105 – Groupes des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Question.

Montrer que la signature est l'unique morphisme surjectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

Réponse.

Soit $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ un morphisme surjectif, soit t une transposition. Toutes les transpositions sont conjuguées et $\{-1, 1\}$ est abélien donc φ est constant sur l'ensemble des transpositions. Or les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, donc si $\varphi(t) = 1$, alors $\varphi(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Donc $\varphi(t) = -1$ et $\varphi = \varepsilon$.

Question.

Soit H un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$, alors H est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Réponse.

Voir le Perrin page 30 dont est issue cette démonstration :
On a $|H| = (n-1)!$. Si $n \leq 3$ c'est évident, si $n = 4$ alors $|H| = 6$ donc H est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ ou à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, le deuxième cas étant impossible car $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'éléments d'ordre 6.
Supposons $n \geq 5$ et posons $G = \mathfrak{S}_n$, alors G opère par translation à gauche sur G/H, ce qui fournit un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}(G/H) \simeq \mathfrak{S}_n$.
Montrons que φ est injectif : on a $\ker\varphi \subset H$ et $\ker\varphi$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$, or les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 5$ sont $\{1\}, \mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$, donc $\ker\varphi = \{1\}$ car $|H| < |\mathfrak{A}_n|$.
φ est donc un isomorphisme pour une raison de cardinal, donc $\varphi(H)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre $(n-1)!$. Or H est le stabilisateur de H donc $\varphi(H)$ est le stabilisateur d'un point dans $\mathfrak{S}_n$, d'où $\varphi(H) \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Question.

Quel est le nombre de 5-Sylow dans $\mathfrak{S}_5$?

Réponse.

On note n_5 le nombre de 5-Sylow, alors par le deuxième théorème de Sylow, $n_5 \equiv 1[5]$ et $n_5 \mid 24$, donc $n_5 = 1$ ou 6.
Par ailleurs, les 5-Sylow sont d'ordre 5, ce sont donc les groupes engendrés par des 5-cycles, il y a 4 5-cycles dans chaque 5-Sylow et 24 5-cycles au total, donc il y a bien 6 5-Sylow.

Question.

Quel est le normalisateur du 5-Sylow $H := \langle (12345) \rangle$ dans $\mathfrak{S}_5$?

Réponse.

$N(H) = \mathrm{Stab}(H)$ par l'action de conjugaison, donc $|N(H)| = \frac{|\mathfrak{S}_5|}{6} = 20$ car les 5-Sylow sont conjugués.
Par ailleurs, $(2354)(12345)(2354)^{-1} = (13524) \in H$ donc $N(H) = \langle (2354), (12345) \rangle$ par cardinalité.