# 205 – Espaces complets. Exemples et applications.

## Question.

Donner un exemple de fonction continue exactement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

## Réponse.

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \wedge q = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc pour $p, q$ tels que $p \wedge q = 1$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad |x - \frac{p}{q}| < \varepsilon.$$

On a alors $f(x) = 0$ et $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ donc $f$ est discontinue sur $\mathbb{Q}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $x$ car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Si $(q_n)$ est bornée, il en existe une sous-suite constante $(q_{\varphi(n)})$ car elle est à valeurs entières et donc $(p_{\varphi(n)})$ est constante à partir d'un certain rang car à valeurs entières et convergente. Finalement, $x = \lim \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} \in \mathbb{Q}$.
Ceci est exclu donc $(q_n)$ n'est pas bornée et donc $f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{q_n}$ converge vers 0, donc $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

## Question.

Existe-t'il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur $\mathbb{Q}$ ?

## Réponse.

On note $C_f$ l'ensemble des points de continuité de $f$ et on montre que $C_f$ est une intersection dénombrable d'ouverts.
On a

$$C_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n \quad \text{avec} \quad \Omega_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \eta > 0, (y,z) \in ]x-\eta, x+\eta[^2 \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}\}$$

et $\Omega_n$ est ouvert.
Or $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts. En effet, si $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$ avec $\Omega_n$ ouvert, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ &= \mathbb{Q} \cup (\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n) \\ &= \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n^c)\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{R}$ est une union dénombrable de fermés. D'après le lemme de Baire, un de ces fermés est d'intérieur non vide, ce ne peut pas être les $\{x\}$ donc c'est un $\Omega_n^c$, ce qui contredit la densité de $\mathbb{Q}$.