126 – Exemples d'équations diophantiennes.

2013 – 2014

Question.

On considère l'équation diophantienne $11x + 7y = c$, $c \in \mathbb{N}$. Donner la plus grande valeur de c pour que cette équation n'admette pas de solutions positives.

Réponse.

On a $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$ donc l'équation $11x + 7y = c$ a pour solutions $(2c + 7t, -3c - 11t)$. On considère $x_{\min}$ le plus petit entier positif tel qu'il existe $y_{\min} \in \mathbb{Z}$ tel que $11x_{\min} + 7y_{\min} = c$. Alors $x_{\min} \in \{0, \dots, 6\}$.

Si $y_{\min} \geq 0$, alors $(x_{\min}, y_{\min})$ est une solution positive de l'équation.

Si $y_{\min} < 0$, alors si (x, y) est solution de l'équation $11x + 7y = c$ avec $y \geq 0$, on a $y - y_{\min} = 11t$ pour un $t > 0$ et $x - x_{\min} = -7t$, donc $x < 0$ car $x_{\min} \in \{0, \dots, 6\}$.

On en déduit que l'équation n'admet pas de solutions positives si et seulement si $x_{\min} \geq 0$ et $y_{\min} < 0$. Pour maximiser c, on pose alors $x_{\min} := 6$ et $y_{\min} := -1$, on obtient $c = 59$.

Question.

Déterminer lorsque $2^n - 1$ est un carré.

Réponse.

Pour $n = 0$ et $n = 1$ ça marche.

Pour $n \geq 2$, $2^n - 1 \equiv -1[4]$ et -1 n'est pas un carré modulo 4, donc $2^n - 1$ n'est pas un carré.

Question.

Même question pour $2^n + 1$.

Réponse.

Si $n = 2p$, alors
$$2^{2p} + 1 = 4^p + 1 \equiv 2[3].$$
Or 2 n'est pas un carré modulo 3 donc, pour n pair, $2^n + 1$ n'est pas un carré.

On suppose maintenant n impair, $n = 2p + 1$, avec $p \geq 1$ (pour $n = 1$, on a $2^n + 1 = 3$ qui n'est pas un carré). On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ qui est factoriel (car euclidien).

On a alors
$$2^{2p+1} + 1 = (1 + i2^p\sqrt{2})(1 - i2^p\sqrt{2}).$$
Montrons que $1 + i2^p\sqrt{2}$ et $1 - i2^p\sqrt{2}$ sont premiers entre eux. Soit a un diviseur commun à ces deux nombres (dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$), alors a divise leur différence, 2. De plus, $N(a)$ divise (dans $\mathbb{Z}$) $N(1 + i2^p\sqrt{2}) = 1 + 2^n$, où $N : z \mapsto z\bar{z}$ désigne la norme sur $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, donc $N(a)$ est impair et $N(a)$ divise $N(2) = 4$, donc $N(a) = 1$, donc a est inversible.

Si $2^n + 1$ est un carré, alors en écrivant la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, on a $1 + i2^p\sqrt{2} = \pm y^2$ car les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont ± 1 ($zz' = 1 \Rightarrow N(z)N(z') = 1 \Rightarrow N(z) = 1 \Rightarrow z = \pm 1$).

On écrit alors $y = a + ib\sqrt{2}$, on en déduit
$$1 + i2^p\sqrt{2} = \pm(a^2 - 2b^2 + 2iab\sqrt{2}),$$
d'où
$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = \pm 1 \\ 2ab = \pm 2^p \end{cases}$$
a et b sont donc des puissances de 2 (modulo ± 1), or la première équation nous donne que a est impair, donc $a = \pm 1$ et $b = \pm 2^{p-1}$. D'où
$$1 - 2^{2p-1} = \pm 1,$$
ce qui n'a de solution que si $p = 1$, c'est-à-dire si $n = 3$.

Finalement, puisque $2^3 + 1 = 9$ est un carré, $2^n + 1$ est un carré si et seulement si $n = 3$.

Question.

Résoudre l'équation diophantienne $x^2 + 2y^2 = 3z^2$.

Réponse.

Cette équation est équivalente à trouver des solutions rationnelles de $x^2 + 2y^2 = 3$. On reconnaît ici l'équation d'une ellipse, dont on va donner un paramétrage rationnel. Pour ce faire, on remarque que le point $(1, 1)$ appartient à cette ellipse et on considère la droite passant par $(1, 1)$ de coefficient directeur t, c'est-à-dire la droite d'équation $y = tx + 1 - t$. Alors un point (x, y) appartient à l'intersection entre l'ellipse et la droite si et seulement si

$$\begin{cases} y = tx + 1 - t \\ x^2 + 2(tx + 1 - t)^2 = 3. \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} x^2 + 2(tx + 1 - t)^2 - 3 &= (1 + 2t^2)x^2 + 4t(1 - t)x + 2(1 - t)^2 - 3 \\ &= (x - 1)((1 + 2t^2)x - 2(1 - t)^2 + 3) \end{aligned}$$

(la factorisation s'obtient en remarquant que $(1, 1)$ appartient à cette intersection). On écarte l'autre point où $x = 1$ (le point $(1, -1)$, qui correspond d'ailleurs à un coefficient directeur infini pour la droite) et on obtient que (x, y) appartient à l'intersection entre l'ellipse et la droite si et seulement si

$$\begin{cases} x = \frac{2t^2-4t-1}{1+2t^2} \\ y = \frac{-2t^2-2t+1}{1+2t^2}. \end{cases}$$

On a alors qu'un point (différent de $(1, 1)$ et $(1, -1)$ de l'ellipse est à coordonnées rationnelles si et seulement si $t \in \mathbb{Q}$. En effet, si $t \in \mathbb{Q}$, les formules ci-dessus montre que les coordonnées sont rationnelles, réciproquement si les coordonnées sont rationnelles alors t est la pente d'une droite passant par deux points à coordonnées rationnelles donc est rationnelle.

On pose alors $t = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, on obtient

$$\begin{cases} x = \frac{2p^2-4pq-q^2}{q^2+2p^2} \\ y = \frac{-2p^2-2pq+q^2}{q^2+2p^2}. \end{cases}$$

Il resterait encore à étudier lorsque $2p^2 - 4pq - q^2$ et $q^2 + 2p^2$ sont premiers entre eux, ainsi que $-2p^2 - 2pq + q^2$ et $q^2 + 2p^2$, pour pouvoir conclure.