Prolongement de la fonction Gamma.

Référence : *Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agrégation, p314*

On rappelle que la fonction Gamma d'Euler est définie par $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$.

Théorème. *Γ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro et admet des pôles simples en les $-n, n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration.

Par le théorème d'holomoprhie sous le signe intégral, on sait que Γ est holomorphe sur Ω et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. On peut alors prolonger Γ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ de proche en proche :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots$$

Néanmoins, on désire obtenir plus d'informations, notamment concernant les zéros et l'ordre des pôles.

Lemme (formule d'Euler)**.** $\forall z \in \Omega$, $\Gamma(z) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.

Démonstration.

Soient $z \in \Omega$ et $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathbb{1}_{]0;n[}(t)$. On a

- $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-n}t^{z-1}\mathbb{1}_{]0;+\infty[}$.
- $|f_n(t)| \leq e^{-t}t^{\Re(z)-1}$ car $1 - u \leq e^{-u}$ pour $u \in [0;1]$.

Par le théorème de Lebesgue, $\Gamma(z) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{z-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. On posant $t = ns$, on obtient, $\Gamma(z) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^z \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^n \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} n^z I_n(z)$.

Montrons par récurrence sur n que $I_n(z) = \dfrac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.

Pour $n = 0$, on a $I_0(z) = \displaystyle\int_0^1 s^{z-1}\mathrm{d}s = \left[\frac{s^z}{z}\right]_0^1 = \frac{1}{z}$.
Supposons le résultat vrai pour n fixé.

$$\begin{aligned}
I_{n+1}(z) &= \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{n+1}\mathrm{d}s \\
&= \left[\frac{s^z}{z}(1-s)^{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{s^z}{z}(n+1)(1-s)^n\mathrm{d}s \\
&= 0 + \frac{n+1}{z} I_n(z+1) \\
&= \frac{(n+1)n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.
\end{aligned}$$

□

Posons $G(z) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n^z n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{(n+1)^z n!} = \lim_{n\to+\infty} G_n(z)$.

$G_n(z) = z\displaystyle\prod_{k=1}^n \frac{z+k}{k}\exp\left(z\log\frac{k}{k+1}\right) = z\prod_{k=1}^n f_k(z)$, les f_k étant holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Soit R tel que $|z| < R$. On écrit $G_n(z) = z \prod_{k=1}^{R} f_k(z) \prod_{k=R+1}^{n} f_k(z)$.

Pour $k > R$, on a $f_k(z) = (1 + \frac{z}{k})\exp\left(z \log \frac{k}{k+1}\right) = \exp\left(\log\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$.
Ainsi $G_n(z) = z \prod_{k=1}^{R} f_k(z)\exp\left(\sum_{k=R+1}^{n} \log\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$.

Or $\left|\log\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right| \leq \frac{C}{k^2}$ car $\frac{|z|}{k} < 1$ (on peut ainsi faire un développement limité.)

La série converge donc uniformément sur $D(0, R)$ vers une fonction holomorphe. Comme R est quelconque, G_n converge uniformément vers une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Le produit étant convergent, de limite non nulle, les zéros de la limite sont ceux des f_k, c'est-à-dire les $-k, k \in \mathbb{N}$.

Ainsi $F = \frac{1}{G}$ est holomorphe sans zéro sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Comme $F = \Gamma$ sur l'ouvert Ω, c'est le prolongement recherché.

Conclusion :

- Γ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro ;
- Elle a des pôles simples en les $-n, n \in \mathbb{N}$;
- $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec des zéros simples en les $-n$.

$\square$