Pseudo-réduction simultanée

2013 – 2014

Proposition.
Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}), N \in S_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$^tCMC = I_n \ et\ ^tCNC = D$$

où D *est une matrice diagonale réelle.*

Démonstration. $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\Phi : (X, Y) \mapsto {}^tXMY$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, donc il existe une base orthonormée pour Φ.
i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tPMP = I_n$$

Or $^tPNP \in S_n(\mathbb{R})$ donc, par le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tQ^tPNPQ = D$$

avec D une matrice diagonale réelle.
En posant $C = PQ$, on obtient ce qu'on voulait. □

Autre rédaction

$\Phi : (X, Y) \mapsto {}^tXMY$ est un produit scalaire et $\Psi : (X, Y) \mapsto {}^tXNY$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe donc un unique endomorphisme u sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n, \Psi(X, Y) = \Phi(X, u(Y))$. De plus, Ψ est symétrique donc u est auto-adjoint pour Φ. Il existe donc une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormale pour Φ de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Si on note P la matrice de passage de la base canonique à $(e_1, \ldots, e_n)$ et U l'endomorphisme de u dans la base canonique, on a d'une part $^tPMP = I_n$ et d'autre part, pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$^tXNY = {}^tXMUY = {}^tXMPDP^{-1}Y,$$

d'où $N = MPDP^{-1} = {}^tP^{-1}DP^{-1}$ par la relation précédente.