107 – Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Question.

Montrer que si G est fini, $\rho(g)$ est diagonalisable pour tout $g \in G$, où $\rho : G \to GL(V)$.

Réponse.

$\rho(g)^{|G|} = 1$ par Lagrange et $X^{|G|} - 1$ est scindé à racines simple sur $\mathbb{C}$.

Question.

Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de caractère χ, on note $K_\chi := \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$. Montrer que $K_\chi = \ker \rho$, en particulier K_χ est distingué dans G.

Réponse.

Si $g \in \ker \rho$, on a bien $\chi(g) = \chi(1)$.
$\rho(g)$ est diagonalisable de spectre inclus dans $\mathbb{U}_{|G|}$ par la question précédente, donc

$$\Re(\chi(g)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho(g))} \Re(\lambda) \leq d = \chi(1)$$

où d désigne le degré de ρ.
Donc si $\chi(g) = \chi(1)$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho(g))$, $\lambda = 1$, et donc $\rho(g) = \mathrm{id}$, c'est-à-dire $g \in \ker \rho$.

Question.

Soit $\chi_1, \ldots, \chi_n$ les caractères irréductibles de G, montrer que les sous-groupes distingués de G sont exactement du type $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ avec $I \subset \{1, \ldots, n\}$.

Réponse.

Pour $N \triangleleft G$, on considère $\rho : G \to GL(V)$ la représentation régulière de G/N et on décompose V en somme de représentations irréductibles : $V = \bigoplus V_i$.
Alors $N = \ker \rho = \bigcap \ker \rho_i = \bigcap K_{\chi_i}$.

Question.

Montrer que si V est de dimension finie, alors $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\in\mathbb{N}$.

Réponse.

On peut par exemple définir

$$p := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$$

et remarquer que $\rho(g)\circ p = p$ pour tout g, et donc p est un projecteur. Sa trace est alors la dimension de son image.