201 – Espaces de fonctions : exemples et applications.

2013 – 2014

Question.

Dans le développement sur le théorème de Montel, comment construire la suite exhaustive de compacts ?

Réponse.

Pour $n \geq 1$, on pose $K_n := \{z \in \Omega \cap \bar{B}(0,n) \mid d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}$.

Question.

On note

$$E := \left\{ f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{C}) \mid \sup_{x \in [0,+\infty[} e^{-kx}|f(x)| < +\infty \right\}$$

pour un $k > 0$. Pour $f \in E$, on note $\|f\| := \sup_{x \in [0,+\infty[} e^{-kx}|f(x)|$.

Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, puis montrer que l'application $L : f \mapsto (x \mapsto y_0 + \int_0^x \Psi(f)(t)\,\mathrm{d}t)$ est contractante, où Ψ est une application de E dans E s-lipschitzienne, avec $s < k$. En déduire le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas d'un système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} f' = \Psi(f) \\ f(0) = y_0 \end{array} \right.$.

Réponse.

On vérifie d'abord que $\|\cdot\|$ est bien une norme.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Alors pour tout x, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$ donc converge vers un certain $f(x)$. On vérifie ensuite que

f est continue et que la convergence a lieu selon $\|\cdot\|$.

$$\begin{aligned}
e^{-kx}|L(f)(x)-L(g)(x)| &= e^{-kx}\left|\int_0^x (\Psi(f)-\Psi(g))(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq e^{-kx}\int_0^x s\|f-g\|e^{kt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq s\|f-g\|\int_0^x e^{k(t-x)}\,\mathrm{d}t \\
&= s\|f-g\|\frac{1-e^{-kx}}{k} \\
&\leq \frac{s}{k}\|f-g\|.
\end{aligned}$$

L est donc contractante car $\frac{s}{k}<1$ et on peut bien appliquer le théorème de point fixe pour conclure.

Question.

Résoudre l'équation $u''=\delta$, où δ est la fonction de Dirac en 0.

Réponse.

En intégrant le Dirac, on obtient H la fonction de Heaviside + une constante C, en intégrant à nouveau on obtient $x\mapsto xH(x)+Cx+D$, D constante.