204 – Connexité. Exemples et applications.

Question.

Pourquoi $\mathbb{Q}$ est non connexe ?

Réponse.

Parce que $\mathbb{Q}$ peut s'écrire comme union disjointe de deux ouverts de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = (]-\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}) \sqcup (]\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q}).$$

Question.

Soit f continue. Montrer que si un ensemble X est connexe, alors $f(X)$ l'est aussi.

Réponse.

Soit $A \subset f(X)$ un ensemble ouvert et fermé. $f^{-1}(A) \subset X$ est ouvert et fermé car f est continue, donc $f^{-1}(A) = X$ ou $f^{-1}(A) = \varnothing$ car X est connexe, donc $A = f(X)$ ou $A = \varnothing$.

Question.

Montrer que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Réponse.

Un segment est connexe donc son image par une fonction continue est un connexe de $\mathbb{R}$ par la question précédente, donc est un intervalle. De plus, un segment est compact donc f y atteint ses bornes.

Question.

Pourquoi $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe ?

Réponse.

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. La fonction $t \mapsto \det(tA + (1-t)B)$ définie sur $\mathbb{C}$ est polynomiale donc s'annule exactement sur un ensemble Z fini et 0 et 1 n'appartiennent pas à Z car A et B sont inversibles. Or $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe, donc si γ est un chemin reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C} \setminus Z$, alors $t \mapsto \gamma(t)A + (1-\gamma(t))B$ est un chemin reliant B à A dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Question.

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. Donner un sous-groupe connexe et non trivial de G (s'il en existe).

Réponse.

Soit e l'élément neutre de G, montrons que $C(e)$, la composante connexe de e dans G, est un sous-groupe de G.
L'application

$$\begin{aligned} \varphi : C(e) \times C(e) &\longrightarrow G \\ (g, g') &\longmapsto gg' \end{aligned}$$

est continue donc $\varphi(C(e) \times C(e))$ est connexe et contient e donc est inclus dans $C(e)$. En raisonnant de même avec $g \mapsto g^{-1}$, on montre que $C(e)$ est un sous-groupe connexe de G.
On remarque que s'il existe un sous-groupe H connexe et non trivial de G, alors $C(e)$ est non trivial car $e \in H$ donc $H \subset C(e)$.