer que y_n est de CAUCHY (on voit bien la nécéssité de complétude de F). Pour cela, soient $p, q \in \mathbb{N}$, et appliquons l'égalité du parallélogramme à $(x - y_p)$ et $(x - y_q)$.

$$\|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 + \|(x - y_p) - (x - y_q)\|^2 = 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|y_p - y_q\|^2 &= 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - \|2x - y_p - y_q\|^2 \\
&= 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_p - y_q}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - 4d^2 \qquad \text{car } \frac{y_p - y_q}{2} \in F \text{ qui est convexe}
\end{aligned}$$

Par définition de (y_n), le terme de droite tend vers 0 lorsque $p, q \to \infty$. Donc (y_n) est de CAUCHY. F est fermé dans E complet donc complet, donc (y_n) converge vers un certain $y \in F$ et, par continuité de la norme, $\|x - y\| = d(x, F)$.

Démontrons maintenant l'unicité du projeté. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $y, y' \in F$ distincts tels que $\|x - y\| = d(x, F) = \|x - y'\|$. D'après l'égalité de la médiane écrite un peu plus haut avec y et y', on a

$$\left\|x - \frac{y - y'}{2}\right\|^2 = \frac{\|x - y\|^2}{2} + \frac{\|x - y'\|^2}{2} - \frac{\|y - y'\|^2}{4} = d^2 - \frac{\|y - y'\|^2}{4} < d^2$$

Ceci est impossible par définition de d car, comme on l'a dit plus haut, $\frac{y-y'}{2} \in F$. D'où unicité du projeté, qu'on notera par la suite $p(x)$.

□

Preuve de (ii) :

On raisonne encore en deux temps, en montrant que $p(x)$ vérifie la relation $\Re e\,(< x - p(x), y - p(x) >) \leq 0$ pour tout $y \in F$, puis qu'il est le seul à la vérifier. Posons donc $y \in F$. On a

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|(x-p(x))-(y-p(x))\|^2 \\ &= \|x-p(x)\|^2 + \|y-p(x)\|^2 - 2\Re e < x-p(x), y-p(x) > \end{aligned}$$

Donc $\forall y \in F$

$$\begin{aligned} 2\Re e < x-p(x), y-p(x) > &= \|x-p(x)\|^2 - \|x-y\|^2 + \|y-p(x)\|^2 \\ &\leq d - d + \|y-p(x)\|^2 \\ &\leq \|y-p(x)\|^2 \end{aligned}$$

Notons pour $t \in]0,1[$

$$y_t = ty + (1-t)p(x) \in F$$

On a alors $y_t - p(x) = t(y - p(x))$. Appliquons l'inégalité précédente en y_t :

$$\begin{aligned} 2\Re e < x-p(x), y_t-p(x) > &\leq \|y_t-p(x)\|^2 \\ 2\Re e < x-p(x), t(y-p(x)) > &\leq \|t(y-p(x))\|^2 \\ 2t\Re e < x-p(x), y-p(x) > &\leq t^2\|y-p(x)\|^2 \\ 2\Re e < x-p(x), y-p(x) > &\leq t\|y-p(x)\|^2 \qquad \text{car } t \neq 0 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre t vers 0 pour obtenir l'inégalité recherchée.

Soit $y_0 \in F$ vérifiant $\forall y \in F, \Re e < x - y_0, y - y_0 > \leq 0$. Montrons que $y_0 = p(x)$. On a comme précédemment :

$$\begin{aligned} \|x-p(x)\|^2 &= \|(x-y_0)-(p(x)-y_0)\|^2 \\ &= \|x-y_0\|^2 + \|p(x)-y_0\|^2 - 2\Re e < x-y_0, p(x)-y_0 > \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\|x-y_0\|^2 = \|x-p(x)\|^2 \underbrace{+2\Re e < x-y_0, p(x)-y_0 >}_{\leq 0} \underbrace{-\|p(x)-y_0\|^2}_{\leq 0}$$

Donc $\|x-y_0\|^2 \leq d$. La seule possibilité est qu'il y ait égalité, d'où $y_0 = p(x)$.

□

Preuve de (iii) :

On est presque à la fin ! Soient $x, x' \in E$, de projetés respectifs $p(x)$ et $p(x')$. On cherche à montrer que p est 1-lipschitzienne ce qui revient à montrer, en termes moins savants, que $\|p(x) - p(x')\| \leq \|x - x'\|$. On a

$$\begin{aligned} \|x-x'\|^2 &= \|p(x)-p(x')+r\|^2 \qquad \text{avec } r = x - x' - p(x) + p(x') \\ &= \|p(x)-p(x')\|^2 + \|r\|^2 + 2\Re e < r, p(x)-p(x') > \end{aligned}$$

Or d'après (ii) on a

$$\begin{aligned} \Re e < r, p(x) - p(x') > &= \Re e < x - x' - p(x) + p(x'), p(x) - p(x') > \\ &= \underbrace{\Re e < x - p(x), p(x) - p(x') >}_{\geq 0} \underbrace{- \Re e < x' - p(x'), p(x) - p(x') >}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$\|x - x'\|^2 \geq \|p(x) - p(x')\|$$

$\square$

REMARQUE

Je conseille fortement de faire un dessin en dimension 2 en projetant sur une boule. Les résultats deviennent alors très géométriques et facilement explicables.