206 – Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

2013 – 2014

Question.

Pourquoi l'enveloppe convexe d'un compact est compacte ?

Réponse.

Soit C un compact d'un espace vectoriel de dimension n, alors

$$\mathrm{Conv}(C) = \{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, x_i \in C\}$$

par le théorème de Carathéodory. Alors si on pose

$$\Delta_{n+1} := \{(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\},$$

Δ_n est compact et l'application

$$\begin{aligned} f : \Delta_{n+1} \times C^{n+1} &\longrightarrow \mathrm{Conv}(C) \\ ((\lambda_i), (x_i)) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned}$$

est continue et surjective, d'où le résultat.

Question.

Montrer la convergence des itérées dans le théorème de point fixe dans le cas d'une application strictement 1-lipschitzienne sur un compact.

Réponse.

On montre d'abord que f admet un unique point fixe : l'application $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur un compact donc admet un minimum m atteint en a. Si $m > 0$, alors $f(a) \neq a$ et

$$d(f(a), f^2(a)) < d(a, f(a)) = m,$$

ce qui contredit la minimalité de m. Donc $m = 0$ et $f(a) = a$. De plus, ce point fixe est unique car si $b = f(b)$ avec $a \neq b$, on a

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b).$$

On considère maintenant l'ensemble

$$X := \{(x, y) \mid d(x, y) \geq \varepsilon\},$$

X est compact. $(x, y) \mapsto \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}$ est continue sur X donc admet un maximum sur X, qui est inférieur strictement à 1. Donc f est contractante sur X et, en appliquant le théorème de Picard, si $(f^n(x_0), a) \in X$ pour tout n, alors $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a l'unique point fixe de f, ce qui est absurde. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^n(x_0), a) < \varepsilon$, et donc pour $m > n$, $d(f^m(x_0), a) < d(f^n(x_0), a) < \varepsilon$. Ceci prouve la convergence de la suite $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ vers a.

Question.

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Réponse.

On considère l'ensemble $I := \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$. Alors $I \neq \varnothing$ car $1 \in I$.

I est borné donc admet une borne inférieure a. Pour $x \in I$, on a alors $x \geq a$ et donc $f(x) \geq f(a)$ car f est croissante, d'où $x \geq f(a)$ pour tout $x \in I$. On en déduit que $f(a)$ est un minorant de I, donc $f(a) \leq a$. On en déduit $f^2(a) \leq f(a)$ et donc que $f(a) \in I$, d'où $a \leq f(a)$ par définition de a.

Donc $a = f(a)$ est un point fixe de f.

Question.

Montrer le théorème de Cauchy-Peano en utilisant le théorème de Schauder.

Réponse.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Le but est de montrer que (1) admet une solution locale.

On commence par remarquer que (1) est équivalent à

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\,\mathrm{d}s$$

car f est continue.

On va se placer sur un cylindre de sécurité : soit $r, M > 0$ tels que

$$\bar{B}(x_0, r) \subset U, \quad J := [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \subset I \quad \text{et} \quad \sup_{(t,x) \in J \times B(x_0,r)} \|f(t,x)\| \leq M.$$

On note

$$\mathcal{A} := \{x : J \to \bar{B}(x_0, r) \; M-\text{lipschitzienne telle que } x(t_0) = x_0\}$$

et on définit l'opérateur T sur $\mathcal{A}$ par

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Le but est donc de montrer que T admet un point fixe. On commence par montrer que T est bien défini : pour $x \in \mathcal{A}$ et $t \in J$, on a

$$\|T(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq M|t - t_0| < r$$

et pour $t_1, t_2 \in J$,

$$\|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq M|t_2 - t_1|,$$

donc T est bien défini.

$\mathcal{A}$ est bien convexe, fermé et on montre par le théorème d'Ascoli que $\mathcal{A}$ est compact. En effet, pour $t \in J$, $\{x(t) \mid x \in \mathcal{A}\} \subset \bar{B}(x_0, r)$ donc $\mathcal{A}$ est ponctuellement bornée (on est en dimension finie) et pour $x \in \mathcal{A}$,

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|$$

donc $\mathcal{A}$ est bien équicontinue.

Montrons que T est continu pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder. Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$, alors f est uniformément continue sur $J \times \bar{B}(x_0, r)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - y\|_\infty < \eta \Rightarrow \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| < \varepsilon.$$

D'où, pour $\|x - y\|_\infty < \eta$,

$$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\,\mathrm{d}s < \varepsilon \frac{M}{r},$$

donc T est continu.

Finalement, $\mathcal{A}$ est un convexe fermé non vide, T est continu de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est compact donc $T(\mathcal{A})$ l'est aussi, on peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe pour T.