

## 124 – Anneau des séries formelles. Applications.

### Question.

$\mathbb{K}[[X]]$  est-il noetherien ?

### Réponse.

Oui car principal.

### Question.

Nombre de façons d'écrire 7 en somme d'entiers naturels ?

### Réponse.

On pose

$$u_n := \text{card}\{(x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{N}^7 \mid \sum_{i=1}^7 ix_i = n\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} u_n X^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1 + \dots + 7x_7 = n} X^n \\ &= \prod_{i=1}^7 \sum_{x_i \geq 0} X^{ix_i}. \end{aligned}$$

Pour connaître le septième terme de la série formelle  $\sum u_n X^n$ , on fait un développement limité de ce produit à l'ordre 7 :

$$(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7)(1+X^2+X^4+X^6)(1+X^3+X^6)(1+X^4)(1+X^5)(1+X^6)(1+X^7),$$

et on développe... et on trouve 15.

### Question.

Quelles sont les séries formelles qui sont des carrés ?

### Réponse.

Une condition nécessaire est que la valuation soit paire et que le premier coefficient non nul soit un carré.

En fait c'est une condition suffisante. En effet, en factorisant on se ramène au cas où la série formelle commence par 1 et on note  $1 + S$  cette série formelle, la valuation de  $S$  est  $\geq 1$ . On a alors

$$(1 + S)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) S^n.$$