208 – Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Remarque. Tout espace vectoriel est normable ! On peut prendre par exemple $\|x\| := \sup |x_i|$ où $x = \sum x_i e_i$ avec $(e_i)_{i\in I}$ une base algébrique.

Question.

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que B est la boule unité d'une norme si et seulement si B est convexe, compacte, symétrique et $\mathring{B} \neq \varnothing$.

Réponse.

$\Rightarrow$: Si B est la boule unité d'une norme, alors B est compacte car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, convexe par inégalité triangulaire, symétrique par homogénéité et d'intérieur non vide car contenant la boule unité ouverte.

$\Leftarrow$: On pose $\|x\| := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{x}{\lambda} \in B\}$ la jauge de B.
$\|\cdot\|$ est définie car $\mathring{B} \neq \varnothing$ donc contient une boule et B est symétrique et convexe donc B contient une boule ouverte centrée en 0 (faire un dessin) donc $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid x \in \lambda B\} \neq \varnothing$. Par ailleurs, $\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{x}{\lambda} \in B\} = [\|x\|, +\infty[$. En effet, si (λ_n) est une suite convergeant vers $\|x\|$ telle que $\frac{x}{\lambda_n} \in B$, alors $\frac{x}{\|x\|} \in B$ car B est fermée et si $\lambda \geq \|x\|$, alors $\frac{x}{\lambda} = \frac{\|x\|}{\lambda}\frac{x}{\|x\|} + (1 - \frac{\|x\|}{\lambda}) \times 0 \in B$ par convexité de B. Ceci montre en particulier que $\|x\| \leq 1$ si et seulement si $x \in B$.
L'homogénéité se vérifie immédiatement grâce au caractère symétrique.
Si $\|x\| = 0$, il existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\frac{x}{\lambda_n} \in B$ et B est bornée donc $x = 0$.
Finalement, $\frac{x}{\|x\|} \in B$ et $\frac{y}{\|y\|} \in B$ donc pour tout $t \in [0,1], t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)\frac{y}{\|y\|} \in B$. En particulier, en posant $t := \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$, on a $\frac{x+y}{\|x\|+\|y\|} \in B$, donc $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Question.

Soit E un espace de Banach. Montrer que $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Réponse.

Soit $u \in GL(E)$ et $v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors $u+v = u(1+u^{-1}v)$, donc si $\|v\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$, alors $u+v$ est inversible et $(u+v)^{-1} = \sum (u^{-1}v)^n u^{-1}$.

Question.

Donner un exemple d'espace seulement préhilbertien.

Réponse.

On peut prendre par exemple l'espace des suites complexes nulles à partir d'un certain rang, qui est un sous-espace de l^2 non fermé donc non complet.

Question.

Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est soit dense soit fermé.

Réponse.

Soit H un hyperplan, alors il existe une forme linéaire f telle que $H = \ker f$. Si f est continue, H est fermé. Par ailleurs, $\bar{H}$ est un espace vectoriel, ce qui répond à la question.

Question.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs sur un espace de Banach telle que $\sup \|T_n\| < \infty$ et $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ pour tout x avec T un opérateur. A-t'on $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$?

Réponse.

Non : on définit

$$\begin{aligned} T_n : l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ (u_p) &\longmapsto (a_p) \end{aligned}$$

avec $a_p = u_p$ si $p \leq n$ et $a_p = 0$ si $p > n$.
Alors pour tout $x, T_n(x) \longrightarrow x$ et $\|T_n - I\| = 1$.

Question.

Est-ce qu'une suite qui est de Cauchy pour une métrique l'est aussi pour toute métrique topologiquement équivalente ?

Réponse.

Non : soit $u_n := n$ et $d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$, alors (u_n) est de Cauchy pour d mais pas pour $|\cdot|$ alors que ces métriques sont topologiquement équivalentes.

Question.

Donner un exemple de forme linéaire non continue sur un espace de Banach.

Réponse.

Soit E un espace de Banach de dimension infinie, $(e_i)_{i\in I}$ une base algébrique de E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (e_i)_{i\in I}$ telle que pour tout n, $\|x_n\| = 1$.
On définit la forme linéaire T par $T(x_n) = n$ et $T(e_i) = 0$ pour $e_i \notin (x_n)$, elle n'est pas continue.

Question.

Montrer que si $\int |f| = 0$, alors $f = 0$ presque partout.

Réponse.

On a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{|f| \geq \frac{1}{n}\} = \{|f| > 0\}.$$

Si f n'est pas nulle presque partout, alors $\mu(\{|f| > 0\}) > 0$ donc il existe n tel que $\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) > 0$ et alors

$$\int |f| \geq \int_{|f|\geq \frac{1}{n}} |f| \geq \frac{1}{n}\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) > 0.$$