Calcul des projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

2013 – 2014

Référence : Xavier Gourdon, *Algèbre (2e édition)*, Ellipses, 2009, p.195.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit u un endomorphisme dont un polynôme annulateur est :

$$F := \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

On décompose $\frac{1}{F}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{F} = \sum_{i=1}^{r} \frac{U_i(X)}{(X - \lambda_i)^{\alpha_i}}$$

D'où :

$$1 = \sum_{i=1}^{r} U_i Q_i \qquad \text{où} \quad Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j} \tag{1}$$

Si on pose $p_i := U_i Q_i(u)$, alors p_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i} := \ker(u - \lambda_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$.
En effet, F divise $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} U_i Q_i$ donc $\mathrm{Im}(p_i) \subset E_{\lambda_i}$ et, inversement, si $x \in E_{\lambda_i}$, alors $Q_j(x) = 0$ pour $j \neq i$ donc par (1) :

$$x = \sum_{j=1}^{r} U_j Q_j(u)(x) = p_i(x)$$

De plus, si $i \neq j$ alors F divise $Q_i Q_j$, donc $p_i p_j = 0$. Par (1), on en déduit :

$$p_i = \sum_{j=1}^{r} p_i p_j = p_i^2$$

On peut désormais calculer l'exponentielle de u par sa décomposition de Dunford. Pour cela, on pose :

$$d := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \qquad \text{et} \qquad n := u - d = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{id}) p_i$$

Les projecteurs p_i étant des polynômes en u, d et n le sont aussi et par conséquent commutent. De plus, les p_i commutent et sont diagonalisables donc sont codiagonalisables, donc d est diagonalisable.
Si on pose $\alpha := \max_{1 \leq i \leq r} (\alpha_i)$, on a :

$$n^{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{id})^{\alpha} p_i = 0$$

Donc n est nilpotent et $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u.
On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(u) &= \exp(d) \exp(n) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} p_i \right) \left(\sum_{i=1}^{r} \exp(u - \lambda_i \mathrm{id}) p_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(u - \lambda_i \mathrm{id})^p}{p!} p_i \end{aligned}$$

Application

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est $(X-2)^2(X-3)$. On a donc $Q_1 = X - 3$ et $Q_2 = (X-2)^2$.
Pour trouver les U_i, on peut ici faire un algorithme d'Euclide étendu sur Q_1 et Q_2 pour trouver une relation de Bezout. On obtient $U_1 = 1 - X$ et $U_2 = 1$, ce qui donne $p_1 = (I_3 - A)(A - 3I_3)$ et $p_2 = (A - 2I_3)^2$ les projecteurs sur E_2 et E_3 respectivement.
On en déduit :

$$\exp(A) = e^2 (A - I_3) p_1 + e^3 p_2$$