109 – Représentations de groupes finis de petit cardinal.

Question.

Soit G un groupe simple d'ordre pair, montrer que G ne peut admettre de représentation irréductible de degré 2.

Réponse.

Supposons l'inverse, soit ρ une représentation irréductible de degré 2.
Soit $t \in G$ d'ordre 2, alors $\rho(t)^2 = \mathrm{id}$ donc $\rho(t)$ est diagonalisable de valeurs propres ± 1.
$\ker \rho$ est distingué dans G et G est simple donc $\ker \rho = \{e\}$ ou G. Si $\ker \rho = G$, alors ρ n'est pas irréductible, donc $\ker \rho = \{e\}$, et donc $\rho(t) \neq \mathrm{id}$.
On suppose $\rho(t) \neq -\mathrm{id}$, alors $\det \rho(t) = -1$. On pose $\tilde{\rho} := \det \circ \rho$, alors $\ker \tilde{\rho} \neq G$ et G est simple donc $\tilde{\rho}$ est injectif et $\tilde{\rho}(G) \subset \mathbb{C}^*$ donc G est abélien. Or les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de degré 1, donc ce n'est pas possible.
Donc $\rho(t) = -\mathrm{id}$, et donc $t \in Z(G)$ car ρ est injectif. Or $Z(G) \triangleleft G$, donc $Z(G) = G$, donc G est abélien, ce qui est absurde.

Question.

Montrer que $\mathfrak{S}_3$ est isomorphe au groupe des isométries d'un triangle équilatéral.

Réponse.

Les isométries d'une partie convexe échangent les points extrémaux (car ils ne sont pas barycentres à poids strictement positifs de points de la partie), les isométries du triangle équilatéral agissent donc sur ses sommets. Une isométrie étant déterminée par l'image d'un repère affine, cette action est fidèle.
Par ailleurs, les translations engendrent $\mathfrak{S}_3$ donc il suffit d'exhiber une isométrie du triangle qui échange deux sommets : il s'agit d'une réflexion par rapport à un hyperplan médiateur.
On remarque que cette rédaction fonctionne aussi dans le cas d'un simplexe régulier de dimension n, dont le groupe d'isométries est $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Question.

Montrer que D_n, défini comme étant le groupe d'isométries du polygone régulier à n côtés, est d'ordre $2n$.

Réponse.

On remarque déjà que les isométries qui conservent le polygone régulier conserve l'isobarycentre de ses sommets, on peut donc identifier D_n à un sous-groupe de $O(2, \mathbb{R})$.
Pour $n \geq 3$, le polygone régulier à n côtés contient au moins trois points non alignés, et une isométrie étant déterminée par l'image d'un repère affine, D_n est d'ordre fini (majoré par $n!$).
Alors $D_n^+ := D_n \cap SO(2, \mathbb{R})$ est un sous-groupe fini de $SO(2, \mathbb{R})$, il est donc cyclique et puisque c'est un groupe de rotations, il est d'ordre majoré par n (une rotation vectorielle étant déterminée par l'image d'un point distinct de l'origine). Réciproquement, chaque rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ appartient à D_n, donc D_n^+ est d'ordre n.
Finalement, on a $D_n = D_n^+ \rtimes \{1, -1\}$ (existence d'une suite exacte scindée), donc D_n est d'ordre $2n$.